

---

— मुद्रक

दीवान बंशधारीलाल  
हिन्दी-साहित्य प्रेस, प्रयाग ।

---

## विषय-सूची

नम्बर	विषय	पृष्ठसंख्या
	सम्पादक की भूमिका	.
१	उपयोगी गणित	१
२	समीकरणों के गुण	३१
३	समीकरणों की रचना	४३
४	धनार्थ मूल	६३
५	तुल्यमूल	७८
६	समीकरण के मूलों की सीमा	८१
७	समीकरणों का लघूकरण	१२८
८	ह्रात्मक समीकरण	१३६
९	द्वियुक् पद समीकरण	१४८
१०	परिच्छिन्न मूल	१७१
११	समीकरण के मूलों का आनयन	१८६
	चतुर्घात समीकरण	२१०
१२	समीकरण के मूलों का पृथक्करण	२४०
१३	आसन्नमानानयन	२८१
१४	मानों के तद्रूपफल	३१६
१५	कनिष्ठफल	३५५

नोट — पृष्ठ २०६ पर 'परिच्छिन्न मूल' की जगह समीकरण के मूलों का आनयन चाहिए।

चतुर्घात समीकरण वाले अध्याय पर कोई संख्या नहीं है इसलिए विषय सूची में संख्या नहीं दी गयी।



श्री जगदीश्वरजी महाराज !

## लगावककी भूमिका ।

भारतवर्ष में बीजगणित का अङ्कुर कब और पहिले कहां जमा यह अब स्पष्टरूप से जानना अत्यन्त कठिन है । तथापि जहां तक विचार से अनुभव होता है यह जान पड़ता है कि इस देश में लिखने की विद्या प्रकट होने के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार था । पहिले के लोग जो कि अक्षरों के सङ्कत से अपरिचित थे अव्यक्त पदार्थों के मानने के लिये जुदे जुदे रङ्गों की गोलिओं का व्यवहार करते थे जब पंखे से लिखने का विद्या प्रचलित हुई तब बीजगणित की पेशियों में उन्हीं रङ्गों के सूचक शब्दों का व्यवहार होने लगा जैसा कि संस्कृत के बीजगणिता में अव्यक्तों के मान मानने के लिये जा यावतावर, कालक, नालक, पीतक, लोहितक, श्वेतक, चित्रक, कपिलक, पिंगलक, पाटलक, धूम्रक, श्यामलक, मेचक इत्यादि शब्द रखे हैं उनसे स्पष्ट है । जिसकी रचना काल का अनुसन्धान अभी तक स्पष्ट रूप से नहीं हो सका है ऐसे आर्षग्रन्थ सूत्रसिद्धान्त के देखने से यही अनुमान होता है कि बीजगणित भारतवर्ष में हो पहिले उत्पन्न हुआ फिर यहाँ से सर्वत्र फैला है । क्योंकि कोणशङ्कु ( the Sine of the altitude of the sun when situated in the vertical circle of which the Azimuth distance is 45 ) के ज्ञानयन के लिये इस ग्रन्थ में यह सूत्र

‘त्रिज्याजगोघेनोऽप्रज्यावर्तनादृद्धादतादतात् ।

धुनर्द्वाद्दशानिदन्त्य ज्ञेयते यत् फलं ६० ॥

शङ्कुवर्गाधसंयुत्तदिदुवद्वर्गभाजितात् ।

तदेव करणी नाम तद् दृष्टव्यं भाषयेद्वधः ।



अर्धत्रो विपुवच्छायाग्रज्यया गुणिता तथा ।

भक्ता फ शङ्क्यं तद्वर्गसंयुक्तकरणापदम् ॥

फलेन हानमंयुक्तं दक्षिणात्तरगोलयोः ।

याम्ययोर्निदिशाः शङ्करेवं याम्योत्तरे रवौ ॥

परभ्रमार्त शङ्केस्तु शङ्करुत्तरयोस्तु सः ।

लिखा है जिसका अर्थ है कि त्रिज्या के वर्ग के आधे में अग्रा का वर्ग घटा कर शेष को १२ से गुण कर फिर १२ से गुण दो । इस गुणनफल में शङ्कवर्ग के आधे अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग से भाग दो । इससे जो भजनफल पाया जाय उसको करणी कह परिउत इस करणा को अलग लिख रखे । फिर १२ गुण पलभा वा अग्रा से गुणने से जो गुणनफल हो उसमें उसी का अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग का भाग दो । इस लब्धि को फल कहो । इस फल के वर्ग से युत करणी के वर्गमूल में से उस फल को यदि सूर्य दक्षिण गोल में हो तो घटाओ और यदि सूर्य उत्तर गोलमें हो तो जोड़ो । यही फल कोणशङ्कु होता है । इस सूत्र की उपपत्ति बीजगणित के बिना हो ही नहीं सकती । इस बात की सत्यता प्रकट करने के लिये यहाँ ऊपर लिखे हुए सूत्र की उपपत्ति पाठको के अवलोकनार्थ नीचे दी जाती है:—

मान लो । कय = कोणशङ्काप = पलभा (the equinoctial shadow)

अ = अग्रा ( the sine of the amplitude )

क = करणी और फ = फल

तय १२ : प .. य : <sup>प</sup> य = शङ्कुतल

यदि दक्षिण गोल में सूर्य हो तो शङ्कुतल में अग्रा जोड़ देने से और यदि उत्तर गोल में हो तो घटा देने से भुज (the sine of the difference between the sun's place and the prime vertical) बनता है ।

$$\therefore \frac{p}{12} y \pm a = \text{भुज}$$

परन्तु जब कोणवृत्त में सूर्य रहता है तब उसका जितना अन्तर सममण्डल ( the prime vertical circle ) से रहता है उतना ही याम्योत्तर वृत्त (meridian) से रहता है। इस लिये तब दृज्या (the sine of the zenith distance) अर्थात् नतांशो की ज्या कर्ण (hypotenuse) होती है। भुज और कोटि ये दोनों

$\frac{p}{12} y \pm a$  इस भुज के तुल्य होते हैं।

$$\therefore \text{दृज्या}^2 = 2 \left( \frac{p}{12} y \pm a \right)^2 = 2 \left( \frac{p^2}{144} y^2 \pm \frac{p \cdot y \cdot a}{6} + a^2 \right)$$

$$= \frac{p^2}{72} y^2 \pm \frac{p \cdot y \cdot a}{3} + 2 a^2$$

$$\text{परन्तु शंकु}^2 + \text{दृज्या}^2 = \text{त्रिज्या}^2$$

$$\therefore y^2 + \frac{p^2}{72} y^2 \pm \frac{p \cdot y \cdot a}{3} + 2 a^2 = \text{त्रि}^2$$

$$\text{छेदगम से } 72 : y^2 + p^2 y^2 \pm 24 y p a + 144 a^2 = 72 \text{ त्रि}^2$$

$$\text{वा } (p^2 + 72) y^2 \pm 24 a p y = 72 \text{ त्रि}^2 - 144 a^2$$

( $p^2 + 72$ ) इसका दोनों पक्षों में भाग दे देने से

$$\frac{y^2 \pm 24 a p y}{y^2 + 72} = \frac{72 \text{ त्रि}^2 - 144 a^2}{p^2 + 72} = \frac{144 \left( \frac{\text{त्रि}^2}{2} - a^2 \right)}{p^2 + 72}$$

$$\text{वा } y^2 \pm 24 y \left( \frac{12 a}{p^2 + 72} \right) = \frac{12 \times 12 \left( \frac{\text{त्रि}^2}{2} - a^2 \right)}{p^2 + 72}$$

यहाँ श्लोक के अनुसार  $\frac{१२ \times १ = \left( \frac{१३^२}{२} - ५^२ \right)}{५^२ + ७२}$  इसकी करमा

संज्ञा और  $\frac{१२}{५^२ + ७२}$  इसकी फल संज्ञा की गई है।

∴  $y^2 \pm २ फ य = क$

वा  $y^2 \pm २ फ य + फ^२ = फ^२ + क$

मूल लेने से  $y \pm फ = \sqrt{फ^२ + क}$

∴  $y = \sqrt{फ^२ + क} \mp फ$

यहाँ फलवर्गयुत करणी के वर्गमूल में से जब सूर्य दक्षिण गोल में हो तो फल को घटाओ और जब उत्तर गोल में हो तो जोड़ दो।

यदि  $\sqrt{फ^२ + क}$  इस व्यक्त पक्ष का मूल ऋण मानो तो दोनों गोल में शङ्कमान ऋण होगा अर्थात् तब सूर्य क्षितिज के नीचे कोणवृत्त में आवेगा।

ऊपर की क्रिया से यह स्पष्ट है कि भारतवर्ष में सूर्यमिहान्त के रचनाकाल के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार भली भाँति था।

बीजगणित के समीकरणों में अव्यक्त पदों के मान मानने के लिये सभी रंगवाची शब्दों ही का प्रयोग किया गया है। केवल प्रथम शब्द यावत्तावत् रंगवाची न होने से चित्र में कुछ शब्दा उत्पन्न होती है। संस्कृत में यावक महावर को कहते हैं जो कि लाह में बसा हुआ लाल रंग का होता है। मंगल कार्यों में पुरुष और स्त्रियों के पैर इससे रंगे जाते हैं और पैर के नहों में भी इसी को भर देते हैं। रंगवाची ही सब शब्दों के प्रयोग से निश्चय होता है कि पहिले के लोगों ने यावक ही को ग्रहण किया था पीछे से भारकुरादिकों ने इसके स्थान में लेखक लोग ले

अथवा मर । अपना इच्छा से यावत्तावत् को रक्खा । क्योंकि धूर्तक चोरे को को हुई ब्रह्मगुप्त के सिद्धान्त की टीका में यावत्तावत् के स्थान में यावत् ही मिलता है । भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित के अनेकवर्णममीकरण में ऊपर के अव्यक्त श्लोक शब्दों का जिस तरह प्रयोग किया है कि अथवा आपस में जिसमें सब मान न मिल जायें इस लिये अव्यक्त के मानों के लिये चांदो-नो रु, ख, ग इत्यादि अक्षरों ही को रक्खो ।

यूग पंच श्लोक समय से अब समीकरणों में य के स्थान में भिन्न भिन्न अवस्था के उत्थापन देने का विशेष कर के प्रचार हुआ है जिससे न त हो सोचा समीकरण हो जाता है और बड़े लाघव से उतर न चल आता है । परन्तु यह बात ध्यान देने योग्य है कि भास्कर ने हजारों वर्ष पहिले से उत्थापन का यह प्रकार चला आता है जिससे बड़े कठिन प्रश्न भी सहज में हो जाते हैं । यही कारण है कि गणित के आचार्यों ने अव्यक्त पदार्थ के मान मानने के लिये यावत्तावत्, कालक, नीलक इत्यादि इतने शब्दों का प्रयोग किया है । अपने बीजगणित में भास्कराचार्य लिखते हैं कि

ब्रह्मगुप्तप्रथमपद्मनाभबोजानि यस्मादतिविस्तृतानि ।

आचार्य तत्सारमकारि नूनं सयुक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्टयै ॥

अर्थात् ब्रह्मगुप्त, श्रोधर और पद्मनाभ के बीजगणित बहुत विस्तृत हैं, इन्हें लिये उनमें से उत्तम उत्तम पदार्थों का संग्रह कर विद्यार्थियों के संतोष के लिये मैं ने इस छोटे बीजगणित को बनाया है । ऊपर के श्लोक से स्पष्ट है कि भारतवर्ष में अनेक वर्षों से बीजगणित की पोथियाँ थी पर कालवश से वे सब भूल नष्ट हो गईं । केवल ब्रह्मगुप्त के बीजगणित का कुछ भाग ही है जिसका अंगरेजी अनुवाद कोलब्रूक महाशय को किया

हुआ विद्वानो में प्रसिद्ध है। इस बीजगणित को ब्रह्मगुप्त ने शक ५५० अर्थात् सन् ६२६ ई० में बनाया है। उसमें वर्गसमीकरण के तोड़ने के लिये उसी युक्ति को लिखा है जो आज कल सर्वत्र प्रचलित है। जो लोग संस्कृत नहीं जानते केवल अंगरेजी भाषा से परिचित हैं उन्हें चाहिए कि कोलब्रूक महाशय का किया हुआ उसका अंगरेजी अनुवाद देखें।

अपने बीजगणित के मध्यमाहरण में भास्कराचार्य लिखते हैं “न निर्वहश्चेद् धनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्ध्या” अर्थात् धन और चतुर्घात समीकरणों में अपनी बुद्धि से विचारो कि किससे गुणें, क्या जोड़ें जिसमें मूल मिले अथवा अपनी बुद्धि ही से घटकल करो कि समीकरण में अव्यक्त का मान क्या है। इस वाक्य से स्पष्ट है कि पूर्व आचार्यों के बीजगणित में धन और वर्ग-वर्ग अर्थात् चतुर्घात समीकरणों के तोड़ने की युक्ति नहीं लिखी थी। यदि ऐसी युक्तियाँ होती तो भास्कर अवश्य अपने बीजगणित में लिखते।

जिन समीकरणों में अव्यक्त के अनेक मान सभाव्य और अभिन्न धन आते हैं उन समीकरणों ही के ऊपर भारतवर्ष के प्राचीन आचार्यों का विशेष रूप से ध्यान था। इसीलिये अनेक वर्णमध्यमाहरण और भावित ये पृथक् पृथक् दो अध्याय उनके बीजो में लिखे गए। अव्यक्त के जिन मानों का उदाहरण लोक व्यवहार में दिखलाया जाना संभव था उन्हें मानों पर भास्कराचार्यों का ध्यान विशेष था और जिन ऋण संख्याओं का लोक में व्यवहार नहीं हो सकता था अव्यक्तमान आने पर भी ये लोग उन संख्याओं का ग्रहण नहीं करते थे। यही कारण है कि वर्गसमीकरण में अव्यक्त के सर्वत्र दो मानों में से ऋण मान को लोक में व्यवहार न होने से अस्वीकार करते हुए भास्कर ने पद्मनाभ के—

व्यक्तान्तर्य चेन्मूलमन्यपक्षगैरुपतः ।

अल्पं धनराग कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मिति ॥

इस सूत्र का खण्डन ही कर डाला ।

निदान ऋण संख्या पर विशेष ध्यान न देने से और गणित-लाघव के लिये विशेष साङ्केतिक चिन्ह न बनाने से भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञ वर्गसमीकरण के आगे घनसमीकरणों में विशेष विचार न कर सके । केवल भास्कराचार्य ने घनसमीकरण का एक उदाहरण य<sup>३</sup> + १२य = ६य<sup>२</sup> + ३५ य<sup>३</sup> देते हुए इसके उत्तर के लिये लिखा है कि ऐसे उदाहरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं । अपनी बुद्धि बल से कुछ जोड़, घटा कर उत्तर निकालो । उन्होने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है—

$$य^३ + १२य = ६य^२ + ३५$$

दोनो पक्षों में (६<sup>२</sup> + ८) इसको घटा देने से

$$य^३ - ६य^२ + १२य - ८ = २७$$

$$\text{वा } (य - २)^३ = (३)^३$$

$$\text{घनमूल लेने से } य - २ = ३ \therefore य = ५$$

बस य का यही एरमान निकाल कर रह गए हैं । आगे और दो मानों के विषय में कुछ भी नहीं लिखा है । अव्यक्त के और दो मानों के लिये इमी ग्रन्थ का २०८ पृष्ठ देखिए ।

प्राचीन काल से अरब और ग्रीस देश के लोग किसी न किसी व्याज में भारतवर्ष में आया जाया करते थे । अधिक मेल जोल हो जाने से उन लोगों ने बहुत बातें हिन्दुओं से और हिन्दुओं ने बहुत बातें उन लोगों से सीखी ।

ऐसा कहा जाता है कि अजमामून खलीफा (= १३—= ३३ ई०) के राज्यकाल में रहने वाले मुहम्मद बिन अज ख्वारेज्मी राजशाही इतों के संग अफगानिस्तान गए और लौटती समय भारतवर्ष से

होते हुये आए । आने के आगे ही समय के बाद सन् ८३० ई० में उन्होंने बीजगणित का एक पोथी लिखी । इस पोथी के विषय इन्हीं के आचार्य दिए नहीं मालूम पड़ते वरन् भारतवर्ष ही के ब्रह्मगुप्त, भट्ट बटभट्ट या और किसी विद्वान् के बीजगणित से अनुवाद किए गए हैं या उनके आधार पर लिखे गए हैं ।

भरतपर्ष ने बीजगणित में (१) एक वर्णसमीकरण (२) अनेक वर्णसमीकरण (३) समाहरण और (४) भावित ये चार प्रकार के समीकरणों ही को लेते हैं । भावित गण ने भी लिखा है कि 'प्रथम-लैकपर्णसमीकरणं बीजम् । द्वितीयमनेकवर्णसमीकरणं बीजम् । त्रयवर्णस्य द्वयोर्गो गहूनां वर्गाभिगतानां समाकरणं तन्मध्यमाहरणम् । भावितस्य तद्भावनितमिति बीजचतुष्टयं वदन्त्याचार्याः' ।

दिए हुए चार समीकरणों में २ अव्यक्त और व्यक्तों को किस प्रकार से एक एक पद में रख कर अव्यक्त के मानों को ले आना इसके लिये प्र गुप्त लिखते हैं—

अव्यक्तान्तरभक्तं व्यस्त रूपान्तरं समेऽव्यक्तः ।

वर्गाव्यक्ताः शोभ्या यस्माद्गणि तद्वस्तात् ॥

इसपर पृथपद पिताजी की टीका है—'ममे एकवर्ण समीकरणे व्यस्त रूपान्तरमव्यक्तान्तरभक्तमव्यक्तमान व्यक्तं भवेत् यत्पक्षादव्यक्तमानद्वयपक्षाव्यक्तमानं विशोभ्याव्यक्तान्तरं साध्यते तत्पक्षस्वरूपाण्यन्यपक्षरूपेभ्यो विशोभ्ययच्छेदं तद्व्यस्तं रूपान्तरमित्यर्थः । यस्मात्पक्षादव्यक्तो वर्गाव्यक्ता अव्यक्तवर्गश्च विशोध्यस्तदपस्तावितरपक्षाद्रपाणि विशोध्यानि । एवमेकपक्षेऽव्यक्तवर्गोऽव्यक्तश्च । अपरपक्षे च व्यक्तानि रूपाणि । अर्थात् जिस पक्षवाले अव्यक्त में से दूसरे पक्षवाले अव्यक्त को वश कर अव्यक्त का अन्तर माधन करते हैं उसी पक्ष के व्यक्त को दूसरे पक्षवाले व्यक्त में घटा कर जो १.५ दूजे उसमें अव्यक्त के अन्तर का भाग देने से

अव्यक्त का मान व्यक्त हो जाता है । जिस पक्ष से अव्यक्त और अव्यक्त वर्ग घटाए जाते हैं उस दूसरे पक्ष से व्यक्त को ले जाकर घटाना चाहिए । इन दोनों एक पक्ष से अव्यक्त वर्ग और अव्यक्त और दूसरे पक्ष से व्यक्त रूप रह जाते हैं ।

भास्कराचर्य जी इसी कारण को लेकर लिखते हैं.—  
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्त्यक्त्वा क्षुण्णं वापि सङ्गुण्य भक्तवा ।  
एकाऽव्यक्तं शोधयेद्व्यपन्नाद्रूपान्वयभयेतरस्माच्च पक्षात् ।  
शेषाव्यक्तेन द्वन्द्वपक्षेप उक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः ।

ऊपर कही हुई बातों में मनीषी विचारने से यह स्पष्ट है कि अरब के ज्योतिषियों ने इसी लिये अपनी भाषा में बीज का अनुवाद अलजवर वउ मुकानिला किया । इस नाम के देखने से, अव्यक्त का बीज हुआ जान रहने तथा अपना बीजगणित की पेशियों में वगममीकरण करने की सूझों की चर्चा करने से यह हद अनुमान होता है कि अरब के ज्योतिषियों ने भारतवर्ष ही से पाँहले पहिल बीजगणित का ज्ञान पाया था । क्योंकि ग्रीस देश का रहने वाला एलफेन्टस (Elephantus) के बीजगणित में इन सब की कुछ भ्रम चचा नहीं पाई जाती ।

अरब के ज्योतिषी क्षेत्र रचना की युक्ति से दशसमीकरण को सिद्ध करना जानते थे । इसी युक्ति से इन लोगों ने घनसमीकरण को भी सिद्ध करने के लिये बहुत प्रयत्न किया । “किसी एक घरातल से किसी एक गोल को इस प्रकार से काटना कि उस गोल के दोनों खण्ड एक दा हुई निष्पत्ति में हो” इस प्रश्न को सब से पहिले बागदाद का रहने वाला अलमहानी ने एक घनसमीकरण के स्वरूप में प्रकट किया । परन्तु इस प्रश्न को अलकुही, अलहसन बिन अहमद



ज्ञेयम् इत्यादिको ने भी लिखा है तथ पि अत्र के ज्यौषिषियों में स  
सब से पहिले इसकी उपरति अबूजफर अल हाजिन ने की ।

हिमो ममममसुज क्षेत्र के मुज का ज्ञान य<sup>१</sup>-य<sup>२</sup>-२ य+१=०  
इस घन समीकरण के आगेन था । बहुते ने इसको सिद्ध करने के  
लिये प्रयत्न किया पर सब निष्फल हुआ । अन्तमें अबुलगूद ने इस  
घन समीकरण के तोड़ने की युक्ति निकाली । अन्तर खण्डित शङ्कुओं  
( by intersecting conics ) की सहायता से सन् १०७९ ई०  
में उमर अल खय्यामी ने अनेक प्रकार के समीकरणों को निह  
करने को उत्तम विधियों को अपने बीजगणित में लिखा है परन्तु  
बीजगणित की सहायता से वास्तव में घनसमीकरण के तोड़ने की  
कोई युक्ति माध्यमगतः उस ग्रन्थ में नहीं दी गई है । क्षेत्ररचना  
ही की युक्ति से अबुल वफान भी य<sup>३</sup>=अ, य<sup>३</sup>+अ य<sup>३</sup>=ब इन  
समीकरणों को सिद्ध किया है । ईशा की तेरहवीं शताब्दि के  
आसन्न में यूरोप के इटली नामक प्रान्त में पीज़ा का रहनेवाला  
लेनार्डो (Leonardo of Pisa) ने अरबी बीज को अपनी भाषा  
में अनुवाद किया । जिसके कारण इटली के लोग इस विषय में  
प्रधान गिने जाते हैं और जब तक संसार में विद्या का प्रचार  
रहेगा तब तक इस बात के लिये उन लोगों का आदर होता रहेगा ।  
सन् १९१४ ई० में लूकसपैसिओलस ( Lucus Pacioli )  
जो बुर्गो का लूकस (Lucus de Burgo, इस नाम से प्रसिद्ध है  
उसने बीजगणित की एक पोथी लिखी जिसका नाम L'Arte  
Maggiore यह है । उस ग्रन्थ में अरबों के घनसमीकरण के  
कार इस विद्वान् ने लिखा है कि जितनी बीजगणितीय विधियाँ आज  
तक ज्ञात हैं उनसे इन घनसमीकरणों का तोड़ना उसी प्रकार असं-  
भव है जित प्रकार एक वृत्त के तुल्य एक चतुर्भुज बनाना क्षेत्र-  
युक्ति से असंभव है । लूकस को इस सूचना से गणितज्ञों का ध्यान

विशेष रूप से घनसमोकरण की ओर रुढ़ । भीजियो फेरियो ( Scipio Ferreo ) ने  $y^2 + my = n$  इस घनसमोकरण के तोड़ने के लिये एक विधि को निकाला परन्तु जनना में नहीं प्रकट किया । सन् १५०५ ई० में अग्ने एक शिष्य फ्लारिडा ( Florido ) को उसने उस विधि को बतला दिया ।

एक बार कोला ( Colla ) ने गजितज्ञ टार्टाग्लिया ( Tartaglia ) से एक प्रश्न पूछा जिसका उत्तर  $y^2 + py^2 = b$  इस घनसमोकरण के अन्यक्त मान के आधेन था । इसलिये विचारते विचारते टार्टाग्लिया ने इस घनसमोकरण के तोड़ने की युक्ति सन् १५३० ई० में निकाली । इस बात को सुन कर फ्लारिडो ने भी अग्ने गुरु की युक्ति को जो  $y^2 + my = n$  इस घनसमोकरण के तोड़ने के लिये सोखी थी प्रकाश किया । इसके प्रकार हाने पर सन् १५३५ ई० में टार्टाग्लिया ने कहा कि फ्लारिडा की विधि ठीक नहीं है और शास्त्रार्थ करने के लिये फ्लारिडा को ललकारा भी । परन्तु पाछे से स्वयं उस विधि को ठाक समझ कर चुप हो गया । यह विधि बही है जिसे आज कल लोग कार्डेन की रीति कहते हैं । अर्थात् फेरियोने  $y^2 + my = n$  इसके तोड़ने के लिये कल्पना की था कि  $y = \sqrt{r} - \sqrt{s}$  ऐसा है ( ११२ वीं प्रक्रम देखो ) ।

पश्चात् टार्टाग्लिया ने अरबों के घनसमोकरण तोड़ने के लिये कई एक प्रकार निकाले । कार्डेन ने उन प्रकारों को जानने के लिये उससे बहुत विनय की । अन्त में शपथ श्रुति कि उन प्रकारों को कहीं प्रकाश न करना टार्टाग्लिया ने कार्डेन का अपना विश्वासयोग्य भक्त जन जान कर उन प्रकारों को बतला दिया । कार्डेन ने उसके शपथ का कुछ भी खयाल न कर सन् १५४५ ई० में अपने बृहद् ग्रन्थ *Ars Magna* आस मैगना में टार्टाग्लिया

ते सब प्रकारों को छपवा कर प्रकाश कर दिया । इसके बाद कार्टेजियस ने भी अपने सब प्रकारों को एक ग्रन्थके आकार में प्रकाश करने का इच्छा प्रकट की और सन् १५५६ ई० में छपवाला भास्कारम्मा का दिया । परन्तु सन् १५५६ ई० में उसकी मृत्यु हो जाने से ग्रन्थ अधूरा ही छप कर रह गया । घनसमीकरण तोड़ने का यह प्रयास बिना सफल नहीं रह गया । कार्डेन ही के अनुग्रह से केवल अथ प्रकार विद्वानों को विदित होने के कारण कार्डेन के आश्रय उर्बा के नाम से वे सब प्रकार प्रसिद्ध किए गए ।

इसके अनन्तर यूरप देशीय गणितज्ञों का विचार चतुर्घात समीकरण का आरम्भ हुआ । घनसमीकरण तोड़ने के लिये विद्वानों के बीच झगडा ने जिस प्रकार आन्दोलन मचाया था उसी प्रकार  $x^3 + 6x^2 + 36 = 60$  य इस चतुर्घात समीकरण को तोड़ने के लिये आन्दोलन मचाया । कार्डेन ने ऐसे चतुर्घात समीकरण को तोड़ने की कोई रीति निकालने लिये बहुत प्रयास किए पर सफल नहीं हो सका । परन्तु उसके शिष्य फेरारी (Ferrari) ने इस बात में सफलता प्राप्त की और ऐसे समीकरण को तोड़ कर अत्यन्त कम न जानने का प्रकार भी निकाला ( १२३वें प्रकरण का ११ प्रकार देखो ) । बाम्बेली (Bombelli) का बीजगणित सन् १५५६ ई० में छपा है । उसमें भी चतुर्घात समीकरण को तोड़ने का वही प्रकार लिखा है जो फेरारी ने निकाला था । बहुतेक लोग यह कहते हैं कि यह प्रकार बाम्बेली का निकाला हुआ है । बहुत कम लोग कहते हैं कि यह प्रकार सिम्पसन (Simpson) का निकाला गया है । पर सिम्पसन का बीजगणित बहुत पीछे सन् १७४० ई० में प्रकाशित हुआ ।

सन् १६३७ ई० में बाज के ऊपर डेकार्ट (Descartes) ने एक ग्रन्थ लिखा है जिसमें अनेक नये प्रकार पाए जाते

हैं। जिनमें मुख्यतः समीकरण में अन्यक्त के घनसमान और असम्भव मान की सीमांसा और चिन्ह राते हैं (१२ वॉ प्रक्रम देखो)। डेकार्ट ने दो वर्गसमीकरण के गुणनफलहृद में एक चतुर्वर्ती समीकरण को ले आने की युक्ति को भी दिखलाया है। यद्यपि यह युक्ति फेरारी के प्रकार से भी निकल आती है तथापि व्यवहार में उपयोगी है (१२४ वॉ प्रक्रम देखो)।

सन् १७७० ई० में आयलर (Euler) ने एक बीजगणित रचना कर प्रकाश किया। उसमें चतुर्वर्ती समीकरण तोड़ने के लिये उत्तम प्रकार दिखलाया गया है और साथ ही साथ सिद्ध किया गया है कि चतुर्वर्ती समीकरण का तोड़ना एक घनसमीकरण के आधीन है अर्थात् यदि उस घनसमीकरण के अन्यक्तमान विदित हो जाय तो चतुर्वर्ती समीकरण के अन्यक्तमान भी विदित हो सकते हैं (१२२ वॉ प्रक्रम देखो)। डेकार्ट और आयलर के प्रकारों को देख कर बहुतों की इच्छा हुई कि चतुर्वर्ती से ऊपर के घातवाले समीकरण के तोड़ने का प्रकाश मिले। इसके लिये अठारहवीं शताब्दि तक प्रयत्न किया गया पर सब निष्फल हुआ। पश्चात् वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लान्गे (Lange) ने भी क्रम से सन् १७७० और १७७१ ई० में इस विषय पर अत्यन्त उपयोगी बातों को अपने अपने लेखों में प्रकाश किया। पश्चात् आबेल (Abel) और वान्टसेल (Wantzel) ने बिन्दु दिया कि चतुर्वर्ती से अधिक घातवाले समीकरणों के तोड़ने का साधारण विधि बीजगणित की युक्ति से असम्भव है। the solution is not possible by radicals alone. See: Cours [d'Algebre, Superieure Art 516 देखो)।

तत्पश्चात् यूरोप के अनेक विद्वान अनेक नये नये सिद्धान्तों को उत्पन्न किए और आज तक करते ही जाते हैं जिनके कारण

बीजगणितशास्त्र की उन्नति दिन दूनी और रात चौगुनी होती जाता है। उन्हीं कतिपय सिद्धान्तों के संग्रह से बीजगणित का यह सर्माएशमीमांसा नाम का एक बड़ा ग्रन्थ हिन्दी भाषा में बन कर तयार हुआ है।

### आसन्नमूल

मूलान्त सं आसन्नमूल जानने के लिये भारतवर्ष के आचार्यों ने बहुत प्राचीन काल से अनेक प्रकार निकाले हैं। परन्तु वे प्रकार ज्यौतिषसिद्धान्त के ग्रन्थों में प्रायः जीवा, कोटिज्या, आदि सम्बन्धी समीकरणों ही में पाए जाते हैं (भास्कराचार्यकृत सिद्धान्तशिरोमणि के गणिताध्याय का त्रिपरनाधिकार और सूर्य-ग्रहण के समय का लम्बनसाधन; कमलाकररचित सिद्धान्ततत्त्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभागादि का ज्ञानयन देखो)।

यह भी भाषा से अनभिज्ञ होने के कारण उन ग्रन्थों के पढ़ने की योग्यता मुझ में नहीं है तथापि कमलाकर ने अपने ग्रन्थ तत्त्व-विवेक के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभाग की ज्या के ज्ञानयन के लिये मिर्जा बल्लूक वेग का जो प्रकार लिखा है उससे स्पष्ट है कि अरब के लोग भी इस आसन्न मूल को जानने के लिये अनेक यत्न में तत्पर थे। यूरोप में सब से पहिले सन् १६०० ई० में वाटा (Vieta) ने आसन्नमूल जानने के लिये कुछ प्रकारों को लिखा। उसने निश्चय किया कि अवश्य कोई एक प्रकार ऐसा होगा जिससे बार बार क्रिया करने से व्यक्त संख्या के वर्गमूल और घनमूल की तरह किसी समीकरण के एक अव्यक्त मान के व्यक्त संख्या के सब स्थानीय अङ्क क्रम से आते जायेंगे। इसके लिये वाटा ने जो प्रकार निकाला उसमें महा प्रयास करने पर अव्यक्त मान का पता लगता था। पीछे से हैरिअट् (Harriot), आउट्रिड (Oughtred), पेल (Pell) और अन्य लोगों ने भी जहाँ तक बना

बीटा के प्रकार को कुछ सीधा किया। सन् १६६६ ई० में न्यूटन ने क्राय्न्मूल के लिये अपनी रीति प्रकाश की (१४४ वाँ प्रक्रम देखा)। दत्तपश्चात् सिम्सन्, बनेली, लाप्रॉञ्ज इत्यादिकों ने भी अपनी अपना रीतियो को प्रकाश किए। परन्तु अन्त में सन् १८१६ ई० में हानेर (Holler) ने इसके लिये जो रीति निकाली वही सब से बढ़तर हुई और वही अत्यन्त सुगम और लघु होने से सबत्र व्यवहार में प्रचलित हुई (१५४ वाँ प्रक्रम देखो)।

### कनिष्ठफल

इस ग्रन्थ के १५ वें अध्याय में कनिष्ठफलों (Determinants) के अनेक सिद्धान्त लखे हैं। इनकी चर्चा यूरप में बहुत है। गणित के नये ग्रन्थों में प्रायः लानत्र के लिये गणितों के न्याय में कनिष्ठफल ही के रूप में सब वस्तु को लिखते हैं। इसी लिये इस कनिष्ठफल के विशेष उपयोग सिद्धान्तों को पूज्यपाद पिताजी ने इस ग्रन्थ में समावेश कर दिया है।

यहां यह सूचित कर देना मैं उचित समझता हूँ कि वर्गप्रकृति के साधन में भास्कर ने जिसका नाम कनिष्ठफल रक्खा है उससे और इस ग्रन्थ के कनिष्ठफल से कोई सम्बन्ध ही नहीं है।

विशेषतः कनिष्ठफल के सिद्धान्तों को निकालने वाले यूरप के लोग हैं। सन् १६९३ ई० में इसकी चर्चा सब से पहिले लाइबनिट्स (Leibnitz) ने की। फिर सन् १७५० ई० में क्रामर (Cramer) ने इसके पदों के धन, ऋण का ज्ञान किया (१३९ वाँ प्रक्रम देखो)। और १८ वीं शताब्दि के उत्तरार्ध में बेजू (Bezout), लाप्लास (Laplace), वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लाप्रॉञ्ज (Lagrange) भी इस विषय की उन्नति करते ही गए। १९ वीं शताब्दि में गाउस (Gauss) और कोशी (Cauchy) ने

इसको परमावधि तक पहुँचा दिया । इसका डिटरमिनेन्स Determinants यह नाम भी दाशा ही ने रक्खा है । पाछे से सन् १८-४१ ई० में जैकोबी (Jacobi) ने इसके सब सिद्धान्तों को संग्रह कर सब के उपकारार्थ क्रेले के मासिक पत्र Crelle's Journal में छपवा दिया ।

### उपसंहार

समीकरण-मीमांसा ग्रन्थ के इस रूप में प्रकट होने का सारा सुयश श्रीमान् माननीय सर आरबर्न (Sir R Bun C.S.I., I. C. S.) महोदय को है । क्योंकि आप ही की कृपा तथा सहयोग से इस ग्रन्थ का छपाई के निमित्त आठे हुए सपूर्ण व्यय (२५००) रूपयों में से आधा व्यय ऐसे सितञ्जयता के समय में भी संयुक्त प्रदेश की न्यायशीला गवर्नमेन्ट ने दफ्तर गुणग्राहकता का आदरणीय उदाहरण दिखलाये है । साथ ही साथ शेष आधे व्यय को लगा इस ग्रन्थ को छपा कर प्रगल्भ की विज्ञानपरिषत् ने हिन्दी साहित्य की सच्ची सेवा का अशंगत योगदान दिया है ।

स्वर्गवासी पूज्यपाद विनाजी की कोमलता के सुन्दर विषय सुगन्धयुत इस ग्रन्थ-रूप में प्रकाशित जिन शिवालय-भावों ने जिस जिस प्रकार को सजावट की है उस सभी को मेरा हार्दिक धन्यवाद है ।

कहुँ अल्प मेरी बुद्धि बल ना उन्ति नेननि दोष सौँ ।

यहि ग्रन्थ सम्पादन त्रुटिनि दिनदिनहि गहि अरे पसौँ ॥

करिले ग्रहण गुण दुख केन-तन अपगुण छोडि के ।

पदमाकरहु बुव हँन सौँ दिनत कान्त पर ते डि के ॥

खजुरी, }

बनारस । }

आकर द्विती ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते

## समीकरणा-मीमांसा

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः  
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।  
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय  
वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान् ॥

### १-उपयोगी गणित

प्रक्रम १—अव्यक्त राशि । जैसे २, २५, २५६, २५६७ इत्यादि को व्यक्ताङ्क, संख्या वा राशि कहते हैं उसी प्रकार  $y$ ,  $y^2$ ,  $y^2 + क^2$ ,  $y^2 + य र + र^2$  इत्यादि को बीजराशि वा अव्यक्तराशि कहते हैं ।

२—फल । किसी अव्यक्तराशि को उन अव्यक्तों का फल कहते हैं जो उस अव्यक्तराशि में रहते हैं ।

जैसे क  $y^2 + ख य + ग$  इस अव्यक्तराशि में केवल  $y$  अव्यक्त है; इसलिये इसे  $y$  का फल कहेंगे और इस फल को लाघव से फ (  $y$  ) से प्रकट करते हैं अर्थात्

$$फ ( y ) = क य^2 + ख य + ग ।$$

इसी प्रकार क  $y^2 + ख य^2 र + ग य र^2 + घ र^3 + च$  इस अव्यक्तराशि में दो अव्यक्त हैं; इसलिये यह  $y$  और  $र$  का फल है ।



लाघव से उपर्युक्त राशि के लिये फ (य, र) लिखते हैं।

इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि अव्यक्तराशि विशिष्ट अव्यक्तराशि में भी समझना चाहिए।

सर्वत्र अव्यक्तराशि में अव्यक्त को छोड़ और जो क, ख, ग इत्यादि अक्षर रहते हैं उन सब को व्यक्त समझना चाहिए।

अव्यक्तराशि के भिन्न भिन्न फलों को फ, फा, फि, फी इत्यादि अक्षरों से प्रकाश करते हैं, जैसे फा (य) से समझना चाहिए कि यह य का एक फल है जो कि फ (य) इस य के फल से भिन्न है।

३—किसी अव्यक्तराशि को ऐसा लिख सकते हैं जिस में प्रत्येक पद में किसी एक अव्यक्त का घात उत्तरोत्तर एक एक घटता वा बढ़ता रहे, जैसे

कय<sup>४</sup> + खय<sup>२</sup> + ग इस राशि को

कय<sup>४</sup> + ० × य<sup>३</sup> + खय<sup>२</sup> + ० × य + ग

ऐसा लिख सकते हैं यहाँ शून्य गुणकों के पूर्व जो धन चिन्ह लिखे हैं उनके स्थान में ऋण चिन्ह रख देने से भी अव्यक्तराशि में भेद न होगा; परन्तु ऐसे शून्य गुणकों के पूर्व प्रायः धन चिन्ह ही लिखते हैं।

४—पूर्णफल, पूर्णसमीकरण—जिस अव्यक्तराशि में प्रधान अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहते हैं उसे अव्यक्त का पूर्णफल कहते हैं, जैसे

कय<sup>४</sup> + खय<sup>३</sup> + गय<sup>२</sup> + घय<sup>१</sup> + चय + न इस अव्यक्तराशि को य का पूर्णफल कहेंगे।

इस पूर्णफल से बने हुए  $F(y) = 0$  इस समीकरण को पूरा या पूर्णसमीकरण कहते हैं।

५—बीजगणित से जानते हो कि गुण्य अव्यक्तराशि और गुणक अव्यक्तराशि में एक ही अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहे इस क्रम से सब पदों का न्यास कर तब गुणन किया जाता है, जैसे

$$\text{गुण्य} = ५y^५ + ४y^३ + ३y^२ + २y + १$$

$$\text{गुणक} = २y^२ + ३y + ४$$

---


$$\begin{aligned} & १०y^६ + २२y^५ + ६y^५ + ४y^३ + २y^२ \\ & + १५y^५ + १२y^५ + ६y^३ + ६y^२ + ३y \\ & + २०y^५ + १६y^३ + १२y^२ + २२y + ४ \end{aligned}$$


---

$$\text{गुणनफल} = १०y^६ + २३y^५ + ३२y^५ + २६y^३ + २०y^२ + ११y + ४$$

देखो यहाँ यह तो स्पष्ट ही है कि गुणनफल में गुण्य, गुणक के सब से बड़े घात के योग तुल्य घात प्रथम पद में है और एक एक उतरते हुए और पदों में हैं। इसलिये गुण्य, गुणक राशि के चिन्ह समेत केवल गुणकाङ्कों को लिखने से लाघव से गुणनफल बहुत थोड़े ही स्थान में उत्पन्न हो सकता है।

जैसे केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों के लेने से

$$\text{गुण्य} = +५ + ४ + ३ + २ + १$$

$$\text{गुणक} = +२ + ३ + ४$$

---


$$+१० + ८ + ६ + ४ + २$$

$$+१५ + १२ + ९ + ६ + ३$$

$$+२० + १६ + १२ + ८ + ४$$


---

$$\text{गुणनफल} = +१० + २३ + ३८ + २६ + २० + ११ + ४$$

इस में य का घात पूर्व युक्ति से लगा देने से

$$\text{गुणनफल} = १०य^३ + २३य^२ + ३८य^१ + २६य^० + २०य^२ + ११य + ४$$

इसी प्रकार  $२य^३ - य^२ + २$ ,  $य^३ - ३य + १$  इस गुणय,

गुणक को प्रक्रम ३ से घात क्रम से लिखने से

$$\text{गुणय} = २य^३ + ०य^२ - य^१ + ०य + २$$

$$\text{गुणक} = य^३ + ०य^२ - ३य + १$$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्क लेने से

$$\text{गुणय} = +२ + ० - १ + ० + २$$

$$\text{गुणक} = +१ + ० - ३ + १$$


---

$$+२ + ० - १ + ० + २$$

$$+० + ० - ० + ० + ०$$

$$-६ - ० + ३ - ० - ६$$

$$+२ + ० - १ + ० + २$$


---

$$+२ + ० - ७ + २ + ५ - १ - ६ + २$$

$$\therefore \text{गुणनफल} = २य^३ + ०य^२ - ७य^१ + २य^० + ५य^३ - य^२ - ६य + २$$

$$= २य^३ - ७य^२ + २य^१ + ५य^० - य^२ - ६य + २।$$

इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जानना चाहिए ।

६—भाज्य और भाजक को भी पूर्व युक्ति से घातक्रम में रहने से फिर चिन्ह सहित उनके गुणकाङ्कों पर से लाघव से लब्धि निकलती है, जैसे

$$\text{भाज्य} = ८५^२ - २७$$

$$\text{भाजक} = २५ - ३$$

यहाँ भाजक में तो अव्यक्त के घातक्रम ही से पद हैं, केवल भाज्य में पदों को घातक्रम से लिखने से

$$\text{भाज्य} = ८५^२ + ०५^२ + ०५ - २७ \quad | \quad \text{भाजक} = २५ - ३$$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों को लेने से

$$\begin{array}{r|l} +२-३ & +८+०+०-२७ \\ & +८-१२ \\ \hline & +१२+०-२७ \\ & +१२+१८ \\ \hline & +१८-२७ \\ & +१८-२७ \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad +४+६+६ \right.$$

भाज्य और भाजक के सब से बड़े घातों के अन्तर तुल्य अव्यक्त के घात को लेकर ऊपर लब्धि के अङ्कों में यथाक्रम लगा देने से

$$\text{लब्धि} = ४५^२ + ६५ + ६।$$

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

यहां यदि शेष बचता तो अन्त के शेष में अव्यक्त का शून्य घात, उपान्तिम में एक घात इत्यादि लगाकर ठीक शेष बना लिया जाता।

७—अकरणीगत अभिन्नफल—जिस अव्यक्तराशि में अव्यक्त के सब घात अभिन्न और धन हों तो उसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहते हैं, जैसे यदि

$$p_0 p_n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + p_3 y^{n-3} + \dots + p_n$$

इस अव्यक्तराशि में न धन और अभिन्न हो तो इसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहेंगे। यहां

$$f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + p_3 y^{n-3} + \dots + p_n$$

इस में यदि  $y = a$  तो

$$f(a) = p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \dots + p_n$$

नीचे लिखी हुई क्रिया से  $f(y)$  का मान लाघव से जान सकते हो, जैसे मानलो कि

$$f(a) = p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a + p_3$$

यहाँ पहले

$p_0 a$  इसका मान निकालो

इसमें  $p_1$  जोड़ने से  $p_0 a + p_1$  हुआ

इसे  $a$  से गुण देने से  $p_0 a^2 + p_1 a$  हुआ

इसमें  $p_2$  जोड़ देने से  $p_0 a^2 + p_1 a + p_2$  हुआ

इसे  $a$  से गुण देने से  $p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a$  हुआ

इसमें  $p_3$  जोड़ देने से  $p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a + p_3$  हुआ जो कि  $f(a)$  के समान है।

इस प्रकार किसी अव्यक्तराशि में यदि अव्यक्त के स्थान में किसी व्यक्ताङ्क का उत्थापन देना हो तो लाघव से मान आ सकता है।

इस क्रिया को न्यास सहित नीचे लिखे हुए प्रकार से करते हैं।

$$\begin{array}{ccccccc} +p_0 & +p_1 & +p_2 & +p_3 & & & \\ & p_0 a & p_0 a^2 + p_1 a & p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a & & & \end{array}$$

---


$$p_0 a + p_1, \quad p_0 a^2 + p_1 a + p_2, \quad p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a + p_3$$

पहली पंक्ति में चिन्ह समेत घातक्रम से जो पद हैं वे उनके गुणकाङ्क हैं। पहले गुणकाङ्क को अव्यक्त के व्यक्ताङ्क अ से गुण दूसरे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है। इस जोड़े हुए फल को अ से गुण तीसरे गुणक में जोड़ दिया है, फिर इस जोड़े हुए फल को अ से गुण चौथे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है, इस प्रकार अन्त में फ (अ) का मान बड़े लाघव से निकल आया है।

जैसे  $२५^४ - ३५^३ - ४५ + ५$  इसमें यदि  $५=२$  तो इसका क्या मान होगा यह जानना हो तो ऊपर के प्रकार से अव्यक्तराशि के पदों को घातक्रम से रखने से

+२	-३	+०	-४	+५
	+४	+२	×४	+०
<hr/>				
	+१	+२	+०	+५

इस लिये अव्यक्तराशि का मान ५ हुआ।

द—अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) यह य के स्थान में अ का उत्थापन देने से शून्य हो जाय अर्थात् यदि  $फ (अ) = ०$  तो  $फ (य)$  यह  $५-अ$  इससे अवश्य निःशेष होगा। कल्पना करो कि फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से  $५-अ$  का भाग देने से लब्धि ल और यदि संभव हो तो शेष शेष है तो

$फ (य) = ल (५-अ) + शेष$  यह एक सरूप समीकरण होगा; इसमें स्पष्ट है कि ल भी अव्यक्त का कोई अकरणीगत अभिन्नफल होगा। इसमें य के स्थान में अ का उत्थापन देने से यह अनन्त के तुल्य न होगा; इसलिये ऊपर के सरूप समीकरण में  $५=अ$  मानने से

**फ (अ) = ० = ल (अ-अ) + शे = शे**

इसलिये शेष का मान शून्य होने से फ (य), य से निःशेष होता है।

## અથવા જબ

और 
$$f_n(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n$$

$$f(x) = 0 = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$$

## इसलिये

$$\begin{aligned}
 & \text{फ (य) — फ (अ) = फ (य) = प. (यन् - अन्) + [प. (यन् - १ - अन् - १) + \dots \dots \dots प. (य - अ)] \text{ यहाँ बीजगणित से} \\
 & \text{स्पष्ट है कि यन् - अन्, यन् - १ - अन् - १, इत्यादि सब य - अ} \\
 & \text{इससे निःशेष होते हैं इसलिये फ (य) भी य - अ से निःशेष} \\
 & \text{होगा।}
 \end{aligned}$$

बीजगणित की साधारण रीति से यहाँ

[illegible]

समान घातों के गुणकों को इकट्ठा करने से

$$\text{लब्धि} = \text{प. य}^{n-1} + (\text{प. अ} + \text{प. र.}) \text{ य}^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
 & + (p_0 a^2 + p_1 a + p_2) y^{n-1} + \dots \\
 & + p_0 a^{n-1} + p_1 a^{n-2} + p_2 a^{n-3} + p_{n-1} \\
 & = v_0 y^{n-1} + v_1 y^{n-2} + v_2 y^{n-3} + \dots + v_{n-2} y + \\
 & \qquad \qquad \qquad v_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{यदि } v_0 = p_0, \quad v_1 = p_0 a + p_1, \quad v_2 = p_0 a^2 + p_1 a + p_2, \dots$$

अर्थात् उपर्युक्त श्रेढी के जिस संख्यक पद के गुणक को जानना हो तो उसके पिछले पद के गुणक को अ से गुण कर उसमें फ (य) के उसी संख्यक पद का गुणक जोड़ देने से अभीष्ट गुणक उत्पन्न हो जाता है। ये गुणक ७वें प्रक्रम से भी आ जाते हैं।

६—य के अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) में य-ग का भाग देने से मान लो कि लब्धि=ज और शेष=शे तो

फ (य) = ल (य-ग) + शे। इस सरूप समीकरण में यदि य=ग तो फ (ग) = शे, इस लिये यदि फ (य) में य-ग का भाग दिया जाय तो शेष=फ (ग) और लब्धि भी ८वें प्रक्रम से सहज में आ जायगी।

जैसे यदि  $2y^3 - 3y^2 - 4y + 5$  इसमें यदि य-२ का भाग दिया तो लब्धि  $= 2y^1 + y^2 + 1y + 0$  और शेष होगा (७वाँ प्रक्रम देखो)। अथवा यदि  $2y - 3y^2 - 4y + 5$  भाज्य राशि में य-३ का भाग दिया तो ७वें प्रक्रम की युक्ति से

+ २	+ ०	- ३	+ ०	- ४	+ ५
	+ ६	+ १८	+ ४५	+ १३५	+ ३६३
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>					
	+ ६	+ १५	+ ४५	+ १३१	+ ३६८



इसलिये लब्धि =  $२य^० + ६य^१ + १५य^२ + ४५य + १३१$ ,

शे = ३६८

१०—उत्पन्न फल—मान लो कि फ (य) एक अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है।

यदि स = फ (य)

स' = फ (य + च)

तो स' - स = फ (य + च) - फ (य)

और  $\frac{स' - स}{च} = \frac{फ(य + च) - फ(य)}{च}$

= आ + का च + खा च<sup>२</sup> + ...

जहाँ च की अपेक्षा आ स्वतन्त्र है अर्थात् आ में च नहीं है तब आ को फ (य) का प्रथमोत्पन्न फल कहते हैं। इसे यदि फा (य) कहो तो फ (य) के स्थान में फा (य) को रखने से ऊपर की युक्ति से फा (य) का प्रथमोत्पन्न फल एक आ, उत्पन्न होगा। इसे फ (य) का द्वितीयोत्पन्न फल कहते हैं। इस प्रकार फ (य) का प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि यथैच्छ फल उत्पन्न कर सकते हो। इन्हें क्रम से फ' (य), फ'' (य), फ''' (य) फ<sup>४</sup> (य), फ<sup>५</sup> (य), ... फ<sup>n</sup> (य), इत्यादि सङ्केत से प्रकाश करते हैं।

११—कल्पना करो कि

फ (य) =  $अ_० + अ_१य + अ_२य^२ + अ_३य^३ + \dots + अ_nय^n \dots (१)$

जहाँ य का उत्तरोत्तर एक एक बढ़ा हुआ घात प्रत्येक पद में है। इसमें यदि य = ० तो अ<sub>०</sub> = फ (०) और फ (य + च) = अ<sub>०</sub> +

$$\text{अ}_1(y + \text{च}) + \text{अ}_2(y + \text{च})^2 + \dots + \text{अ}_n(y + \text{च})^n \text{ इसलिये}$$

$$\text{फ}(y + \text{च}) - \text{फ}(y)$$

$$= \text{अ}_1 [(y + \text{च}) - y] + \text{अ}_2 [(y + \text{च})^2 - y^2] +$$

$$\text{यहाँ र संख्यक पद} = \text{अ}_r [(y + \text{च})^r - y^r]$$

$$= \text{अ}_r \left[ ry^{r-1}\text{च} + r \frac{(r-1)}{2!} y^{r-2} \text{च}^2 + \dots \right]$$

$$\text{इसलिये फ}(y + \text{च}) - \text{फ}(y)$$

$$= \text{अ}_1 + 2\text{अ}_2 y + 3\text{अ}_3 y^2 + \dots + n \text{अ}_n y^{n-1}$$

+ ऐसे पद जिनमें च आता है

इस लिये १० वें प्रक्रम से

$\text{फ}'(y) = \text{अ}_1 + 2\text{अ}_2 y + 3\text{अ}_3 y^2 + \dots + n \text{अ}_n y^{n-1}$  जिसके देखने से  $\text{फ}(y)$  से  $\text{फ}'(y)$  का मान निकालने की सहज विधि यह उत्पन्न होती है कि  $\text{फ}(y)$  के प्रत्येक पद को उसी पद में आए हुए  $y$  के घात से गुण दो और  $y$  के घात में से एक घटा दो तो  $\text{फ}'(y)$  का मान आ जायगा। इसी प्रकार  $\text{फ}'(y)$  से  $\text{फ}''(y)$  का मान,  $\text{फ}''(y)$  से  $\text{फ}'''(y)$  इत्यादि के मान जान सकते हो।

इसलिये उपर्युक्त विधि से

$$\text{फ}''(y) = 2\text{अ}_2 + 2 \cdot 3\text{अ}_3 y + 3 \cdot 4\text{अ}_4 y^2 + \dots$$

$$\text{फ}'''(y) = 3 \cdot 2\text{अ}_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2\text{अ}_4 y + \dots$$

$$\text{इनमें यदि } y=0 \text{ तो } \text{फ}'(0) = \text{अ}_1, \text{फ}''(0) = 2\text{अ}_2$$

$$\text{फ}'''(0) = 3 \cdot 2\text{अ}_3, \dots$$

इनका उत्थापन (१) में देने से

$$f(y) = f(0) + f'(0)y + f''(0)\frac{y^2}{1.2} + f'''(0)\frac{y^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots + f^{(n)}(0)\frac{y^n}{1.2.3\dots n} + \dots$$

इसमें यदि  $y$  के स्थानमें  $y+r$  का उत्थापन दो तो

$$f(y+r) = f(0) + f'(0)y + f(0)\frac{(y+r)^2}{1.2}$$

$$+ f''\frac{(y+r)^3}{1.2.3} + \dots$$

$$= f(0) + f'(0)y + f(0)\frac{y^2}{1.2} + f''(0)\frac{y^3}{1.2.3} + \dots$$

$$+ \left\{ f(0) + f''(0)y + \dots + f^{(n)}(0)\frac{y^{n-1}}{1.2\dots n} \right\} r$$

$$+ \left\{ f''(0) + f'''(0)y + \dots + f^{(n)}(0)\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \right\} \frac{r^2}{1.2}$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$f(y) + f'(y)r + f''(y)\frac{r^2}{1.2} + \dots + f^{(n)}(y)\frac{r^n}{n!}$$

१२—अथवा नीचे लिखी हुई विधि के भी  $f(y+r)$  का मान जान सकते हो।

कल्पना करो कि

$$f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n$$



इसमें प्रथम पंक्ति में तो स्पष्ट है कि  $f(y)$  है और द्वितीय, तृतीय इत्यादि पंक्तिओं में क्रम से  $r, \frac{r^2}{1 \cdot 2}$  इत्यादि के गुणक ११वें प्रक्रम से  $f'(y), f''(y)$  इत्यादि सिद्ध हैं;

$$\text{इसलिये } f(y+r) = f(y) + r f'(y) + \frac{r^2}{1 \cdot 2} f''(y) + \dots + \frac{r^n}{n!} f^{(n)}(y)$$

जैसे यदि  $f(y) = p_0 y^4 + p_1 y^3 + p_2 y^2 + p_3 y + p_4$

तो ११वें प्रक्रम से

$$f'(y) = 4p_0 y^3 + 3p_1 y^2 + 2p_2 y + p_3$$

$$f''(y) = 3 \cdot 4p_0 y^2 + 2 \cdot 3p_1 y + 2p_2$$

$$f'''(y) = 2 \cdot 3 \cdot 4p_0 y + 2 \cdot 3p_1$$

$$f^{(4)}(y) = 2 \cdot 3 \cdot 4p_0$$

इसलिये

$$\begin{aligned} f(y+r) &= f(y) + r \left\{ 4p_0 y^3 + 3p_1 y^2 + 2p_2 y + p_3 \right\} \\ &+ \frac{r^2}{1 \cdot 2} \left\{ 3 \cdot 4p_0 y^2 + 2 \cdot 3p_1 y + 2p_2 \right\} \\ &+ \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ 2 \cdot 3 \cdot 4p_0 y + 2 \cdot 3p_1 \right\} \\ &+ \frac{r^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ 2 \cdot 3 \cdot 4p_0 \right\} \end{aligned}$$

और यदि  $f(y) = p(y+n)^n$

तो ११व प्रक्रम से

$$f'(y) = n p (y+g)^{n-1}$$

$$f''(y) = n(n-1) p (y+g)^{n-2}$$

$$f'''(y) = n(n-1)(n-2) p (y+g)^{n-3}$$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए ।

फिर इन पर से  $f(y+r)$  का मान पूर्व विधि से निकाल सकते हो ।

$$f(y+r) = f(y) + r f'(y) + \frac{r^2}{2} f''(y) + \dots$$

इस पर से ११वें प्रक्रम की युक्ति से

$$f''(y+r) = f''(y) + r f'''(y) + \frac{r^2}{2} f^{(4)}(y) + \dots$$

$$+ \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(y)$$

$$f'(y+r) = f'(y) + r f''(y) + \frac{r^2}{2} f^{(3)}(y) + \dots$$

$$+ \frac{r^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(y)$$

इत्यादि सिद्ध कर सकते हो ।

१३— $r$  के अपचय घात क्रम से  $f(y+r)$  का मान

$f(y+r)$  का मान जो १२वें प्रक्रम में श्रेढी में आया है उसमें यदि  $r$  को अपचय घातक्रम से लिखें तो



मान लो कि कोई त संख्यक पद  $p_{t-1} y^{n-t-1}$  है जिसमें  $p_{t-1}$  शून्य नहीं है और इसके आगे के जो  $p_t y^{n-t}$ ,  $p_{t+1} y^{n-t-1}$  इत्यादि पद हैं उनमें सब से बड़ा संख्यात्मक गुणक व है तो स्पष्ट है कि आगे के सब पदों का योग  $v (y^{n-t} + y^{n-t-1} + \dots + y + 1) = v \frac{y^{n-t+1} - 1}{y - 1}$

इससे छोटा होगा। त संख्यक पद में इससे भाग देने से

$$\text{लब्धि} = \frac{p_{t-1} (y-1) y^{n-t+1}}{v (y^{n-t+1} - 1)} = \frac{p_{t-1} (y-1)}{v - v y^{-(n-t-1)}}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढ़ता जायगा त्यों त्यों अंश बढ़ता और हर व के तुल्य होता जायगा। इसलिये य का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके कारण लब्धि चाहे जितनी बड़ी हो सकती है। इस पर से पहली बात सिद्ध हुई।

दूसरी के लिये कल्पना करो कि  $y = \frac{1}{r}$  तो

$$P(y) = r^{-n} (p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n)$$

अब ऊपर की युक्ति से  $p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots$  इसमें र का ऐसा बड़ा वा य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पद अपने पिछले सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है। अर्थात्

$$p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_{t-1} r^{t-1} < p_t r^t$$

$$\text{वा } p_0 r^{-n} + p_1 r^{1-n} + p_2 r^{2-n} + \dots + p_{t-1} r^{t-1-n} < p_t r^{t-n}$$

$$\text{वा } p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{t-1} y^{n-t+1} < p_t y^{n-t}$$



अर्थात् य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पञ्चम-त पद अपने पिछले सब पदों के योग से बड़ा हो सकता है, यह सिद्ध हुआ। यह सिद्धान्त बहुत ही उपयोगी है। इसे अच्छी तरह से अभ्यास करना चाहिए।

### १५—असम्भव संख्या और मध्यगुणक—

$a + \sqrt{b-1}$  इसे असम्भव संख्या कहते हैं जिसमें  $a$  और  $b$  सम्भाव्य संख्या है। जहाँ कहाँ इस ग्रन्थ में असम्भव संख्या आवे वहाँ सर्वत्र  $a + b\sqrt{-1}$  यही समझना चाहिए।

बीजगणित के जिन नियमों से सम्भव संख्या के जोड़, बाकी, गुणा और भाग किए जाते हैं उन्हीं नियमों से असम्भव संख्याओं के जोड़, बाकी इत्यादि किए जाते हैं। सम्भव और असम्भव संख्याओं में प्रयोग किए जाने पर ये परिकर्म केवल सम्भव और असम्भव संख्याओं को उत्पन्न करते हैं और यही बात बीजगणित के मूलानयन में भी सत्य उहरती है।

$a^2 + b^2$  इसके धनात्मक मूल दो  $a + b\sqrt{-1}$  और  $a - b\sqrt{-1}$  इन असम्भवों में से प्रत्येक का मध्यगुणक कहते हैं।

$a + b\sqrt{-1}$  और  $a' + b'\sqrt{-1}$  का घात बीजगणित की रीति से

$(a - b'k) + (a'k + b')\sqrt{-1}$  है इसलिये इस असम्भव का मध्यगुणक पूर्व परिभाषा से  $(a - b'k)^2 + (a'k + b')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$  इसका धनात्मक मूल होगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि दो असम्भवों

के घात तुल्य असम्भव का मध्यगुणक पूर्व दोनों असम्भवों के मध्यगुणकों के घात तुल्य होता है।

$a + k\sqrt{-1}$  इस में यदि साथ ही  $a=0$  और  $-1=0$  तो असम्भव को शून्य के तुल्य कहते हैं। ऐसी दशा में असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होता है।

यदि दो असम्भवों का घात शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि घात रूप असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होगा और पूर्व असम्भवों में से एक का मध्यगुणक भी अवश्य शून्य के तुल्य होगा। इसी प्रकार अनेक असम्भवों के घात रूप असम्भव का मध्यगुणक यदि शून्य हो अर्थात् नष्ट हो तो उन असम्भवों में से कम से कम एक का मध्यगुणक अवश्य शून्य के समान होगा।

१६—असम्भव का मूल—बीजगणित से स्पष्ट है कि यदि  $m$  धन और अभिन्न संख्या हो तो

$$(\sqrt{-1})^{2m+1} = +\sqrt{-1} \text{ और } (\sqrt{-1})^{2m-1} = -\sqrt{-1}$$

$$\text{और } (a + k\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \text{ जहाँ } a = k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{इसलिये } a + k\sqrt{-1} = \pm \sqrt{\sqrt{-1}}$$

$$\text{और } (a' + k'\sqrt{-1})^2 = a + k\sqrt{-1}$$

$$\text{जहाँ } a'^2 - k'^2 = a, \text{ और } k' = k$$

$$(a' + k'\sqrt{-1}) = \sqrt{a + k\sqrt{-1}}$$

इस प्रकार से कह सकते हो कि किसी असम्भव का मूल भी एक असम्भव ही होता है।

भास्कराचार्य ने भी अपने बीजगणित में लिखा है कि “न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्” अर्थात् ऋण संख्या का मूल सम्भव संख्या नहीं हो सकती क्योंकि ऋण संख्या किसी सम्भव संख्या का वर्ग नहीं है। इसी प्रकार यदि न अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से स्पष्ट है कि  $(अ + क\sqrt{-१})^n$  इसमें बहुत से पद सम्भव और बहुत से ऐसे होंगे जिनके गुणक  $\sqrt{-१}$  होंगे। इसलिये सम्भव और जिनके गुणक  $\sqrt{-१}$  हैं उनको अलग अलग इकट्ठा करने से  $(अ + क\sqrt{-१})^n = अ' + क'\sqrt{-१}$  ऐसा होगा। इसमें यदि क के स्थान में  $-क$  का ब्थापन दें तो स्पष्ट है कि जिन जिन पदों का गुणक  $\sqrt{-१}$  है उनके धन, ऋण का व्यत्यास हो जायगा इसलिये  $(अ - क\sqrt{-१})^n = अ' - क'\sqrt{-१}$  ऐसा होगा।

१७—च के परिवर्तन से फ (ग + च) के मान का परिवर्तन। पूर्व सिद्ध है कि

$$फ (य + र) = फ (य) + र फ' (य) + \frac{र^२}{१.२} फ'' (य) + \dots$$

इसमें यदि य = ग और र = च तो

$$फ (ग + च) = फ (ग) + च फ' (ग) + \frac{च^२}{१.२} फ'' (ग) + \dots + \frac{च^n}{n!} फ^n (ग)$$

इसमें च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश

च  $f'(g)$ ;  $\frac{च^२}{१.२} f''(g)$ ,  $\frac{च^३}{१.२.३} f'''(g)$ ,..... इस श्रेणी

का वह प्रथम पद जो शून्य के तुल्य न हो और सब पदों के योग से यथेच्छ बड़ा हो सकता है और स्वयं बहुत ही छोटा हो सकता है (१४ वाँ प्रक्रम देखो) ।

इस लिये च के परिवर्तन से  $f(g+च)$  को  $f(g)$  के चाहे जितना आसन्न बना सकते हैं । इससे स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों ग बढ़ता है त्यों त्यों  $f(g)$  लगातार बढ़ता है । ध्यान देने की बात है कि यहाँ यह नहीं सिद्ध किया गया है कि ज्यों ज्यों ग बढ़ता है त्यों त्यों  $f(g)$  भी बढ़ता है ।  $f(g)$  चाहे बढ़ वा घट सकता है वा कभी बढ़ और कभी घट सकता है । उपरोक्त बातों से केवल यही सिद्ध होता है कि  $f(g)$  का मान अवच्छिन्न घट या बढ़ नहीं सकता । इसी प्रकार च का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके वश च  $f(g)$ ,  $\frac{च^२}{१.२}$

$f''(g)$ ,  $\frac{च^३}{१.२.३} f'''(g)$ ,.....  $\frac{च^n}{n!} f^n(g)$  इस श्रेणी का घट अन्तिम पद जो शून्य के तुल्य न हो, और सब पिछले पदों के योग से बहुत बड़ा और स्वयं भी बहुत बड़ा हो सकता है ।

इसलिये च के परिवर्तन से  $f(g+च)$  का मान  $f(g)$  से बहुत बड़ा हो सकता है । इस पर से सिद्ध होता है कि च के परिवर्तन से  $f(g+च)$  का मान चाहे जितना घटा बढ़ा सकते हैं ।

१८—समीकरण का मूल—यदि  $y$  के स्थान में  $अ$  का उत्थापन देने से  $फ (y) = 0$  हो तो  $फ (y) = 0$  इस समीकरण का एक मूल  $अ$  कहा जाता है ।

२ प्रक्रम से  $फ (y)$  नाना प्रकार का हो सकता है परन्तु अभी इस ग्रन्थ में जब तक इसके विरुद्ध बात न कही जाय तब तक  $फ (y)$  से सर्वदा अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्न फल समझना चाहिए (७वाँ प्रक्रम देखो) और लाघव के लिये प्रायः  $फ (y)$  में  $y$  के सब से बड़े घातका जो गुणक हो उससे और घातों के गुणकों में भाग देकर लब्धियों को और घातों का गुणक जानना चाहिए ।

जैसे यदि  $फ (y) = 0 = अy^n + कy^{n-1} + खy^{n-2} + \dots$

तो  $अ$  का भाग देने से

$$y^n + \frac{क}{अ} y^{n-1} + \frac{ख}{अ} y^{n-2} + \dots = y^n + अ_1 y^{n-1} +$$

$$अ_2 y^{n-2} + \dots = 0$$

ऐसा सोधा स्वरूप बना लेना चाहिए । यहाँ  $\frac{क}{अ} = अ_1, \frac{ख}{अ} = अ_2$  इत्यादि ।

१९— $फ (y)$  में  $y$  के स्थान में  $अ$  और  $क$  का उत्थापन देने से यदि  $फ (अ)$  और  $फ (क)$  विरुद्ध चिन्ह के हों तो  $अ$  और  $क$  के बीच  $y$  का कम से कम एक ऐसा मान अवश्य होगा जिसके वश  $फ (y) = 0$  होगा । क्योंकि यदि  $अ$  से  $क$  को बड़ा मानो तो  $अ$  से आगे ज्यों ज्यों  $y$  का मान बढ़ाते जायेंगे त्यों त्यों लगातार  $फ (y)$  बदलता जायगा । इस

लिये फ (अ) और फ (क) के अन्तर्गत सब मानों को फ (य) ग्रहण करता जायगा क्योंकि फ (अ) और फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये अ के आगे और क के पीछे य का कम से कम एक मान अवश्य ऐसा होगा जिसके वश फ (य) = ० हो।

जब अ से आगे य को बढ़ाते जाओगे तब संभव है कि फ (य) कुछ दूर तक घटता वा बढ़ता जावे फिर आगे शून्य होकर बढ़ता वा घटता जावे आगे फिर भी घटता वा बढ़ता कहीं शून्य होकर फिर आगे और घटता वा बढ़ता जावे। इसलिये यह नहीं कह सकते कि अ और क के बीच कोई य का एक ही मान ऐसा होगा जिसके वश से फ (य) = ० हो और यह भी नहीं कह सकते कि यदि फ (अ) और फ (क) एक ही चिन्ह अर्थात् एक ही जाति के हों तो अ और क के बीच य का मान ऐसा नहीं हो सकता जिसके वश से फ (य) = ० हो।

$$\text{जैसे यदि फ (य) = } y^3 - 16y^2 + 100y - 120$$

$$\text{इसमें यदि य = १ तो फ (१) = -६०}$$

$$\text{और यदि य = ११ तो फ (११) = +४०}$$

यहां फ (१) और फ (११) विरुद्ध चिन्ह के अर्थात् विजातीय है और १ और ११ के बीच १, ५, १० य के ऐसे तीन मान हैं फ (य) शून्य के तुल्य होता है। इसलिये यह नहीं कह सकते कि य के एक ही मान में फ (य) = ० होगा।

इसी प्रकार य = ४ और य = ११ में फ (य) = + १२ और फ (य) = + ४० ये दोनों एक ही जाति के हैं परन्तु ४ और ११ के बीच य के ६ और १० ऐसे दो मान हैं जिनके वश फ (य)

शून्य के समान होता है। इसलिये यहाँ पर यही सिद्धान्त कर सकते हैं कि  $f(y)=0$  इस समीकरण में  $y$  के स्थान में  $a$ ,  $k$  का उत्पादन देने से यदि  $f(a)$ ,  $f(k)$  विरुद्ध चिन्ह के हों तो  $f(y)=0$  का कम से कम एक मूल अवश्य  $a$  और  $k$  के बीच में होगा।

२०—यदि  $f(y)=0$  इस समीकरण में  $f(y)$ ,  $y-a$  इससे भाग देने में निःशेष हो जाय तो  $y$  का एक मान  $a$  होगा।

मान लो कि भाग देने से लब्धि= $l$  तो  $f(y)=l(y-a)$

इसमें यदि  $y=a$  तो  $f(y)=f(a)=l(a-a)=0$

इसलिये  $y$  का एक मान १<sup>वें</sup> प्रक्रम से  $a$  हुआ।

यहां स्पष्ट है कि  $l$ , अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है। इसलिये इसमें  $a$  का उत्पादन देने से फल अनन्त के तुल्य नहीं हो सकता क्योंकि  $a$  एक ऐसी संख्या है जो अनन्त के तुल्य नहीं मानी गई है।

२१—जिस विषमघात समीकरण में जो कि  $f(y)=0$  ऐसा है और जहाँ  $y$  के सब से बड़े घात के पद के गुणक से भाग देकर समीकरण को छोटा कर लिया है वहाँ यदि अन्तिम पद जिसमें  $y$  का कोई घात नहीं है वह धन हो तो  $f(y)=0$  इसका एक मूल अवश्य ऋण होगा और यदि ऋण हो तो धन होगा।

जैसे  $f(y)=y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$  इसमें मानो कि  $n$  विषम है। इसलिये  $f(y)=y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$

इसमें १४वें प्रक्रम से  $y$  का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिससे  $y^n$  यह और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये  $y$  के एक ऋण और एक धन मान में  $f(y)$  के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे और  $f(y)=0$  इसका कम से कम एक मूल  $y$ , सम्भाव्य संख्या के तुल्य उन  $y$  के मानों के बीच होगा (१६वाँ प्रक्रम देखो)।

यहाँ स्पष्ट है कि यदि  $y=0$  तो  $f(y)=y^n$  इसलिये यदि  $p_n$  यह धन हो तो  $y$ , ऋण और ऋण हो ता  $y$ , धन होगा।

$$22-f(y) = 0 = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n$$

इसमें यदि  $n$  सम हो और अन्तिम पद  $p_n$  यह ऋण हो तो कम से कम  $y$  के दो सम्भाव्य मान आवेंगे जो परस्पर विरुद्ध चिन्ह के होंगे। क्योंकि यदि  $y=0$  तो  $f(y)=p_n$  अर्थात् ऋण होगा और १४वें प्रक्रम से  $y$  का एक ऐसा मान हो सकता है जिससे  $y^n$  और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये  $f(y)$  का वही चिन्ह रहेगा जो  $y^n$  का है परन्तु चाहे  $y$  का वह मान धन वा ऋण हो  $y^n$  सर्वदा धन ही रहेगा क्योंकि  $n$  सम माना गया है। इसलिये  $y$  के शून्य और एक ऋण मान में वा शून्य और एक धन मान में  $f(y)$  के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये कम से कम  $y$  के एक ऋण और एक धन मान में  $f(y)$  अवश्य शून्य के तुल्य होगा (१६वाँ प्रक्रम देखो)।



$$२३—फ (य) = ० = प_० य^n + प_१ य^{n-१} + \dots + प_t य^{n-t} + \dots + प_n$$

इसमें यदि आदि पद से लेकर  $t+१$  पद तक प्रत्येक पद के गुणक  $प_०, प_१$  इत्यादि एक चिन्ह के और अवशिष्ट पदों के प्रत्येक गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो  $फ (य) = ०$  इसका सम्भाव्य धन मूल एक ही होगा।

यहाँ २१ वें और २२ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि कम से कम य का एक सम्भाव्य धन मान अवश्य होगा। अब इतना और दिखा देना है कि वही एक धन मान होगा दूसरा धन मान नहीं हो सकता।

मान लो कि  $प_०, प_१, प_२, \dots, प_t$  सब धन हैं और

$$प_{t+१} = -प'_{t+१}, प_{n+२} = -प'_{t+२}, \dots, प_n = -प'_{n-t}$$

$$फ (य) = प_० य^n + प_१ य^{n-१} + \dots + प_t य^{n-t} + \dots + प_n$$

$$= य^{n-t} \left\{ (प_० य^t + प_१ य^{t-१} + \dots + प_t) - \left( \frac{प'_{t+१}}{य} + \frac{प'_{t+२}}{य^२} + \dots + \frac{प'_{n-t}}{य^{n-t}} \right) \right\}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढ़ेगा त्यों त्यों धनात्मक खण्ड बढ़ेगा और ऋणात्मक खण्ड घटेगा; इसलिये जिस य के एक धन मान में दोनों खण्ड तुल्य होकर  $फ (य)$  को शून्य के तुल्य बनावेंगे उससे ज्यों ज्यों अधिक य होता जायगा त्यों त्यों धनात्मक खण्ड अधिक और उससे अल्प ऋणात्मक खण्ड

होता जायगा। इसलिये अब आगे य के किसी धन मान में ऐसा नहीं हो सकता कि दोनों खण्ड तुल्य होकर फिर फ (य) को शून्य के तुल्य बनावें। इसलिये फ (य) = ० इसका एक ही धन मूल होगा। दूसरा धन मूल नहीं हो सकता।

यहाँ पर यह कहा जा सकता है कि ऐसी दशा में फ (य) = ० का कोई ऋण मूल नहीं है क्योंकि ऊपर की युक्ति से इतना ही सिद्ध हुआ है कि ऐसे समीकरण में फ (य) = ० का धन मूल एक ही आवेगा।

२४—एकवर्णसमीकरण के मूलों की संख्या अव्यक्त के सब से बड़े घात के तुल्य होती है।

माल लो कि य - अ<sub>१</sub>, य - अ<sub>२</sub>, य - अ<sub>३</sub>, ... य - अ<sub>न</sub> ये न युग्म पद हैं, इनमें अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub> इत्यादि सम्भाव्य वा असम्भव संख्या य से स्वतन्त्र है अर्थात् इनमें य का कोई घात नहीं है तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$\begin{aligned}
 (य - अ_१) (य - अ_२) &= य^२ - (अ_१ + अ_२) य + अ_१ अ_२ \\
 (य - अ_१) (य - अ_२) (य - अ_३) &= य^३ - (अ_१ + अ_२ + अ_३) य^२ \\
 &\quad + (अ_१ अ_२ + अ_२ अ_३ + अ_१ अ_३) य \\
 &\quad - अ_१ अ_२ अ_३ \\
 (य - अ_१) (य - अ_२) (य - अ_३) (य - अ_४) &= य^४ - (अ_१ + अ_२ \\
 &\quad + अ_३ + अ_४) य^३ \\
 &\quad + (अ_१ अ_२ + अ_१ अ_३ + अ_१ अ_४ + अ_२ अ_३ + अ_२ अ_४ + अ_३ अ_४) य^२ \\
 &\quad - (अ_१ अ_२ अ_३ + अ_१ अ_२ अ_४ + अ_१ अ_३ अ_४ + अ_२ अ_३ अ_४) य \\
 &\quad + अ_१ अ_२ अ_३ अ_४
 \end{aligned}$$

इस प्रकार से आगे भी गुणनफल को बढ़ाने से स्पष्ट होता है कि  $y - अ_1, y - अ_2$  इत्यादि जितने खण्ड होते हैं उनके गुणनफल में प्रथम पद में उतना ही घात  $y$  का होता है और अन्य पदों में एक एक उतरता हुआ  $y$  का घात रहता है। इसलिये यदि

$f(y) = 0 = y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$  ऐसा हो तो न तुल्य गुण्यगुणकरूप अवयव में इसका रूपान्तर कर सकते हैं अर्थात्

$$f(y) = 0 = (y - अ_1)(y - अ_2) \dots (y - अ_n)$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि  $y = अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_n$  तो

$f(y) = 0$ । इसलिये  $अ_1, अ_2, \dots, अ_n$  इत्यादि  $f(y) = 0$  इस समीकरण के मूल हुए।

इससे सिद्ध होता है कि  $f(y) = 0$  इसमें  $y$  के सब से बड़े घात की जो संख्या हो उतने ही मूल आचेंगे जिसके वश से  $f(y)$  शून्य के तुल्य होगा।

**२५—प्रसिद्धार्थ—**इस प्रक्रम में समीकरणों के विषय में कुछ प्रसिद्धार्थ लिखते हैं जो पिछले प्रक्रमों की युक्ति से बहुत ही स्पष्ट हैं।

(१) यदि  $f(y)$  में प्रत्येक पद के गुणक धन हों तो  $f(y) = 0$  इसका धन मूल कोई नहीं होगा।

(२) यदि  $f(y)$  में  $y$  के समघात के प्रत्येक पद के गुणक एक चिन्ह के और विषम घात के प्रत्येक पद के गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो  $f(y) = 0$  इसका कोई मूल ऋण न होगा।

(३) फ (य) में यदि य के सम घात हों और प्रत्येक पद के गुणक अन्तिम पद जो य से स्वतन्त्र है लेकर एक ही चिन्ह के हों तो फ (य) = ० इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा ।

(४) फ (य) में यदि सब पदों में य का विषम घात हो और अन्तिम पद में य का एक घात रहे और सब पदों के गुणक एक ही चिन्ह के हों तो फ (य) = ० इसका एक मूल शून्य होगा और बाकी सब मूल असम्भव संख्या में आवेंगे ।

(५) फ (य) = ० इसमें जहाँ सबसे बड़े य के घात का गुणक रूप है वहाँ द्वितीय पद का गुणक य के सब मानों के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है, तृतीय पद का गुणक य के दो दो मानों के घात के योग तुल्य होता है, चतुर्थ पद का गुणक य के तीन तीन मानों के घात के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है..., इसी प्रकार आगे भी गुणक और य के मानों में परस्पर सम्बन्ध जानना चाहिए ।

### अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१—अव्यक्त राशि किसे कहते हैं ।

२—फ (य) से क्या समझते हो ।

३—गुण्य =  $y^4 - y^2 + 2$ , गुणक =  $2y^4 - 2y + 3$ । गुणनफल केवल चिन्हों और  $y^4$  इत्यादि के गुणकों को लेकर बताओ ।

४—ऊपर के प्रश्न की चाल से यदि भाज्य =  $2y^4 - 2y^2 + 4$ , भाजक =  $y^2 + 2$  तो लब्धि का मान और शेष का मान बताओ ।

५—अव्यक्त का अक्षरणीगत अभिन्नफल किसे कहते हैं ।

६—यदि  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x + 2$  तो  $f'(x)$  का क्या मान होगा ।

७—सिद्ध करो कि यदि  $f(x) = 0$  तो  $f'(x)$  अवश्य  $y - x$  से भाग लेने में निःशेष होगा ।

८— $2x^4 + 3x^3 - 4x + 2$  इसमें यदि  $y - x$  इससे भाग दिया जाय तो क्या लब्धि और शेष होंगे ।

९—यदि  $f(x) = 4x^2 - 5x^3 + 2$  तो  $f''(x)$  का क्या मान होगा ।

१०—यदि  $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$  तो सिद्ध करो कि

$$f(x+1) = f(x) + 1 f'(x) + \frac{1^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots$$

११—सिद्ध करो कि  $2x^4 - y^4 + 4x^3 + 2y^2 - 5x + 2$  इसमें  $y$  का एक ऐसा मान मान सकते हैं जिससे  $2x^4$  यह और पदों के योग से बड़ा हो सकता है या  $y$  का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश से

$$2y^2 > 2x^4 - y^4 + 4x^3$$

१२—असम्भव संख्या किसे कहते हैं ।

१३— $a + k\sqrt{-1}$ ,  $a' + k'\sqrt{-1}$  इनके घात तुल्य असम्भव में मध्यगुणक क्या होगा ।

१४— $y^6 = -\sqrt{-1}$ ,  $y^6 = +\sqrt{-1}$  इनमें  $y$  का एक मान बनाओ ।

१५—दिललाओ कि  $2y^3 + 2y^2 + 2y - 12 = 0$  इसका एक ही मूल १ और २ के बीच है ।

सिद्ध करो

१६— $2y^3 + 2y^2 + 2y + 12 = 0$  इसका कोई धन मूल न होगा ।

१७— $2y^6 - 2y^5 + 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y + 2 = 0$  इसका कोई ऋण मूल न होगा ।

१८— $y^6 + 2y^5 + 2y^4 + 2 = 0$  इसका कोई सम्भाव्य मूल न आवेगा ।

१९— $y^2 + क + ग = 0$  इसके दोनों मूल  $अ_1$  और  $अ_2$  हों तो  $अ_1 + अ_2 = -क$ ,  $अ_1 अ_2 = ग$

## २-समीकरणों के गुण

२६—समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भव मूल होते हैं—पहले २४ वें प्रक्रम में दिखा आप हैं कि  $f(y) = 0$  इस समीकरण में  $y$  के सब से बड़े घात की जो संख्या होगी उतने ही समीकरण के मूल आवेंगे, वे चाहें सम्भाव्य वा असम्भाव्य संख्या हों ।

कल्पना करो कि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्नफल  $\phi(y)$  में प्रत्येक पद का गुणक सम्भाव्य संख्या है और  $\phi(y) = 0$  इचका एक मूल असम्भव  $a + k\sqrt{-1}$  यह है तो  $y$  के स्थान में  $a + k\sqrt{-1}$  इसका उत्थापन देने से १६वें प्रक्रम से

$$\phi(y) = a' + k'\sqrt{-1} = 0 \text{ ऐसा होगा जहाँ } \cdot$$

$a' = 0$  और  $k' = 0$  होगा और यदि  $y$  के स्थान में  $a - k\sqrt{-1}$  का उत्थापन दो तो १६वें ही प्रक्रम से

$$\phi(y) = a' - k'\sqrt{-1} = 0 \text{ होगा।}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि ऐसे  $\phi(y) = 0$  में यदि एक असम्भव मूल  $a + k\sqrt{-1}$  होगा तो उसी के साथ ही दूसरा मूल  $a - k\sqrt{-1}$  यह भी होगा अर्थात् समीकरण में जोड़े जोड़े इस प्रकार के असम्भव मूल होंगे।

मानो कि  $a_1 = a + k\sqrt{-1}$  और  $a_2 = a - k\sqrt{-1}$  तो  $\phi(y)$ ,  $y - a_1$  और  $y - a_2$  इनसे निःशेष होगा अर्थात्  $(y - a_1)(y - a_2)$  इससे  $\phi(y)$  निःशेष होगा परन्तु

$$\begin{aligned} (y - a_1)(y - a_2) &= y^2 - (a_1 + a_2)y + a_1 a_2 \\ &= y^2 - 2ay + a^2 + k^2 \end{aligned}$$

इसलिये  $\phi(y)$  में  $y^2 - 2ay + a^2 + k^2$  ऐसे भी गुणक रूप खण्ड होंगे जिनमें  $a, k, k^2 + a^2$  इत्यादि सब सम्भाव्य संख्या हैं। समीकरण से सर्वदा  $\phi(y) = 0$  इस रूप

का समीकरण समझना चाहिए जो कि सब समीकरणों में एक पक्ष को दूसरे पक्ष में घटा देने से बन सकता है।

२७—समीकरण में जोड़े जोड़े करणीगत मूल होते हैं—इसी प्रकार यदि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्न-फल  $f(x)$  में सब गुणक अकरणीगत हों और  $f(x)=0$  इस समीकरण का एक मूल  $x+\sqrt{k}$  ऐसा हो जहाँ  $\sqrt{k}$  एक करण है तो एक दूसरा मूल  $x-\sqrt{k}$  ऐसा भी होगा और  $f(x)$  में गुणकरूप खण्ड

$(x-\alpha-\sqrt{k})(x-\alpha+\sqrt{k}) = (x-\alpha)^2 - k$  ऐसे भी होंगे।

२८—खण्डों की संख्या— $x-\alpha_1, x-\alpha_2$  इत्यादि को  $x$  के एक घात के खण्ड,  $x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$  इसे द्विघात के खण्ड, इसी प्रकार जिसमें  $x^3, x^4$  इत्यादि हों उन्हें क्रम से तीन, चार घात आदि के खण्ड कहें तो स्पष्ट है कि  $f(x)$  में यदि  $x$  का सबसे बड़ा घात  $n$  हो तो  $f(x)$  में गुण्यगुणकरूप एक घात के खण्ड न होंगे। दो घात के खण्ड  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ ,  $t$  घात के खण्ड  $\frac{n(n-1) \cdots (n-t+1)}{t!}$  होंगे (२४वाँ प्रक्रम देखो)।

२९—तुल्य मूल—यदि  $f(x)=0=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\dots+\dots+p_n$  इसके जो  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  मूल आवेंगे उनमें बहुत से आपस में तुल्य हों तो  $f(x)$  का लाघव से नया रूप बना सकते हो, जैसे मान लो कि,  $f(x)=0$



इसके मूल में  $\alpha_1$ , त बार,  $\alpha_2$ , थ बार,  $\alpha_3$ , द बार आए हैं तो  $f(y) = p_0 (y - \alpha_1)^t (y - \alpha_2)^{\theta} (y - \alpha_3)^d \dots$  अब इस रूप के अतिरिक्त  $f(y)$  का दूसरा ऐसा रूप नहीं बन सकता जिसमें  $(y - \alpha_1)$  यह त बार से अधिक वा न्यून हो,  $(y - \alpha_2)$  यह थ बार से अधिक वा न्यून हो, इत्यादि। यदि सम्भव हो तो मानो कि

$$f(y) = p_0 (y - \alpha_1)^{t_1} (y - \alpha_2)^{\theta_1} (y - \alpha_3)^{d_1} \dots$$

$$\text{इसलिए } p_0 (y - \alpha_1)^t (y - \alpha_2)^{\theta} (y - \alpha_3)^d \dots$$

$$= p_0 (y - \alpha_1)^{t_1} (y - \alpha_2)^{\theta_1} (y - \alpha_3)^{d_1} \dots$$

मान लो कि  $t > t_1$  तो  $(y - \alpha_1)^{t_1}$  का दोनों पक्षों में भाग देने से

$$p_0 (y - \alpha_1)^{t-t_1} (y - \alpha_2)^{\theta} (y - \alpha_3)^d \dots$$

$$= p_0 (y - \alpha_2)^{\theta_1} (y - \alpha_3)^{d_1} \dots \text{इसमें यदि } y = \alpha_1$$

तो बायाँ पक्ष शून्य होता है परन्तु दहिना पक्ष शून्य नहीं होता इसलिए ऊपर का समीकरण असम्भव हुआ। इसलिये  $t=t_1$ । इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि  $\theta=\theta_1$ ,  $d=d_1$ , इत्यादि।

३०—समीकरण में यदि  $y$  के सब से बड़े घात की संख्या से अधिक मूल हैं तो सब गुणक शून्य के तुल्य होंगे।

$\Phi(y) = 0 = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n$   
 इसमें २४वें प्रक्रम से जब स्पष्ट है कि  $y$  के एक घात के गुण्य-  
 गुणकरूप खण्ड न होंगे; इसलिये  $\Phi(y) = 0$  के  $n$  मूल आवेगों  
 तब स्पष्ट है कि उन  $n$  मूलों से भिन्न संख्या का उत्पादन यदि  
 $y$  के स्थान में दें तो  $\Phi(y) = 0$  नहीं हो सकता परन्तु यदि  
 पूछने वाला कहे कि  $n$  संख्याओं से भिन्न संख्या में भी  
 $\Phi(y) = 0$  ऐसा होता है तो स्पष्ट है कि

$$\Phi(y) = 0 = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$$

यह तभी सम्भव हो सकता है जब  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$   
 ये सब गुणक शून्य के समान हों। ऐसी दशा में  $y$  के स्थान में  
 चाहे जिस संख्या का उन्थापन देओ सर्वदा  $\Phi(y) = 0$  होगा।

३१—समीकरण का एक मूल जान कर उससे  
 एक घात छोटा नया समीकरण बनाया जा सकता  
 है— $\Phi(y) = 0 = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$  इसका  
 यदि एक मूल  $\alpha_1$  हो तो  $(y - \alpha_1)$  प्रक्रम के  $\Phi(y)$  यह  $y - \alpha_1$   
 इससे भाग देने से निःशेष होगा। लब्धि भी अव्यक्त का कोई  
 अकरणीय अंश फल होगी जिसमें  $y$  का सब से बड़ा घात  
 $n-1$  होगा। इस लब्धि को यदि  $\Phi_1(y)$  कहो तो अब एक  
 नया समीकरण  $\Phi_1(y) = 0$  ऐसा बना सकते हो क्योंकि  
 $\Phi(y) = 0 = \Phi_1(y) \{ y - \alpha_1 \}$  इसलिये दोनों पक्षों में  
 $y - \alpha_1$  का भाग देने से  $\Phi_1(y) = 0$  हुआ। पहिले समीकरण  
 की अपेक्षा यह एक घात कम का समीकरण हुआ। इसका  
 यदि एक मूल  $\alpha_2$  व्यक्त हो तो  $\Phi_1(y) = 0$  इसमें  $y - \alpha_2$  इसका

भाग देकर फिर एक नया समीकरण  $\Phi(y)=0$  ऐसा बना सकते हो जिसमें  $y$  का और एक कम घात रहेगा। इस प्रकार समीकरण के एक मूल को जानने से उससे एक घात छोटा नया समीकरण बनता चला जायगा।

**३२—गुणकों और मूलों में परस्पर का सम्बन्ध—**

२५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ में जो बात कह आए है उसे अनुमान के अतिरिक्त नीचे लिखे हुए प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हो।

मान लो कि २४वें प्रक्रम से यदि  $n-1$  गुण्यगुणकरूप खण्ड  $\Phi(y)$  में हों तो वे बातें जो ५वें प्रसिद्धार्थ में हैं ठीक हैं तो

$$(y-y_1)(y-a_1)\dots(y-a_{n-1}) = \Phi(y)$$

$$= y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1}$$

$$\text{जहाँ } p_1 = -(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = -a_1, -a_2, \dots$$

$-a_{n-1}$  इनका योग।

$$p_2 = -a_1, -a_2, \dots \text{इत्यादि में दो दो के घात का योग}$$

$$p_3 = -a_1, -a_2, -a_3 \text{ इत्यादि में तीन तीन के घात का योग।}$$

.....

$$p_{n-1} = -a_1, -a_2, \dots, a_{n-1} \text{ इन सब का घात।}$$

ऊपर के समीकरण के दोनों पक्षों को एक नये खण्ड  $y - अ_n$  से गुणने से

$$(y - अ_1) (y - अ_2) \dots (y - अ_n) = y^n + (प_1 - अ_1) y^{n-1} \\ + (प_2 - प_1 अ_n) y^{n-2} \\ + (प_3 - प_2 अ_n) y^{n-3} + \dots + प_{n-1} अ_n$$

$$\text{परन्तु } प_1 - अ_n = -अ_1 - अ_2 - अ_3 - \dots - अ_n \\ = -अ_1, -अ_2, \dots, -अ_n \text{ इनका योग ।}$$

$$प_2 - प_1 अ_n = प_2 + अ_n (अ_1 + अ_2 + \dots + अ_{n-1}) \\ = -अ_1, -अ_2, \dots, -अ_n \text{ इन में दो दो के} \\ \text{घात का योग ।}$$

$$प_3 - प_2 अ_n = प_3 - अ_n (अ_1 अ_2 + अ_2 अ_3 + \dots) \\ = -अ_1, -अ_2, \dots, -अ_n \text{ इनमें तीन तीन के} \\ \text{घात का योग ।}$$

$$-प_{n-1} अ_n = -अ_1, -अ_2, -अ_3, \dots, -अ_n \text{ इनका घात ।}$$

इसलिये वे बातें यदि  $n-1$  गुण्यगुणकरूप खण्डों में सत्य हैं तो  $n$  खण्डों में भी सत्य होंगी परन्तु २४वें प्रक्रम से ४ गुण्यगुणक खण्डों में सत्य हैं, इसलिये ५ खण्डों में भी सत्य होंगी ।

$n-1$  के स्थान में ५ का उत्थापन देने से ६ में भी सत्य होंगी । इस प्रकार आगे बढ़ाने से स्पष्ट है कि चाहे जितने गुण्यगुणकरूप खण्ड हों सब में २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ की बातें सत्य हैं ।

इसलिये उसी प्रसिद्धार्थ से कह सकते हो कि फ (य) = ० इसमें  $y^n - t$  का गुणक यदि  $p_t$  है तो  $(-1)^t p_t$  समीकरण के मूलों में से  $t$ ,  $t$  के घातों के योग के तुल्य होता है। ऐसा साधारण एक समीकरण उत्पन्न होगा जिसमें  $t$  के स्थान में १, २, ३.... इत्यादि का उत्थापन देने से सब पदों के गुणकों और फ (य) = ० इसके मूलों में जो परस्पर सम्बन्ध है उसका ज्ञान हो जायगा।

जैसे  $y^3 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इस समीकरण के मूल यदि  $a_1, a_2, a_3$  मान लो तो

$$-a_1 - a_2 - a_3 = p_1 \dots\dots\dots (१)$$

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = p_2 \dots\dots\dots (२)$$

$$-a_1 a_2 a_3 = p_3 \dots\dots\dots (३)$$

फिर

$$-a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 = p_1 a_1^2 \dots\dots\dots (४)$$

$$a_1 a_2 a_3 + a_2^2 a_2 + a_2^2 a_3 = p_2 a_1 \dots\dots\dots (५)$$

(३), (४) और (५) को जोड़ देने से

$$-a_1^3 = p_1 a_1^2 + p_2 a_1 + p_3$$

$$\text{इसलिये } a_1^3 + p_1 a_1^2 + p_2 a_1 + p_3 = 0$$

अर्थात्  $a$  के जानने के लिये वैसा ही समीकरण उत्पन्न हुआ जैसा पहिले का समीकरण था। भेद इतना ही है कि वहाँ  $y$  है वहाँ  $y$  के स्थान में  $a_1$  है। यहाँ फ (य) = ० इसके तीनों मूलों में से किसी के लिये  $a_1$  मान सकते हो क्योंकि दूसरा

समीकरण  $\alpha_1$  के जानने के लिये जो उत्पन्न हुआ है उससे  $\alpha_1$  के तीन मान आवेंगे ।

३३—मूलों के वर्गों का योग— $2^{\text{पूव}}^{\text{प्रक्रम}}$  के  $2^{\text{पूव}}$  प्रसिद्धार्थ में गुणकों और मूलों में जो सम्बन्ध दिखा आए हैं और उससे ऊपर के प्रक्रम में  $(-1)^{n-1}$  इसका जो मान दिखला आए है उनसे यद्यपि वर्गसमीकरण छोड़ और घन-समीकरणादि के मूल निकालने में काम नहीं चलता तथापि उनसे समीकरणों के विषय में बहुत उपयुक्त बातों का पता लग जाता है ।

जैसे  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  यदि  $y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0$  इस समीकरण के मूल हों तो

$$-p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$p_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_2 \alpha_3 + \dots$$

इसलिये  $p_1^2 - 2p_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2$

इस पर से सिद्ध हुआ कि सब मूलों के वर्गयोग के तुल्य  $p_1^2 - 2p_2$  होता है इसलिये यदि  $p_1^2 - 2p_2$  यह ऋण हो तो सब मूल सम्भाव्य संख्या नहीं होंगे ।

३४—गुणकों और मूलों में और भी सम्बन्ध—  
इसी प्रकार से और भी सम्बन्ध जान सकते हो । जैसे

$$(-1)^{n-1} p_{n-1} = \text{मूलों के } n-1, n-1 \text{ घातों का योग}$$

$$(-1)^n p_n = \text{सब मूलों का घात}$$

भाग देने से

$$-\frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \dots (1)$$

और  $(-1)^{n-2} p_{n-2} =$  मूलों के  $n-2$ ,  $n-2$  घातों का योग

$$(-1)^n p_n = \text{सब मूलों का घात}$$

इसलिये भाग देने से

$$\frac{p_{n-2}}{p_n} = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_3} + \dots + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots (2)$$

(1) के वर्ग में (2) का दूना घटा देने से

$$\frac{p_{n-1}^2}{p_n^2} - 2 \frac{p_{n-2}}{p_n} = \frac{p_{n-1}^2 - 2 p_{n-2} p_n}{p_n^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}$$

इसे  $p_1^2 - 2 p_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$  इससे गुण देने से

$$\frac{(p_1^2 - 2 p_2)(p_{n-1}^2 - 2 p_{n-2} p_n)}{p_n^2} = n + \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_3^2} + \dots + \frac{a_{n-2}^2}{a_1^2} + \dots$$

इसलिये

$$\frac{(p_1^2 - 2 p_2)(p_{n-1}^2 - 2 p_{n-2} p_n)}{p_n^2} - n = \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_3^2} + \dots + \frac{a_{n-2}^2}{a_1^2} + \dots$$

इस प्रकार अनेक उपयुक्त बातें जान सकते हो । -

### अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१—एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों के मान १, -१, २, -२ हों ।

२—ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसके मूलों के मान  $1 \pm \sqrt{-2}$  और  $3 \pm 2\sqrt{-1}$  हों ।

३—एक सप्त घात समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों में से एक का मान  $1 + \sqrt{3} + \sqrt{-1}$  हो ।

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के और मूल बताओ जब कि एक मूल दिया हुआ है:—

(१)  $y^4 - y^2 + 3y + 4 = 0$  ;  $y = 1 + 2\sqrt{-1}$

(२)  $2y^4 + 2y^3 + 12y^2 + 2y + 10 = 0$  ;  $y = \sqrt{-1}$

(३)  $3y^4 + 3y^3 - 64y^2 + 123y + 12 = 0$  ;  $y = 3 - \sqrt{-2}$

(४)  $y^4 + 2y^3 - 8y^2 + 6 = 3 + 4y$  ;  $y = \sqrt{2}$

(५)  $y^4 + 2 = 2y^3 + 4y^2 + 6y$  ;  $y = 2 - \sqrt{3}$

(६)  $y^4 + 2y^3 + 21y^2 = y^2 + 2y^4 + 6y + 44$  ;

$$y = \sqrt{2} - \sqrt{-1}$$

५— $y^2 + 2y^2 = y^4 + 6y + 12$  इसमें एक मूल  $\sqrt{3}$  और दूसरा  $1 + 2\sqrt{-1}$  हों तो और मूल क्या होंगे ।

६— $y^4 + y^2 - 12y + 8 = 0$  इसमें एक मूल ३ है तो और मूलों को और ग के मान को बताओ ।



७— $y^2 - 3y^2 + 2y^2 + 4y^2 - y + 2 = 0$  इसमें सब मूलों के वर्गयोग और पृथक् पृथक् रूप में भाग दिये हुए मूलों के वर्गयोग बताओ ।

८— $y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0$  इस समीकरण के सब मूलों के घनयोग का मान बताओ ।

$$\text{उत्तर} - p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3$$

९— $y^3 + y^2 - 10y + 15 = 0$  इसमें यदि जानते हैं कि मूल  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  हों और  $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 + 10$  हो तो  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  के मान क्या होंगे ।

१०—बीजगणित से यह जानते हैं कि यदि  $\alpha, \kappa, \gamma$ , इत्यादि न संख्या घनात्मक हों तो  $\frac{\alpha + \kappa + \gamma + \dots}{n} > (\alpha \cdot \kappa \cdot \gamma \dots)^{\frac{1}{n}}$

इस पर से सिद्ध करो कि यदि  $p^2_1 - 2p_2$  यह न  $p^n_n$  इससे अल्प हो तो समीकरण में कोई सम्भाव्य मूल न आवेगा ।

११— $y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n = 0$  इस समीकरण के दो दो मूलों के घात का वर्गयोग बताओ ।

$$\text{उ-} p^2_2 - 2p_1 p_2 + 2p_4$$

१२—यदि  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  इत्यादि मूल हों तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} & (1 - p_2 + p_4 - \dots)^2 + (p_1 - p_3 + p_5 - \dots)^2 \\ & = (1 + \alpha^2_1) (1 + \alpha^2_2) (1 + \alpha^2_3) \dots \end{aligned}$$

## ३-समीकरणों की रचना

३५—इस अध्याय में दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसे समीकरण के बनाने की रीति लिखी जायगी जिसके मूल से दिए हुए समीकरण के मूल में एक निर्दिष्ट सम्बन्ध रहे ।

जैसे  $\phi(y)=0$  यह एक दिया हुआ समीकरण है इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हों तो यहाँ स्पष्ट है कि  $x=-y$  इस समीकरण में जो  $y$  के मान होंगे उनके तुल्य विरुद्ध चिन्ह के  $x$  के मान होंगे इसलिये  $y=-x$  अब दिए हुए समीकरण में  $y$  के स्थान में  $-x$  का उत्थापन देने से नया समीकरण  $\phi(y) = \phi(-x)=0$  ऐसा होगा ।

यदि  $\phi(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n$  तो बदला हुआ नया समीकरण

$$\begin{aligned}\phi(-x) &= p_0 (-x)^n + p_1 (-x)^{n-1} + p_2 (-x)^{n-2} \\ &\quad + \dots + p_{n-1} (-x) + p_n = 0 \\ &= p_0 x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \dots + p_{n-1} x + p_n\end{aligned}$$

अर्थात् दूसरे पद से एक एक पद छोड़ आदि समीकरण में गुणकों के चिन्ह बदल देने से यह नया समीकरण होता है । यदि दिए हुए समीकरण में  $y$  का एकापचित घातक्रम न हो तो ३ प्रक्रम से घातक्रम को बना कर तब ऊपर की लिखी हुई युक्ति से चिन्हों को बदल कर नया समीकरण बनाना चाहिए ।

जैसे यदि  $f(y) = y^6 + 4y^5 - 5y^4 - 6y^3 + 5 = 0$

तो  $y$  के स्थान में  $-r$  का उत्थापन देने से नया समीकरण

$-r^6 + 4r^5 - 5r^4 - 6r^3 + 5 = 0 = r^6 - 4r^5 + 5r^4 + 6r^3 - 5$  बना, अथवा दिए हुए समीकरण का ३प्र. से घातक्रम में रूप

$$y^6 + 4y^5 + 0y^4 - 5y^3 + 0y^2 - 6y^1 + 0y + 5 \text{ यह हुआ।}$$

इसमें  $y$  के स्थान में  $r$  को रख देने से और दूसरे पद से एक एक पद छोड़ सब गुणकों के चिन्ह बदल देने से नया समीकरण

$r^6 - 4r^5 + 5r^4 + 6r^3 - 5 = 0$  बना। यही पहले भी आया था।

३६—दिए हुए समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से  $n$  गुणित हों।

मान लो कि  $r = ny$ , तो इस समीकरण में स्पष्ट है कि जो जो  $y$  के मान होंगे उनसे  $n$  गुणित  $y$  के मान होंगे। इस लिये  $y = \frac{r}{n}$  इसका उत्थापन दिए हुए  $f(y) = 0$  इस समी-

करण में देने से नये बने हुए समीकरण का रूप  $f\left(\frac{r}{n}\right) = 0$  ऐसा होगा।

जैसे  $f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n = 0$  इस दिए हुए समीकरण पर से नया समीकरण

$$\begin{aligned} \text{फ} \left( \frac{r}{j} \right) &= p_0 \left( \frac{r}{j} \right)^n + p_1 \left( \frac{r}{j} \right)^{n-1} + p_2 \left( \frac{r}{j} \right)^{n-2} \\ &\quad + \dots + p_n \\ &= \frac{p_0 r^n}{j^n} + \frac{p_1 r^{n-1}}{j^{n-1}} + \frac{p_2 r^{n-2}}{j^{n-2}} + \dots + p_n = 0 \end{aligned}$$

ज को न घात से गुण देने से

$$\begin{aligned} p_0 r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_n r^{n-n} \\ + \dots + p_n r^n = 0 \end{aligned}$$

ऐसा नया समीकरण हुआ। इसमें यदि  $p_0$  से भाग देकर समीकरण को छोटा करने से  $\frac{p_1}{p_0} \dots$  इत्यादि भिन्न हो तो प्रायः उनके हर के लघुतमापवर्त्य तुल्य ज को मानने से नये समीकरण में सब अभिन्न पद हो सकते हैं। जैसे यदि  $y^3 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{6}{5} y - \frac{1}{10} = 0$  इस पर से नया समीकरण बनाओ जहाँ  $y = \frac{r}{j}$  ता समीकरण का रूप ऊपर की युक्ति से

$$r^3 - \frac{4}{3} r^2 j + \frac{6}{5} r j^2 - \frac{1}{10} j^3 = 0$$

इसमे स्पष्ट है कि यदि  $j = 30 = 3, 5, 10$  का लघुतमापवर्त्य, तो समीकरण

$$r^3 - 40 r^2 + 1000 r - 1000 = 0 \text{ ऐसा हुआ।}$$

यदि दिया हुआ समीकरण

$$y^3 - \frac{4}{3} y^2 + \frac{6}{5} y - \frac{1}{10} = 0 \text{ ऐसा होता तो नये}$$

$$r^3 - \frac{4}{3} j r^2 + \frac{6}{5} j^2 r - \frac{1}{10} j^3 = 0 \text{ इस समीकरण में}$$

ज के स्थान में तीन ही का उत्थापन देने से

$$r^3 - 4 r^2 + 6 r - 3 = 0$$

यह अभिन्न नया समीकरण बन जाता।

३७—दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से ज स्थिराङ्क तुल्य न्यून हों।

मान लो कि  $r = y - j$  तो इसमें स्पष्ट है कि जो जो  $y$  के मान होंगे उनसे ज तुल्य न्यून  $r$  के मान होंगे। इसलिये दिए हुए  $f(y) = 0$  इस समीकरण में  $y$  के स्थान में  $r + j$  का उत्थापन देने से नया समीकरण  $f(j + r) = 0$  ऐसा हुआ। दिया हुआ समीकरण

$f(y) = 0 = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$  यदि ऐसा हो तो ११वें प्रक्रम से  $y$  के स्थान में  $j$  को रख देने से

$$f(j + r) = f(j) + f'(j)r + f''(j)\frac{r^2}{1 \cdot 2} + \frac{f'''(j)r^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(j)r^n}{n!} = 0$$

और १२वें प्रक्रम से  $r$  के एकाप चित घातक्रम से

$$\begin{aligned} f(j + r) &= p_0 r^n + (p_1 + n p_0 j) r^{n-1} + \\ &\left\{ p_2 + (n-1)p_1 j + \frac{n(n-1)}{2!} p_0 j^2 \right\} r^{n-2} + \dots \dots \dots \\ &+ \left\{ p_t + (n-t+1) p_{t-1} j^{t-1} + \dots \dots \dots \right. \\ &\left. + \frac{n(n-1) \dots (n-t+1)}{t!} p_0 j^{t-1} \right\} r^{n-t} + \dots + \dots + f(j) = 0 \end{aligned}$$

विशेष—फ़ (य) पर से फ़ (अ), फ़ (अ), फ़' (अ)  
इत्यादि के मान लाघव से ज्ञात करने के लिये हार्नर (Hornel)  
साहब ने एक प्रकार बनाया है।

जैसे मानो कि फ़ (य) =  $p_0 अ^४ + p_1 य^३ + p_2 य^२ + p_3 य + p_४$

तो फ़ (य) =  $p_0 अ^४ + p_1 अ^३ + p_2 अ^२ + p_३ अ + p_४$

और १०वें प्रक्रम से

$$फ़' (अ) = ४p_0 अ^३ + ३p_1 अ^२ + २p_2 अ + p_३$$

$$\frac{१}{३!} फ़'' (अ) = ६p_0 अ^२ + ३p_1 अ + p_२$$

$$\frac{१}{३!} फ़''' (अ) = ४p_१ अ + p_२$$

$$\frac{१}{४!} फ़'''' (अ) = p_०$$

अब फ़ (अ) का यान ७वें प्रक्रम से

$$p_0 = p_0$$

$$p_0 अ + p_१ = p_१$$

$$p_१ अ + p_२ = p_0 अ^२ + p_१ अ + p_२ = p_२$$

$$p_२ अ + p_३ = p_0 अ^३ + p_१ अ^२ + p_२ अ + p_३ = p_३$$

$$p_३ अ + p_४ = p_0 अ^४ + p_१ अ^३ + p_२ अ^२ + p_३ अ + p_४ = फ़(अ)$$

यहाँ प्रत्येक ऊपर की पंक्ति को अ से गुण देने से और  
आगे के गुणक को जोड़ देने से नीचे की पंक्ति उत्पन्न होती है।

अब जिस प्रकार से  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4$  को लेकर  $f(अ)$  बनाया गया है ठीक उसी प्रकार से  $p_0, p_1, p_2, p_3$  को लेकर  $f'(अ)$  बन सकता है ।

$$\begin{aligned} \text{जैसे} \quad p_0 &= p_0 \\ p_0 अ + p_1 &= 2p_0 अ + p_1 = p_1 \\ p_1 अ + p_2 &= p_0 अ^2 + p_1 अ + p_2 = 2p_0 अ^2 + p_1 अ + p_0 अ^2 \\ &\quad + p_1 अ + p_2 = 3p_0 अ^2 + 2p_1 अ + p_2 = p_2 \\ p_2 अ + p_3 &= 4p_0 अ^3 + 3p_1 अ^2 + 2p_2 अ + p_3 = f'(अ) \end{aligned}$$

इसी प्रकार  $p_0, p_1, p_2$  को लेकर  $\frac{1}{2} f''(अ)$  को भी बना सकते हैं ।

$$\begin{aligned} \text{जैसे} \quad p_0 &= p_0 \\ p_0 अ + p_1 &= 2p_0 अ + p_1 = p_1 \\ p_1 अ + p_2 &= 3p_0 अ^2 + 2p_1 अ + p_2 = \frac{1}{2} f''(अ) \end{aligned}$$

जिस प्रकार से  $f(अ), f'(अ), \frac{1}{2} f''(अ)$  बनाया है उसी प्रकार  $p_0, p_1$  लेकर  $\frac{1}{3!} f'''(अ)$  बन सकता है । जैसे

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 \\ p_0 अ + p_1 &= 3p_0 अ + p_1 = \frac{1}{3!} f'''(अ) \\ \text{इस प्रकार अन्त में } p_0 &= \frac{1}{4!} f^{(4)}(अ) \end{aligned}$$

ऊपर की क्रिया को सुभीते के लिये इस प्रकार लिखते हैं

42'

8



इस प्रकार से  $f(x) = ६४$ ,  $f'(x) = १००$ ,  $\frac{१}{३} f''(x) = ७०$  और  $\frac{१}{३!} f'''(x) = २३$ । यह विशेष बड़े काम का है इस पर से मूल का आसन्न व्यक्त मान लाघव से निकलता है जिसकी रीति आसन्न मान के प्रकरण में दिखाई जायगी।

३८—३७ प्रक्रम में  $x$  के स्थान में  $-x$  का उत्थापन देने से ऐसा एक नया समीकरण बन सकता है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से  $+x$  तुल्य बड़े होंगे।

३९—समीकरण के किसी एक पद का उड़ाना या हटाना—३८ प्रक्रम के नये समीकरण में  $x$  के भिन्न भिन्न मान से प्रथम पद को छोड़ कर चाहे जौनसा पद उड़ा सकते हैं।

जैसे यदि  $f(x+1) = 0$  इसमें इच्छा हो कि दूसरा पद उड़े तो दूसरे पद के गुणक  $p_1 + np_0$  इसको शून्य के समान करने से

$$p_1 + np_0 = 0 \quad x = -\frac{p_1}{np_0}$$

$$\text{अब } x \text{ के स्थान में } -\frac{p_1}{np_0} \text{ इसे रख देने से } f(x+1) \\ = f\left(-\frac{p_1}{np_0} + 1\right) \text{ इसमें } r^{n-1} \text{ यह पद न रहेगा।}$$

इसी प्रकार यदि  $t+1$  संख्यक पद को उड़ाना हो तो उसके गुणक पर से

$$p_0 j^t + \frac{t}{n} p_1 j^{t-1} + \frac{t(t-1)}{n(n-1)} p_2 j^{t-2} + \dots + \frac{(t)!(n-t)!}{t!} p_n = 0$$

ऐसा समीकरण बना, इस पर से ज का मान ले आने चाहिए जिनके वश से फ  $(j+1) = 0$  इसमें  $t+1$  संख्यक पद उड़ जायगा।

जैसे तीसरा पद उड़ाना हुआ तो  $t=2$  इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में देने से

$$p_0 j^2 + \frac{2}{n} p_1 j + \frac{2!(n-2)!}{n!} p_2 = 0$$

अब इस वर्गसमीकरण से ज के दो मान आ जायंगे जिनके वश से तीसरा पद उड़ जायगा। इसमें यदि  $n=3$  तो

$$p_0 j^2 + \frac{2}{3} p_1 j + \frac{2!(3-2)!}{3!} p_2 = p_0 j^2 + \frac{2}{3} p_1 j + \frac{p_2}{3} = 0$$

$$\text{इस पर से } j^2 + \frac{2p_1}{3p_0} j = -\frac{p_2}{3p_0}$$

$$\text{वा } j^2 + \frac{2p_1}{3p_0} j + \frac{p_2}{3p_0} = \frac{p_2}{3p_0} - \frac{3p_0 p_2}{3p_0^2}$$

$$\therefore j = \frac{-\frac{2p_1}{3p_0} \pm \sqrt{\left(\frac{2p_1}{3p_0}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p_2}{3p_0}}}{2}$$

जैसे  $2y^2 - 12y^2 + 10 = 0$  इस पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाना हो जिसमें दूसरा पद उड़ जाय तो यहाँ ऊपर की युक्ति से

$$ज = -\frac{प_1}{नप_0} = -\frac{-१२}{३ \times २} = +२$$

इस पर से नया समीकरण

$$२ (र + २)^३ - १२ (र + २)^२ + ८ (र + २) + १० = ०$$

$$\text{वा } २र^३ + १२र^२ + २४र + १६ - १२र^२ - ४८र + ८र + १६ + १० - ४८ =$$

$$२र^३ - १६र - ६ = ०$$

$$\therefore र^३ - ८र - ३ = ० \text{ ऐसा हुआ।}$$

और यदि  $य^२ - २य + ३ = ०$  इसमें यदि तीसरा पद उढ़ाना हो तो

$$ज = \frac{-प_१ \pm \sqrt{प_१^२ - ३प_०प_१}}{३प_०} = \frac{२ \pm \sqrt{४ - ३}}{३} = \frac{२ \pm १}{३}$$

$$\therefore ज = १ \text{ वा } \frac{१}{३}$$

अब ज=१ तो नया समीकरण

$$(र + १)^३ - २(र + १)^२ + (र + १) + ३ = र^३ + ३र^२ + ३र + १ - २र^२ - ४र - २ + र + १ + ३ = ०$$

$$\therefore र^३ + र^२ + ३ = ० \text{ ऐसा हुआ।}$$

अब ज =  $\frac{१}{३}$  तो नया समीकरण

$$(र + \frac{१}{३})^३ - २(र + \frac{१}{३})^२ + (र + \frac{१}{३}) + ३ = ०$$

$$\text{वा } र^३ + र^२ + \frac{१}{३} + \frac{१}{२७} - २र^२ - \frac{४}{३}र - \frac{२}{९} + र + \frac{१}{२} + ३$$

$$= र^३ - र^२ + \frac{१}{२७} - \frac{६}{२७} + \frac{८१}{२७} + \frac{६}{२७} = ०$$

$$\therefore r^3 - r^2 + \frac{r^2}{2} = 0 \text{ ऐसा हुआ।}$$

इस प्रकार से समीकरणों में पहले पद को छोड़ और किसी एक पद को उड़ा सकते हो।

४०—दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के ज घात के तुल्य हों।

कल्पना करो कि  $r = y^j$  इसमें जो  $y$  के मान होंगे उनके ज घात के तुल्य  $r$  के मान होंगे। इस लिये  $y = r^{\frac{1}{j}}$  के हुआ। इसके उत्थापन से नया समीकरण  $f(r^{\frac{1}{j}}) = 0$  ऐसा हुआ।

यदि  $f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$  ऐसा हो तो नया समीकरण

$$f(r^{\frac{1}{j}}) = p_0 r^{\frac{n}{j}} + p_1 r^{\frac{n-1}{j}} + p_2 r^{\frac{n-2}{j}} + \dots + p_{n-1} r^{\frac{1}{j}} + p_n = 0$$

इसमें यदि  $j = -1$  तो  $r = r^{-1} = \frac{1}{r}$

$$\text{और } f(r^{\frac{1}{j}}) = f\left(\frac{1}{r}\right) = p_0 r^{-n} + p_1 r^{1-n} + \dots = 0$$

वा  $p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \dots + p_1 r + p_0 = 0$  ऐसा हुआ।

और यदि  $j = 2$  तो  $r = y^2$  और  $y = r^{\frac{1}{2}}$  इसलिये

$$P(r^{\frac{1}{n}}) = P(r^{\frac{1}{2}}) = P_0 r^{\frac{n}{2}} + P_1 r^{\frac{n-1}{2}} + \dots + P_{n-1} r^{\frac{1}{2}} + P_n = 0$$

एकान्तर पदों को शून्य की ओर ले जाकर वर्ग कर देने से  
अकरणीगत अव्यक्त के घात में

$$\left( P_0 r^{\frac{n}{2}} + P_1 r^{\frac{n-1}{2}} + P_2 r^{\frac{n-2}{2}} + \dots \right)^2 \\ = \left( P_1 r^{\frac{n-1}{2}} + P_2 r^{\frac{n-2}{2}} + \dots \right)^2$$

यह समीकरण होगा। इस तरह ज के भिन्न भिन्न मान से  
यहाँ अनेक प्रकार के नये नये समीकरण बन सकते हैं।

४१—इस प्रक्रम में समीकरणों की रचना के विषय में  
कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखला कर इस अध्याय को समाप्त  
करते हैं।

(१)  $y^3 + P_1 y^2 + P_2 y + P_3 = 0$  इसके मूल  $\alpha_1, \alpha_2$  और  
 $\alpha_3$  हैं। एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल  
 $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2$  और  $\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$  हों।

$$\text{यहाँ } \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_1)$$

$$= \alpha_1 (-P_1 - \alpha_1) = -\alpha_1 (P_1 + \alpha_1)$$

प्रसी प्रकार और दोनों मूलों के रूप क्रम से

$$-\alpha_2 (P_1 + \alpha_2), -\alpha_3 (P_1 + \alpha_3) \text{ ये होंगे। इसलिये यदि}$$

$x = -y (P_1 + y)$  ऐसा मानें तो  $y$  के स्थान में क्रम से  
मूलों के तीनों मान  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  रख देने से नये समीकरण के  
मूल हो जाते हैं इसलिये

$$r = -y (p_1 + y) \quad . \quad -r = y^2 + p_1 y$$

$$\therefore y = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4r}}{2}$$

दिए हुए समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$\left\{ \frac{-p_1 \pm (p_1^2 - 4r)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^2 + p_1 \left\{ \frac{-p_1 \pm (p_1^2 - 4r)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^2 + p_2 \left\{ \frac{-p_1 \pm (p_1^2 - 4r)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\} + p_3 = 0$$

ऐसा समीकरण होगा। द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर और पदान्तर नयनादि से  $r$  के अकरणीगत घात में इसी समीकरण का रूप बना सकते हो।

(२)  $y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दोनों मूलों के अन्तर वर्ग के तुल्य हो। यदि दिए समीकरण के मूल  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  मानों तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$-p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = p_2, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -p_3$$

इसलिये मूलों के वर्ग योग

$$= p_1^2 - 2p_2 = -2p_2 \quad (२३वें प्रक्रम से).$$

नये समीकरण के मूल  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2, (\alpha_2 - \alpha_3)^2$  और  $(\alpha_1 - \alpha_3)^2$  ये हैं परन्तु  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2$

$$\begin{aligned}
 &= अ_1^2 + अ_2^2 + अ_3^2 - \frac{२अ_१अ_२अ_३}{अ_३} - अ_३^2 \\
 &= -२प_२ + \frac{२प_३}{अ_३} - अ_३^2
 \end{aligned}$$

इसलिये (१) उदाहरण की युक्ति से

$$र = -२प_२ + \frac{२प_३}{य} - य^२$$

$$\therefore यर = -२प_२य + २प_३ - य^३$$

$$\text{वा } य^३ + (२प_२ + र) य - २प_३ = ० \dots\dots (१)$$

$$\text{और } य^३ + प_२य + प_३ = ० \dots\dots (२)$$

(१) और (२) के अन्तर से

$$(प_२ + र)य - २प_३ = ०$$

$$\therefore य = \frac{२प_३}{प_२ + र}$$

आदि समीकरण में इसका उत्थापन देने से और लघुतम रूप करने से

$$र^३ + ६य_२र^२ + ६प_२र + २७प_३ + ४प_३^२ = ०$$

यदि  $२७प_३ + ४प_३^२$  यह धन हो तो २१वें प्रक्रम से र का एक मान सम्भाव्य ऋण संख्या होगा, इसलिये दिए हुए समीकरण में एक जोड़ा असम्भव मान अवश्य रहेगा । क्योंकि इसका यह एक ऋणात्मक मान दिए हुए समीकरण के मूलों के अन्तर के वर्ग तुल्य होगा । अन्तर का वर्ग ऋण तभी होगा

जब अन्तर में असम्भव संख्या होंगी। और यदि  $२७p^2_3 + ४p^3_2$  यह शून्य हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण के दो मूल आपस में समान होंगे।

(३)  $y^3 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों के अन्तर के वर्ग के समान हो। इसमें दूसरा पद उठाने के लिये  $y = y' - \frac{p_1}{3}$  ऐसी कल्पना करो तो दिए हुए समीकरण का रूप

$$\left(y' - \frac{p_1}{3}\right)^3 + p_1 \left(y' - \frac{p_1}{3}\right)^2 + p_2 \left(y' - \frac{p_1}{3}\right) + p_3 = 0$$

$$= y'^3 + p'_2 y' + p'_3 = 0$$

$$\text{जहाँ } p'_2 = p_2 - \frac{p_1^2}{3}; p'_3 = \frac{२७p^3_1}{२७} - \frac{p_1 p_2}{३} + p_3$$

नये समीकरण का प्रत्येक मूल दिए हुए समीकरण के प्रत्येक मूल से  $\frac{p_1}{3}$  इतना बड़ा होगा, इसलिये नये समीकरण के जो दो दो मूलों का अन्तर होगा वही दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों का क्रम से अन्तर होगा। इसलिये (२) उदाहरण की युक्ति से अभीष्ट समीकरण

$$\begin{aligned} & r^3 + ६p'_2 r^2 + ६p'^2_2 r + २७p'^3_3 + ४p'^3_2 = 0 \text{ ऐसा होगा।} \\ & \text{इसमें } p'_2, p'_3 \text{ के पूर्व दिए हुए मानों का उत्थापन देने से} \\ & r^3 + २(३p_2 - p^2_1)r^2 + (३p_2 - p^2_1)r^2 \\ & + \frac{(२७p^3_1 - ६p_1 p_2 + २७p^3_3) + ४(३p_2 - p^2_1)}{२७} = 0 \end{aligned}$$



दिए हुए समीकरण के मूल यदि  $a_1, a_2, a_3$  ये हों तो न्यून प्रक्रम के पूर्व प्रसिद्धार्थ से

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 \\ & \quad = -2(3p_2 - p_1^2) \\ & (a_1 - a_2)^2(a_2 - a_3)^2 + (a_1 - a_2)^2(a_3 - a_1)^2 \\ & \quad + (a_2 - a_3)^2(a_3 - a_1)^2 = 3p_2 - p_1^2 \\ & (a_1 - a_2)^2(a_2 - a_3)^2(a_3 - a_1)^2 \\ & \quad = -\frac{1}{27} \left\{ (2p_1^3 - 6p_1p_2 + 27p_3)^2 + 4(3p_2 - p_1^2) \right\} \end{aligned}$$

ऐसा होगा। इस प्रकार अनेक उदाहरण के उत्तर बड़े चमत्कार से होते हैं।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

(१) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हों।

$$(१) y^3 + 2y^2 - 5 = 0 \quad |$$

$$(२) y^2 - y^2 + y - 6 = 0 \quad |$$

$$(३) y^5 - y^2 + y + 7 = 0 \quad |$$

$$(४) y^7 - y^3 + y - 11 = 0 \quad |$$

(२) नीचे दिए हुए तीन समीकरणों से नये ऐसे तीन समीकरण बनाओ जिनके मूल क्रम से दिए हुए समीकरण के मूल से १, २, और ३ न्यून हों।

$$(१) y^3 - 2y^2 + 5y - 6 = 0 \quad |$$

$$(२) y^3 - y^2 + y - 11 = 0 \quad |$$

$$(३) y^5 - y^2 + y - 21 = 0 \quad |$$

(३) नीचे लिखे हुए समीकरण से नये ऐसे समीकरण बनाओ जिनमें द्वितीय पद उड़ जायः—

$$(१) y^2 - y^2 + y^2 + ५y - ७ = 0 \quad |$$

$$(२) y^2 + ५y^2 - y + ७ = 0 \quad |$$

$$(३) y^2 - १६y^2 + ५०y^2 + y - २ = 0 \quad |$$

(४) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनमें तीसरा पद उड़ जायः—

$$(१) y^2 + ५y^2 + ८y - ३ = 0 \quad |$$

$$(२) y^2 - ६y^2 + ६y - ११ = 0 \quad |$$

$$(३) y^2 - ८y^2 + १८y^2 - १६y + १४ = 0 \quad |$$

$$(४) y^2 - १८y^2 - ६०y^2 + ३y - २ = 0 \quad |$$

(५)  $y^2 + ३y^2 + \frac{१}{६}y + \frac{१}{१६} = 0$  इस से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिनमें सब पदों के गुणक अभिन्न हों।

(६) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे समीकरण बनाओ जिनके मूल पहले समीकरण के दो दो मूलों के अन्तर के वर्ग के समान हों। और यह भी बताओ कि दिए समीकरण के मूल कैसे होंगे।

$$(१) y^2 - ८y - २ = 0 \quad |$$

$$(२) y^2 - ७y - ७ = 0 \quad |$$

(७)  $y^2 + y^2 - ८y - ६ = 0$  इस समीकरण में दिखलाओ कि  $y$  के मान, एक धन और एक ऋण सम्भाव्य संख्या होंगे जो कि  $-१$  और  $२$  के बीच में हैं। इनके अतिरिक्त और कोई मान सम्भाव्य संख्या नहीं है।

(८)  $y^2 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इसमें  $y$  के मान  $a_1, a_2, a_3$  हैं। ऐसे समीकरण बनाओ जिनके नीचे लिखे हुए मूल आवें:—

$$(१) \frac{a_1}{a_2 + a_3}, \frac{a_2}{a_1 + a_3}, \frac{a_3}{a_1 + a_2} \mid$$

$$(२) a_1^2, a_2^2, a_3^2 \mid$$

$$(३) a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3 \mid$$

$$(४) \frac{1}{a_1 + a_2}, \frac{1}{a_1 + a_3}, \frac{1}{a_2 + a_3} \mid$$

$$(५) \frac{a_1}{a_2 a_3}, \frac{a_2}{a_1 a_3}, \frac{a_3}{a_1 a_2} \mid$$

$$(६) \sqrt{\text{ज } a_1}, \sqrt{\text{ज } a_2}, \sqrt{\text{ज } a_3} \mid$$

$$(७) \frac{1}{2} (a_1 + a_2 - a_3), \frac{1}{2} (a_1 + a_3 - a_2), \frac{1}{2} (a_2 + a_3 - a_1) \mid$$

$$(८) a_2 + a_3 + \text{ज } a_1, a_3 + a_1 + \text{ज } a_2, a_1 + a_2 + \text{ज } a_3 \mid$$

$$(९) \frac{a_1}{a_2 + a_3 - a_1}, \frac{a_2}{a_1 + a_3 - a_2}, \frac{a_3}{a_1 + a_2 - a_3} \mid$$

$$(१०) a_2 a_3 + \frac{1}{a_1}, a_1 a_3 + \frac{1}{a_2}, a_1 a_2 + \frac{1}{a_3} \mid$$

$$(११) a_1^2 + a_2^2, a_1^2 + a_3^2, a_2^2 + a_3^2 \mid$$

$$(१२) \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}$$

$$(१३) \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 a_3}, \frac{a_3^2 + a_1^2}{a_1 a_3}, \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2}$$

$$(१४) a_2 - a_3, a_3 - a_1, a_1 - a_2$$

$$(१५) a_2^2 a_3^2, a_3^2 a_1^2, a_1^2 a_2^2$$

$$(१६) \left( \frac{a_1}{a_2 - a_3} \right)^2, \left( \frac{a_2}{a_1 - a_3} \right)^2, \left( \frac{a_3}{a_1 - a_2} \right)^2$$

(६)  $y^2 - 2y^2 + 11y - 6 = 0$  इसमें यदि  $y$  के मान  $a_1, a_2, a_3$  हों तो एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें  $y$  के मान  $\frac{1}{a_2^2 + a_3^2}, \frac{1}{a_1^2 + a_3^2}, \frac{1}{a_2^2 + a_1^2}$  ये हों।

(१०)  $y^2 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इसके मूल यदि  $a_1, a_2, a_3$  हों तो वह समीकरण कैसा होगा जिसके मूल  $\frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1^2}, \frac{a_1^2 + a_3^2}{a_2^2}, \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3^2}$  ये हों।

(११)  $y^2 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इसमें यदि  $p_1, p_2, p_3$  यह ३ पद इससे अलग हो तो सिद्ध करो कि यहाँ ऐसा समीकरण नहीं बन सकता जिसमें तीसरा पद न रहे।

(१२) सिद्ध करो कि  $y^2 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इसमें यदि  $p_1 = p_2$  तो एक ही बार की क्रिया में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और तीसरा दोनों पद उड़ जायेंगे।

(१३) नीचे लिखे हुए समीकरण में  $y$  का मान बताओ:—

$$(१) y^2 - ६y^2 + १२y - ३ = ०$$

$$(२) y^2 + ६y^2 + २७y - २१ = ०$$

(१४) सिद्ध करो कि  $y^4 + p_1y^3 + p_2y^2 + p_3y + p_4 = ०$  इसमें यदि

$2p_3 = p_1 (4p_2 - p_1^2)$  तो एक ही बार में एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और चौथा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

(१५) नीचे लिखे हुए समीकरणों में  $y$  के मान बताओ:—

$$(१) y^4 + २y^3 + ८y^2 + ७y - १० = ०$$

$$(२) y^4 - २y^3 + ४y^2 + ३y - ६ = ०$$

(१६) सिद्ध करो कि  $y^3 + ४y^2 + \frac{१६}{३}y + १ = ०$  इससे एक ही बार ऐसा एक नया समीकरण बना सकते हैं जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँ परन्तु इसी समीकरण को  $y$  से गुण कर जो एक चतुर्घात समीकरण बनेगा उससे एक ही बार ऐसा एक समीकरण नहीं बन सकता जिसमें दूसरा और तीसरा ये दो पद न रहँ।

(१७) सिद्ध करो कि  $y^n + p_1y^{n-1} + p_2y^{n-2} + \dots + p_{n-1}y + p_n = ०$  इसमें यदि  $\frac{p_{n-1}^2 (n-1)}{२n} = p_2$  तो एक ही बार में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

## ४-धनर्णमूल

४२—२१-२२ और २५वँ प्रक्रमों में धनात्मक तथा ऋणात्मक मूल के विषय में कुछ विशेष लिख आए हैं। अब यहाँ पर साधारण एक सिद्धान्त, कुछ परिभाषा लिखने के अनन्तर ऐसा दिखलाते हैं जिससे स्पष्ट विदित होगा कि  $F(y) = 0$  इसके कितने मूल धन और कितने ऋण होंगे।

४३—क्रमिक पदयूथ—अनेक पदों के यूथ में एक धन, दूसरा ऋण, तीसरा धन, चौथा ऋण इस प्रकार से एकान्तर सब पद एक चिन्ह के हों तो ऐसे पदयूथ को क्रमिक कहते हैं।

सर पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर उसी चिन्ह का यदि दूसरा पद आवे तो इस दूसरे पद को सर कहते हैं।

व्यत्यास पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर यदि भिन्न चिन्ह का दूसरा पद हो तो इस दूसरे पद को व्यत्यास कहते हैं।

जैसे  $y^6 - 2y^5 + 3y^4 - 4y^3 + 2y^2 - 5y + 2$  इस में एक धन, दूसरा ऋण इस क्रम से सब पद हैं इस लिये इस पदयूथ को क्रमिक कहेंगे। और  $y^6 - 2y^5 - 3y^4 - 5y^3 + 4y^2 + 2y + 2$  इसमें एक सर  $-3y^4$  पर, दूसरा  $5y^3$  पर, तीसरा  $+2y^2$  पर, चौथा  $+3y$  पर और पाँचवाँ  $-y$  पर है इस लिये यहाँ पाँच सर हैं। और एक व्यत्यास  $-2y^5$  पर, दूसरा  $+4y^3$  पर, तीसरा  $-y^2$  पर और चौथा  $+2$  पर है इसलिये यहाँ चार व्यत्यास हैं।

इस प्रकार और उदाहरणों में भी समझ लेना चाहिए ।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि जिन पद यूथों में आदि पद सर्वदा धन रहता है उसका यदि अन्त पद धन हो तो उसमें व्यत्यास शून्य वा सम होगा और यदि अन्त पद ऋण हो तो व्यत्यास विषम होगा ।

यह स्पष्ट है कि किसी पूर्ण समीकरण में (४प्रक्रम देखो) सब सर और व्यत्यासों का योग उस संख्या के तुल्य होगा जो संख्या कि य के सबसे बड़े घात में है ।

जैसे ऊपर के उदाहरण में नव सब से अधिक य का घात है तो सब सर पाँच और सब व्यत्यास चार ये दोनों मिल कर भी नव ही हुए ।

फ (य) = ० इस पूरे समीकरण में य के स्थान में -य का उत्थापन दें तो फ (-य) में स्थिति उलट जायगी अर्थात् फ (य) में जितने सर होंगे उतने ही फ (-य) में व्यत्यास होंगे और फ (य) में जितने व्यत्यास होंगे उतने फ (-य) में सर होंगे । फ (य) = ० यह यदि पूरा समीकरण न हो तो फ (य) और फ (-य) के व्यत्यासों का योग स्पष्ट है कि समीकरण के घात संख्या से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि पूरे समीकरण के पद कम हों तो फ (य) और फ (-य) में व्यत्यासों की संख्या भी कम होगी ।

४४—डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति । धन और ऋण मूल—किसी पूरे वा अधूरे समीकरण में व्यत्यासों की संख्या से अधिक धनात्मक मूल नहीं आ सकते और किसी

इसकी व्यत्यास संख्या से अधिक फ (—र) =० इसके मूल धनात्मक न आवेंगे। इसलिये फ (य) इसकी सर संख्या से अधिक फ (य) =० इसके मूल ऋणात्मक न आवेंगे।

४५—चाहे पूरा या अधूरा फ (य) =० यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रम की युक्ति से फ (य) इसमें जितने व्यत्यास होंगे उससे अधिक फ (य) =० इसके धनात्मक मूल न आवेंगे और फ (—य) इसमें भी जितने व्यत्यास होंगे उससे अधिक फ (—य) =० इसके मूल धनात्मक न आवेंगे परन्तु फ (य) =० इसके मूल फ (—य) =० इसके मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हैं अर्थात् फ (य) =० इसके धनात्मक मूल फ (—य) =० इसके ऋणात्मक मूल हैं। इसलिये फ (य) और फ (—य) इन दोनों के व्यत्यास संख्याओं के योग से फ (य) =० इसके धनात्मक और ऋणात्मक मूलों का योग अधिक न होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि चाहे फ (य) =० यह समीकरण पूरा वा अधूरा हो इसके जितने सम्भाव्य मूल होंगे वे फ (य) और फ (—य) इनके व्यत्यास संख्याओं के योग से अधिक न होंगे।

$$\text{जैसे यदि फ ( य )} = य^४ + ५य^२ + ७य - ६ = ०$$

$$\text{तो फ (—य)} = य^४ + ५य^२ - ७य - ६ = ०$$

फ (य) में एक व्यत्यास है इसलिये फ (य) =० इसका एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा और फ (—य) इसमें भी एक ही व्यत्यास है इसलिये फ (—य) =० इसका भी एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा वा फ (य) =० इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।



अर्थात् दोनों व्यत्यासों के योग दो से अधिक फ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल न आवेंगे। परन्तु २२वें प्रक्रम से यहाँ य के सम्भाव्य मान दो से कम न आवेंगे इसलिये स्पष्ट है कि इस समीकरण के दो ही सम्भाव्य मूल आवेंगे जिनमें एक धनात्मक और एक ऋणात्मक होगा।

यदि  $\text{फ (य)} = \text{य}^2 + \text{प}_2\text{य} + \text{प}_3 = 0 \dots\dots (१)$  इसमें  $\text{प}_2$  और  $\text{प}_3$  दोनों धन संख्या हों तो यहाँ व्यत्यास का अभाव हुआ इसलिये इस समीकरण का कोई धनात्मक मूल न आवेगा। यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होगी।

ऊपर के समीकरण में यदि य के स्थान में  $-य$  का उत्थापन दें तो  $\text{फ}(-य) = -\text{य}^2 - \text{प}_2\text{य} + \text{प}_3 = 0 = \text{य}^2 + \text{प}_2\text{य} - \text{प}_3$  इसमें एक व्यत्यास हुआ इसलिये (१) समीकरण का एक ही मूल ऋणात्मक आवेगा। परन्तु २१वें प्रक्रम से सिद्ध है कि  $\text{फ (य)} = 0$  इसके मूलों में से एक अवश्य ऋणात्मक आवेगा। इसलिये दोनों नियमों के बल से स्पष्ट हुआ कि यहाँ अवश्य एक मूल ऋणात्मक होगा और वही एक कोई सम्भाव्य संख्या है। ऊपर दिया हुआ एक त्रिघात समीकरण है इसलिये इसके तीन मूल आवेंगे। तिनमें सिद्ध हो चुका है कि एक मूल ऋणात्मक सम्भाव्य संख्या होगा। इसलिये बाकी दो मूल अवश्य असंभाव्य संख्या होंगे।

फिर यदि  $\text{फ (य)} = \text{य}^2 - \text{प}_2\text{य} + \text{प}_3 = 0$  जहाँ  $\text{प}_2$  और  $\text{प}_3$  धन संख्या हैं तो यहाँ व्यत्यास की संख्या दो है इसलिये इस समीकरण के दो से अधिक धनात्मक मूल न आवेंगे और  $\text{फ}(-य) = \text{य}^2 + \text{प}_2\text{य} - \text{प}_3 = 0$  इसमें एक व्यत्यास है इसलिये  $\text{फ (य)} = 0$  इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।

परन्तु २१वें प्रक्रम से सिद्ध है कि इसका कम से कम एक मूल ऋणात्मक अवश्य आवेगा, इसलिये दोनों नियमों के मिलाने से अवश्य एक ही कोई ऋणात्मक मूल होगा। यह तो सिद्ध हुआ परन्तु बाकी दो मूलों के विषय में कुछ भी कहा नहीं जा सकता कि वे धनात्मक सम्भाव्य वा असम्भव संख्या होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति से काम नहीं चला क्योंकि उनकी युक्ति ने केवल इतना ही पता दिया कि  $f(y)=0$  इसके दो से अधिक धनात्मक मूल नहीं आवेंगे। इसलिये सम्भव है कि कोई मूल धनात्मक न हो। परन्तु यहाँ ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से एक नया समीकरण

$$x^4 - 16x^3 + 85x^2 + 20x - 87 = 0$$

ऐसा बनैगा जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों के अन्तरवर्ग के समान होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति वा २५वें प्रक्रम के २ प्रसिद्धार्थ से यदि  $20x - 87 = 0$  यह ऋण हो तो समीकरण का कोई मूल ऋणात्मक न आवेगा इसलिये  $f(y)=0$  इसका कोई मूल असम्भव संख्या न होगा। परन्तु यदि  $20x - 87 = 0$  यह धन होगा तब तो २१वें प्रक्रम से समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य ऋणात्मक होगा। इसलिये  $f(y)=0$  इसके दो मूल अवश्य असम्भव होंगे।

४६—यदि ध्यान देकर विचारो तो २५वें प्रक्रम से सब प्रसिद्धार्थ डेस्कार्टिस की युक्ति से निकल सकते हैं और २३वें प्रक्रम में जो सिद्धान्त है वह भी डेस्कार्टिस की युक्ति और २१-२२वें प्रक्रम के सिद्धान्त से सिद्ध हो सकता है।

४७—यदि यह विदित हो कि  $\text{फ (य)} = ०$  इस न घात के अधूरे समीकरण के सब मूल सम्भाव्य संख्या हैं और  $\text{फ (य)}$  में अन्त पद य से स्वतन्त्र है तो  $\text{फ (य)}$  के व्यत्यास  $\text{व्य}_१$  के तुल्य इस समीकरण के धनात्मक मूल और  $\text{फ (-य)}$  के व्यत्यास  $\text{व्य}_२$  के तुल्य ऋणात्मक मूल होंगे क्योंकि सब सम्भाव्य मूल  $\text{व्य}_१ + \text{व्य}_२$  इससे अधिक नहीं हो सकते (४५वाँ प्रक्रम देखो) और  $\text{व्य}_१ + \text{व्य}_२$  यह समीकरण के सबसे बड़े घात न संख्या से अधिक भी नहीं हो सकता (४३वाँ प्रक्रम देखो) परन्तु यह जानते हैं कि सब मूल सम्भाव्य हैं इसलिये वे इस न घात समीकरण में न संख्या के तुल्य होंगे। दोनों नियमों के मिलान से स्पष्ट है कि  $\text{व्य}_१ + \text{व्य}_२ = \text{न}$  ऐसा होगा। यदि ऐसा न हो तो एक नियम के मानने से दूसरे का व्यभिचार हो जायगा।

जब  $\text{व्य}_१ + \text{व्य}_२ = \text{न}$  तो धनात्मक मूल अवश्य  $\text{व्य}_१$  के समान होंगे। यदि कहो कि  $\text{व्य}_१$  के समान न होंगे तो ४५वें प्रक्रम से वे  $\text{व्य}_१$  से न्यून होंगे। इसलिये  $\text{व्य}_१$  से न्यून को  $\text{व्य}_१ + \text{व्य}_२ = \text{न}$  इसमें घटा देने से  $\text{व्य}_२$  से अधिक जो शेष बचैगा उसके समान ऋणात्मक मूल होंगे परन्तु ऊपर सिद्ध हो चुका है कि ऋणात्मक मूलों की संख्या  $\text{व्य}_२$  से अधिक नहीं हो सकती इसलिये धनात्मक मूलों की संख्या  $\text{व्य}_१$  से न्यून मानना असम्भव हुआ। इससे निश्चय हुआ कि  $\text{व्य}_१$  के ही समान धनात्मक मूलों की संख्या और  $\text{व्य}_२$  के समान ऋणात्मक मूलों की संख्या होती है।

जैसे यह जानने है कि  $\text{फ (य)} = \text{य}^३ - १६\text{य} + ३० = ०$  इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य हैं तो  $\text{फ (य)}$  में व्यत्यास की

संख्या दो हैं इसलिये समीकरण के दो मूल धनात्मक और फ (-य) इसमें एक व्यत्यास होने से एक ही मूल ऋणात्मक होगा ।

फ (य) = ० इस न घात समीकरण को य<sup>n</sup> इससे गुण देने से नया समीकरण न + त घात का होगा जिसके त मूल शून्य और ऊपर की युक्ति से सब सम्भाव्य मूलों की संख्या न के तुल्य वा फ (य) और फ (-य) इनके व्यत्यास व्य<sub>१</sub> और व्य<sub>२</sub> के योग के समान होंगी इसलिये यहाँ यदि त + न = म तो न = म - त = व्य<sub>१</sub> + व्य<sub>२</sub> । इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि फ (य) = ० इसमें यदि अन्तिम पद य से स्वतन्त्र न हो और यह विदित हो कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं तो य के सब से छोटी घात संख्या त के समान शून्य मूल और फ (य) और फ (-य) के व्यत्यासों के समान क्रम से धनात्मक और ऋणात्मक मूल होंगे ।

४८—जब ४५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि फ (य) = ० इस समीकरण के सम्भाव्य मूल फ (य) के व्यत्यास व्य<sub>१</sub> और फ (-य) के व्यत्यास व्य<sub>२</sub> के योग व्य<sub>१</sub> + व्य<sub>२</sub> से अधिक नहीं हो सकते तब सब मूलों के योग न संख्या में घटा देने से शेष न - (व्य<sub>१</sub> + व्य<sub>२</sub>) इससे अल्प असम्भाव्य मूल न होंगे । अल्प तम असम्भाव्य मूल इस न - (व्य<sub>१</sub> + व्य<sub>२</sub>) संख्या के समान होंगे ।

४९—किसी पूरे म घात समीकरण के आय<sup>m</sup> और काय<sup>n</sup> इन दो पदों के वश से फ (य) और फ (-य)<sup>n</sup> में जो व्यत्यास होंगे—

कल्पना करो कि किसी पूरे म घात समीकरण के आ-य<sup>म</sup> और का-य<sup>व</sup> पदों के बीच बहुत से पद जिनका योग  $२त_१$  सम संख्या है, उड़ गए हैं तो यदि म सम होगा तो इसमें  $२त_१ + १$  विषम संख्या घटा देने से शेष व यह विषम होगा और यदि म विषम हो तो  $२त_१ + १$  विषम को घटा देने से शेष व सम होगा। इसलिये य<sup>म</sup> और य<sup>व</sup> दोनों सम, विषम वा विषम, सम य के घात होंगे।

यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो +य के मान में एक व्यत्यास और -य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा। इसलिये दोनों स्थितिओं में आ-य<sup>म</sup> और का-य<sup>व</sup> इन दो पदों के वश से फ (य) और फ (-य) में जो व्यत्यास होंगे उनका योग एक होगा।

इस प्रकार से का-य<sup>व</sup> और आ-य<sup>म</sup> इन पदों के बीच भी यदि सम पद  $२त_२$  उड़ गए हों तो का-य<sup>व</sup> और आ-य<sup>म</sup> के वश से भी फ (य) और फ (-य) के व्यत्यासों का योग एक ही होगा। यों दो दो पदों के बीच व्यत्यासों का योग एक एक होगा। मानो कि दो दो पदों के बीच  $२त_१, २त_२, २त_३, \dots, २त_n$  पद उड़ गए हैं तो पूरे समीकरण के पद

$$म + १ = १ + (२त_१ + १) + (२त_२ + १) + (२त_३ + १) + \dots + (२त_n + १)$$

$$= १ + ग + (२त_१ + २त_२ + \dots + २त_n)$$

$$\therefore म = ग + (२त_१ + २त_२ + \dots + २त_n)$$

इसमें फ (य) और फ (-य) के व्यत्यासों के योग ग को घटा देने से कम से कम असम्भव मूल  $= २त_१ + २त_२ + \dots + २त_n =$  उड़े हुए पदों की संख्या।

कल्पना करो कि आ-य<sup>m</sup> और का-य<sup>n</sup> के बीच विषम पद  $2t_1 + 1$  उड़ गए हैं तो म यदि सम होगा तो उसमें सम  $2t_1 + 2$  घटा देने से व भी सम होगा और म यदि विषम होगा तो उसमें  $2t_1 + 2$  सम घटा देने से व भी विषम ही होगा। इसलिये यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो  $+y$  वा  $-y$  के वश से आ-य<sup>m</sup> और का-य<sup>n</sup> में एक भी व्यत्यास न होगा इसलिये व्यत्यासों का योग भी शून्य होगा और यदि आ और का विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो  $+y$  से एक और  $-y$  से भी एक व्यत्यास होगा इसलिये व्यत्यासों का योग दो होगा।

इसी प्रकार का-य<sup>n</sup> और आ-य<sup>m</sup> में भी का, वा के एक चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग शून्य और विरुद्ध चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग दो होगा।

यहाँ भी यदि दो दो पदों के बीच  $2t_1 + 1, 2t_2 + 1, \dots, 2t_n + 1$  पद उड़े हुए मानो और इन पर से पूरे समीकरण के पद बनाओ तो

$$\begin{aligned}
 m + 1 &= 1 + \left\{ (2t_1 + 1) + 1 \right\} + \left\{ (2t_2 + 1) + 1 \right\} \\
 &\quad + \dots + \left\{ (2t_n + 1) + 1 \right\} \\
 \therefore m &= \left\{ (2t_1 + 1) + 1 \right\} + \left\{ (2t_2 + 1) + 1 \right\} \\
 &\quad + \dots + \left\{ (2t_n + 1) + 1 \right\}
 \end{aligned}$$

इसमें यदि आ, का, खा इत्यादि में दो दो के एक और विरुद्ध चिन्ह के वश से व्यत्यासों का योग जो शून्य वा हो होते हैं घटाओ तो प्रत्येक खण्ड में शेष  $२त_१ + २, २त_२ + २, \dots$  इत्यादि वा  $२त_१, २त_२, \dots$  इत्यादि होंगे। इसलिये हर एक उड़े हुए भुण्ड के वश से आ, का, .... इत्यादि दो दो के एक चिन्ह के होने से  $२त_१ + २, \dots$  इत्यादि, और विरुद्ध चिन्ह के होने से  $२त_१, \dots$  इत्यादि कम से कम असम्भव मूल होंगे।

( १ ) जैसे  $य^२ - य^३ - २ = ०$  इसमें पहले दो पदों के बीच चार पद और दूसरे दो पदों के बीच दो पद उड़ गए हैं और ये सम हैं इसलिये इनके योग  $४ + २$  व से कम इस समीकरण के मूल असम्भव न होंगे।

( २ )  $य^४ - २य^३ - ४य - २ = ०$  इसमें पहिले दो पदों के बीच विषम ३ पद उड़ गए हैं और दोनों पदों के गुणक विरुद्ध चिन्ह के हैं इसलिये उनके वश से कम से कम  $३ + १ - २ = २$  समीकरण के असम्भव मूल हुए। दूसरे दो पदों  $- २य^३, - ४य$  इनके बीच एक पद विषम उड़ गया है और इन दोनों के गुणक एक चिन्ह के हैं इसलिये इनके वश से कम से कम  $३ + १ - ० = २$  समीकरण के असम्भव मूल हुए। इसलिये दिए हुए समीकरण के मूल इन दोनों के योग चार से कभी कम असम्भव न होंगे।

( ३ ) और  $य^६ - ३य^४ - २ = ०$  इसमें पहिले दो पदों के बीच चार पद उड़ गए हैं और ये सम हैं इसलिये इनके वश से समीकरण के ४ असम्भव मूल हुए और  $- ३य^४, - २$ , इन

दोनों के बीच ३ पद उड़े हैं और ये विषम और दोनों पदों के गुणक एक जाति के हैं इसलिये इनके वश से  $(२त_१ + १) + १ = २ + १ = ४$  असम्भव मूल हुए। इसलिये दोनों के योग  $\infty$  से कम समीकरण के असम्भव मूल न होंगे।

इसी प्रकार और उदाहरणों में जान लेना चाहिए।

५०—४६वें प्रक्रम से स्पष्ट होता कि फ़ (य) और फ़ (—य) के व्यत्यासों के योग  $व्य_१ + व्य_२$  इसको यदि समीकरण की घात संख्या म में घटाओ तो शेष  $म - व्य_१ - व्य_२$  यह सर्वदा सम ही रहता है इसलिये २७वें प्रक्रम की युक्ति से कह सकते हो कि किसी फ़ (य)  $= ०$  इस म घात समीकरण में फ़ (य) के व्यत्यास  $व्य_१$  और फ़ (—य) के व्यत्यास  $व्य_२$  के योग  $व्य_१ + व्य_२$  को म में घटाने से शेष  $म - व्य_१ - व्य_२$  से २, ४, ६ इत्यादि सम संख्या अधिक समीकरण के असम्भव मूल होंगे वा कम से कम  $म - व्य_१ - व्य_२$  इसके तुल्य असम्भव मूल होंगे। इसलिये इसमें जिस इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से न्यून और सैक इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से अधिक हो तो उस इष्ट गुणित २ के जोड़ देने से जो म से न्यून संख्या हुई है उससे अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते।

जैसे ऊपर के प्रक्रम के (३) उदाहरण में कम से कम असम्भव मूल की संख्या  $= म - व्य_१ - व्य_२ = \infty$  आई है इसमें एक गुणिस २ के जोड़ने से १० संख्या  $म = ६$  से अधिक होती है इसलिये  $\infty$  से अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते। दोनों नियमों के मिलान से सिद्ध होता है कि यहाँ अवश्य ही



असम्भव मूल = आवेंगे इसलिये इसे म में घटा देने से निश्चय हुआ कि यहाँ एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा ।

इसी प्रकार ( २ ) उदाहरण में सिद्ध होता है कि ६ से अधिक असम्भाव्य मूल न होंगे इसलिये इसे  $m=9$  में घटा देने से निश्चय हुआ कि इस समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा । यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होती है ।

विद्यार्थियों को चाहिए कि इस प्रकार से जिस समीकरण में जैसा सम्भव हो विचार कर धनर्ण मूलों का पता लगावें ।

सर और व्यत्यास के स्मरणार्थ श्लोक ।

आवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे स सरसङ्गतः ।

निवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे व्यत्यास सङ्गतः ॥ १ ॥

दोहा

पिछले पद के चिन्ह हो जेहि पद में सर सोय ।

नित्र चिन्ह जेहि में वसै बुध व्यत्यास सो होय ॥ १ ॥

धनर्णमूल के स्मरणार्थ श्लोक ।

व्यत्यासमानादधिकानि न स्युर्नूनस्वमूचानि समीकृतौ हि ।

सराख्यमानादधिका ऋणाख्यमितिस्तथा पूर्ण समीकृतौ न ॥ २ ॥

दोहा

समीकरण के मूल धा व्यत्यासाधिक नाहिं ।

ऋणमिति सर से अधिक नहिं पूर्ण समीकृति माहिं ॥ २ ॥

## अभ्यास के लिये प्रश्न

- ( १ ) क्रमिक पद किसे कहते हैं।
- ( २ ) सर और व्यत्यास किसे कहते हैं।
- ( ३ ) यदि  $f(y)=0$  यह पूर्ण समीकरण हो तो  $f(y)$  में जितने सर होंगे उतने ही  $f(-y)$  में व्यत्यास होंगे, इसे सिद्ध करो।
- ( ४ ) सिद्ध करो कि किसी अधूरे  $f(y)=0$  इस न घात समीकरण में  $f(y)$  और  $f(-y)$  के व्यत्यासों का योग न से अधिक नहीं हो सकता।
- ( ५ ) दिखाओ कि  $y^2 - 2y^2 + 1=0$  इसके कम से कम दो असम्भव मूल होंगे।
- ( ६ ) साबित करो कि  $y^4 - 3y^4 + y^2 - 2=0$  इसके अधिक से अधिक ६ असम्भव मूल होंगे।
- ( ७ ) डेकार्टिस की युक्ति की उपपत्ति क्या है।
- ( ८ )  $f(y)=0$  इस अधूरे न घात समीकरण के सब मूल यदि सम्भाव्य हों तो सिद्ध करो कि  $f(y)$  और  $f(-y)$  के व्यत्यासों का योग न के समान होगा।
- ( ९ ) न घात का  $f(y)=0$  यह पूरा और  $f(y)=0$  यह अधूरा ये दो समीकरण हैं जिनके सब मूल सम्भाव्य हैं और  $f(y)$  और  $f(y)$  के व्यत्यास भी तुल्य हैं तो दिखाओ कि  $f(-y)$  के व्यत्यास  $f(y)$  के सर के तुल्य होंगे।

## ५-तुल्यमूल

५१—कभी कभी ऐसा भी हो सकता है कि समीकरण के बहुत से मूल तुल्य ही आवें। जैसे  $f(y) = (y-1)^3 = 0$  चा  $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = (y-1)(y-1)(y-1) = 0$ । स्पष्ट है कि इसके तीनों मूल समान ही हैं। इसलिये समीकरणों में इस बात की परीक्षा करना कि इनके कितने मूल तुल्य हैं यह आवश्यक हुआ। मान लो कि मूल  $\alpha_1$  त-वार,  $\alpha_2$  थ-वार,  $\alpha_3$  द-वार इत्यादि आए हैं तो ऐसी स्थिति में  $f(y) = p_0 (y-\alpha_1)^t (y-\alpha_2)^t (y-\alpha_3)^d \dots = 0$  इस प्रकार का समीकरण होगा।

५२—अकरणीगत अभिन्न अव्यक्त  $y$  का फल  $f(y)$  यदि  $f(y) \times f(y) \times f(y) \times \dots$  इसके बराबर है तो  $f'(y)$  प्रथमोत्पन्न फल  $f'(y) \times f(y) \times f(y) + f'(y) \times f(y) \times f(y) \dots + f'(y) \times f(y) \times f(y) \dots + \dots$  इत्यादि के समान होगा।

कल्पना करो कि  $f(y) = s = f(y) \times f(y)$

तो १०वें प्रक्रम से  $s' = f(y + c) \times f(y + c)$

और  $s' - s = f(y + c) \times f(y + c) - f(y) \times f(y)$

$$\begin{aligned}
 &= \text{फा} (य + च) \times \text{फि} (य + च) \\
 &\quad - \text{फा} (य + च) \times \text{फि} (य) + \text{फा} (य + च) \times \text{फि} य \\
 &\quad - \text{फा} (य) \times \text{फि} (य) \\
 &= \text{फा} (य + च) \left\{ \text{फि} (य + च) - \text{फि} (य) \right\} \\
 &\quad + \text{फि} (य) \left\{ \text{फा} (य + च) - \text{फा} (य) \right\}
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों में च का भाग देने से

$$\begin{aligned}
 \frac{स' - स}{च} &= \text{फा} (य + च) \left\{ \frac{\text{फि} (य + च) - \text{फि} (य)}{च} \right\} \\
 &\quad + \text{फि} (य) \left\{ \frac{\text{फा} (य + च) - \text{फा} (य)}{च} \right\}
 \end{aligned}$$

च को शून्य मानने से

$$\frac{स' - स}{च} = \text{फा}' (य) = \text{फि}' (य) \times \text{फा} (य) + \text{फा}' (य) \times \text{फि} (य), \dots (१)$$

यदि फा (य) वा फि (य),  $(य - अ)^n$  इस प्रकार का हो तो मान लो कि

$स = (य - अ)^n$  । इसलिये १०वें प्रक्रम से

$$\therefore स' = (य - अ + च)^n = \left\{ (य - अ) + च \right\}^n$$

$$= (य - अ)^n + n \cdot च (य - अ)^{n-1} + अ० च^२ + अ१ च^३ + \dots$$

$$\therefore \frac{स' - स}{च} = n (य - अ)^{n-1} + अ० च + अ१ च^२ + \dots$$

को शून्य मानने से

$$फा'(y) = n(y-a)^{n-1} = \frac{n(y-a)^n}{(y-a)} = \frac{n फा(y)}{y-a}, \dots\dots\dots (२)$$

यदि  $फ(y) = फा'(y) \times फि'(y) \times फी'(y) \dots\dots\dots$  तो

(१) समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि

$$फ(y) = फा'(y) \times फि'(y) \times फी'(y) + फि'(y) \times फा(y) \times फी'(y) + \dots\dots\dots (३)$$

५३—यदि  $फ(y)$  और  $फ'(y)$  में अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो  $फ(y) = 0$  के तुल्य-मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे ।

५१वें प्रक्रम के समीकरण को जिसके अनेक मूल तुल्य आते हैं लेने से

$$फ(y) = प_0 (y-a_1)^t (y-a_2)^y (y-a_3)^d \dots\dots\dots$$

५२वें प्रक्रम के (२) और (३) समीकरण से

$$फ'(y) = प_0 \left\{ t (y-a_1)^{t-1} (y-a_2)^y (y-a_3)^d \dots\dots\dots + y (y-a_2)^{y-1} (y-a_1)^t (y-a_3)^d \dots\dots\dots + d (y-a_3)^{d-1} (y-a_1)^t (y-a_2)^y \dots + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{त फ (य)}{य-अ_1} + \frac{ध फ (य)}{य-अ_2} + \frac{द फ (य)}{य-अ_3} + \dots\dots\dots \\
 &= फ (य) \left\{ \frac{त}{य-अ_1} + \frac{ध}{य-अ_2} + \frac{द}{य-अ_3} + \dots\dots\dots \right\} \\
 &= प. (य-अ_1)^{त-1} (य-अ_2)^{ध-1} (य-अ_3)^{द-1} \dots\dots\dots \\
 &\quad \left\{ \frac{त}{य-अ_1} + \frac{ध}{य-अ_2} + \frac{द}{य-अ_3} + \dots\dots\dots \right\}
 \end{aligned}$$

इस से स्पष्ट है कि फ' (य) के प्रत्येक पद में गुण्य गुणकरूप अव्यक्त खण्ड  $(य-अ_1)^{त-1} (य-अ_2)^{ध-1} (य-अ_3)^{द-1} \dots\dots$  यह रहेगा। इसलिये ऐसी स्थिति में फ (य) और फ' (य) में अवश्य अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन निकलेगा जिससे सिद्ध होता है कि यदि फ (य) और फ' (य) में कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो अवश्य फ (य)=० के तुल्य मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे क्योंकि जब त=ध=द=१ तब तुल्य मूल न आवेंगे और तब फ' (य) में भी  $(य-अ_1)^{त-1} (य-अ_2)^{ध-1} (य-अ_3)^{द-1} = १$  वह होने से

$$\begin{aligned}
 फ' (य) &= प. \left\{ (य-अ_1) (य-अ_2) \dots\dots\dots \right. \\
 &\quad \left. + (य-अ_1) (य-अ_2) \dots + (य-अ_1) (य-अ_2) \dots + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

जिसमें फ (य) का कोई गुण्य गुणकरूप अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन आवे।

जैसे यदि  $फ (य) = य^३ - ६य^२ + २६य - ३६य + १ = ०$   
 यहाँ  $फ (य) = ४य^३ - २७य^२ + २८य - ३६$

क्रिया करने से  $f(y)$  और  $f'(y)$  का महत्तमापवर्त्तन  $y-1$  आता है इससे जान पड़ा कि  $f(y)$  में  $(y-1)^2$  यह एक गुणकरूप खरड है।

$$\begin{aligned}\text{इस पर से } f(y) &= (y-1)^2 (y^2 - 3y + 2) \\ &= (y-1)^2 (y-1)(y-2) = 0\end{aligned}$$

इसलिये  $y$  के मान, १, १, १, २ ये हुए।

$$\text{इसी प्रकार } f(y) = 2y^3 - 2y^2 + 18y^2 - 24y + 24 = 0$$

इसमें  $f(y)$  और  $f'(y)$  का महत्तमापवर्त्तन  $y-1$  आता है इसलिये  $f(y) = (y-1)^2 (2y^2 + 6) = 0$ । इसमें  $y$  के मान १, १,  $+\sqrt{-3}$ ,  $-\sqrt{-3}$  ये हुए।

५४—२६वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$f(y) = p \cdot (y - a_1) (y - a_2) (y - a_3) \dots$$

$$f_a(y) = p \cdot (y - a'_1) (y - a'_2) (y - a'_3) \dots$$

इनका रूप जो ऊपर गुण्य गुणक रूप खरड में दिखलाया है वह एक ही यही है दूसरा इसके अतिरिक्त नहीं है जिसमें  $(y - a_1) \dots$  इत्यादि खरडों के एकाधिक घात हों वा  $(y - a_1) \dots$  इत्यादि खरडों में से कई एक न हों।

(अब  $y$  का एक फल  $f(y)$  ऐसा हो जिसमें  $y$  का सब से बड़ा घात हो और वह  $f(y)$ ,  $f_a(y)$  को निःशेष करता हो तो  $f(y)$  उन अव्यक्त के एक घात खरडों के घात के तुल्य हागा जो  $f(y)$  और  $f_a(y)$  में उभयनिष्ठ हैं।

इसी  $f(y)$  को  $f(y)$  और  $f_a(y)$  का महत्तमापवर्त्तन कहते हैं।

५५—५३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यदि  $f(y)$  में  $(y-अ_१)^n$  एक खण्ड रहेगा तो  $f'(y)$  में  $(y-अ_१)^{n-१}$  खण्ड रहेगा। इसलिये  $f(y)=०$  इसके यदि  $n$  मूल जो  $अ$  के समान होंगे तो  $f'(y)=०$  इसके  $n-१$  मूल  $अ$  के समान होंगे। इसलिये यदि  $n-१$  यह रूप से अधिक हो तो  $f'(y)$  और  $f''(y)$  में भी कोई अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्तन होगा और पूर्व युक्ति से  $f''(y)=०$  इसके  $n-२$  मूल  $अ_१$  के समान होंगे। इस प्रकार से आगे भी क्रिया करते जाओ तो सिद्ध होगा कि  $f(y)=०$  जिसके  $(y-अ_१)^n$  खण्ड हों जिनके कारण समीकरण के  $n$  तुल्य मूल  $अ_१$  के समान आते ह तो  $f'(y)$ ,  $f''(y)$ , .....  $f^{n-१}(y)$  सब शून्य के समान होंगे यदि  $y=अ$ ।

जैसे यदि  $f(y)=y^२-२y^२+२y^३+८y^२-७y+२$

$f'(y)=२y-८y^२+६y^२+१६y-७$

$f''(y)=२०y^३-२४y^२+१२y+१६$

$f'''(y)=६०y^२-४८y+१२$

.....=.....

इनमें यदि  $y=१$ , तो  $f(y)$ ,  $f'(y)$ ,  $f''(y)$ ,  $f'''(y)$ ..... इस श्रेणी में आदि के तीन शून्य होते हैं परन्तु  $f''(y)$ ..... इत्यादि शून्य के तुल्य नहीं होते इसलिये स्पष्ट हुआ कि  $f(y)$  में  $(y-१)^३$  यह एक खण्ड है इस पर से

$f(y)=(y-१)^३ (y^२+y-२)$ ।

यदि यह जानते हैं कि  $f(y)=y^३+त_२y^२+त_१y+त_०=०$  इसके तीन मूल तुल्य हैं तो  $त_२$ ,  $त_१$  और  $त_०$  में आपस में क्या सम्बन्ध है।



$$\text{यहाँ फ (य) = य}^4 + \text{त}_2 \text{य}^2 + \text{त}_3 \text{य} + \text{त}_4$$

$$\text{फ}' (\text{य}) = 4\text{य}^3 + 2\text{त}_2 \text{य} + \text{त}_3$$

$$\text{फ}'' (\text{य}) = 12\text{य}^2 + 2\text{त}_2$$

इसलिये फ'' (य) को शून्य के तुल्य मानने से

$$\text{य}^2 = -\frac{2\text{त}_2}{12} = -\frac{\text{त}_2}{6} \dots\dots\dots (१)$$

इसका उत्थापन फ (य) = ० और फ' (य) = ० में देने से

$$-\frac{4\text{त}_2^2}{36} + \text{त}_3 \text{य} + \text{त}_4 = 0 \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{य} \left( -\frac{2\text{त}_2}{3} + 2\text{त}_2 \right) + \text{त}_4 = 0 \dots\dots\dots (३)$$

$$(३) \text{ से } \text{य} = -\frac{3\text{त}_4}{4\text{त}_2} \dots\dots\dots (४)$$

इसका उत्थापन (२) में देने से

$$\text{त}_4 - \frac{3\text{त}_2^2}{4\text{त}_2} - \frac{4\text{त}_2^2}{36} = 0 \dots\dots\dots (५)$$

(१) और (४) से

$$\text{त}_4 = -\frac{3\text{त}_2^2}{27} \dots\dots\dots (६)$$

इसका उत्थापन (५) में देने से

$$\text{त}_4 = -\frac{\text{त}_2^2}{12} \dots\dots\dots (७)$$

इस प्रकार (६)वँ और (७)वँ से परस्पर संबन्ध जान पड़ा। इसलिये ऐसे जिस समीकरण में गुणकों में ऐसे संबन्ध बाएँ जायँ तो कहेंगे कि समीकरण के तीन मूल अवश्य तुल्य आवँगे।

५६— $f(y) = 0$  में जितने एक घात के खण्ड एक बार, दो बार.....त बार आए हों उनसे मूल जानना।

कल्पना करो कि  $f(y) = 0$  में जितने एक घात के खण्ड एक एक बार हैं उनका मान  $y_1$ , जितने दो दो बार हैं उनका मान  $y_2$ , ... जितने त त बार हैं उनका मान  $y_t$  और जितने म म बार आए हैं उनका मान  $y_m$  तो

$$f(y) = y_1 y_2 y_3 \dots y_{t-1} y_m^m$$

इस में मानों कि  $f(y)$  और  $f'(y)$  का महत्तमापवर्त्तन  $f_1(y)$  है तो

$$f_1(y) = y_2 y_3 \dots y_{t-1} y_m^{m-1}$$

फिर मान लो कि  $f_1(y)$  और  $f'_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन  $f_2(y)$  है

$$\text{तो } f_2(y) = y_3 y_4 \dots y_{t-1} y_m^{m-2}$$

इसी प्रकार  $f_2(y)$  और  $f'_2(y)$  इत्यादि के महत्तमापवर्त्तन मानते जाओ

$$\text{तो } f_3(y) = y_4 y_5 \dots y_{t-1} y_m^{m-3}$$

$$f_4(y) = y_5 \dots y_{t-1} y_m^{m-4}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$f_{m-1}(y) = y_m$$

$$f_m(y) = 1$$

$f(y), f_1(y), f_2(y), \dots, f_m(y)$  में पूर्व पूर्व में  
एक पर का भाग देने से

$$\frac{f(y)}{f_1(y)} = y_1 y_2 \dots y_m = f_1(y)$$

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)} = y_2 y_3 \dots y_m = f_2(y)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{f_{m-1}(y)}{f_m(y)} = y_m = f_m(y)$$

अब इन पर से

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)} = y_1, \frac{f_2(y)}{f_3(y)} = y_2, \dots, \frac{f_{m-1}(y)}{f_m(y)} = y_{m-1}$$

और  $f_m(y) = y_m$  ।

अब  $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_m = 0$  इन समीकरणों से  
 $f(y) = 0$  इसके सब मूलों का पता लग जायगा जो कि एक  
बार, दो बार इत्यादि आये हैं ।

साधारण रीति से स्पष्ट है कि  $y_t = 0$  इसका कोई एक  
मूल  $f(y) = 0$  इसके उस मूल के तुल्य है जो  $f(y) = 0$   
इसमें  $t$  बार आये हैं ।

इसकी व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिख-  
लाते हैं:—

मान लो कि

$$f(y) = y^8 - 8y^7 + 2y^6 + 8y^5 + 6y^4 - 6y^3 - 12y^2 - 2y^2 + 8y + 8$$

तो बीजगणित की रीति से  $f(y)$  और  $f'(y)$  का महत्तमापवर्त्तन

$$f_1(y) = y^4 - 3y^3 + y^2 + 4$$

$f_1(y)$  और  $f'_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन

$$f_2(y) = y - 2$$

और  $f_2(y)$  और  $f'_2(y)$  का महत्तमापवर्त्तन

$$f_3(y) = 1$$

इन पर से

$$\frac{f(y)}{f_1(y)} = y^4 - y^3 - 3y^3 - y^2 + y + 2 = f_{1,1}(y)$$

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)} = y^3 - y^2 - y - 2 = f_{2,1}(y)$$

$$\text{और } \frac{f_2(y)}{f_3(y)} = y - 2 = f_{3,1}(y)$$

इन पर से

$$\frac{f_{1,1}(y)}{f_{2,1}(y)} = y_1 = y^2 - 1$$

$$\frac{f_{2,1}(y)}{f_{3,1}(y)} = y_2 = y^2 + y + 1$$

$$f_{3,1}(y) = y_3 = y - 2$$

$$\text{इसलिये } f(y) = (y^2 - 1)(y^2 + y + 1)^2(y - 2)^2$$

और  $f(x)=0$  इसके मूल  $1, -1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$   
 $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, 2, 2, 2$  रूप।

इस प्रकार के स्मरणार्थ श्लोक

फलतज्जादि फलोत्थं महत्तमावर्त्तनं तदन्यफलम् ।  
 एवं ततस्तदन्यं साध्य यावद्भवेद्दूथम् ॥ १ ॥  
 फलानि पङ्क्त्यां विनिवेश्य पूर्व तत्तत्पराप्तं कलिका भवन्ति ।  
 पूर्वा पराप्ता कलिका भवन्ति पुष्पाणि भूद्वयादिसमाह्वयानि ॥ २ ॥  
 येषां स्वसंख्यासमघातकानां हतिर्भवेत् स्त्रीयफलस्य मानम् ।  
 प्रकल्प्य तच्छून्यसमं विपश्चित्तुल्यानि मूलानि विचारयेद्दि ॥ ३ ॥

दोहा

फल अरु फल को प्रथम फल ता विच होय महान ।  
 जो अपवर्त्तन अन्य फल सोई होत सुगान ॥ १ ॥  
 यों लावहु बहु ऊपर फल जब तक होय न एक ।  
 एक तुल्य एक पक्ति में राखहु सब सुविवेक ॥ २ ॥  
 पर से भागहु पूर्व को कलिका ताको नाम ।  
 पर कलिका हत पूर्व सो पुष्प होत शुभ काम ॥ ३ ॥  
 पहिलो दूजो तीसरो येहि क्रम में तेहि जान ।  
 अपनी संख्या के सदृश तिन को घात सुगान ॥ ४ ॥  
 ताके बध सम जानिए अपनी फल हे मीत ।  
 ताहि शून्य सम मानि सम भूच जानिए चीत ॥ ५ ॥

## अभ्यास के लिये प्रश्न ।

( १ ) जब  $f(y)$  और  $f'(y)$  का कोई महत्तमापवर्जन अव्यक्तात्मक हो तो दिखलाओ कि  $f(y)=0$  इसके एकाध तुल्य मूल अवश्य होंगे ।

( २ ) यदि  $f(y)=0$  इसके मूल  $a_1, a_2, \dots, a_n$  हों तो सिद्ध करो

$$f'(y) = f(y) \left( \frac{1}{y-a_1} + \frac{1}{y-a_2} + \dots + \frac{1}{y-a_n} \right)$$

( ३ )  $y^n - k y^2 + l = 0$  इसमें दिखलाओ कि  $k$  और  $l$  में क्या सम्बन्ध होगा यदि मूल तुल्य हों ।

( ४ )  $y^4 - p_2 y + p_3 = 0$  इसके तीन तुल्य मूल नहीं आ सकते यह सिद्ध करो ।

( ५ )  $y^4 + p_2 y^2 + p_4 = 0$  इसके तीन तुल्य मूल नहीं आ सकते यह सिद्ध करो ।

( ६ )  $y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$  इसके दो मूल  $a_1$  के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि

$p_1 y^{n-1} + 2p_2 y^{n-2} + 3p_3 y^{n-3} + \dots + n p_n = 0$  इसका भी एक मूल  $a_1$  के तुल्य होगा ।

( ७ )  $y^4 + p_2 y^2 + p_4 = 0$  इसके दो मूल यदि समान हैं तो सिद्ध करो कि वह मूल अवश्य

$$y^2 - \frac{2p_2}{4p_4} + \frac{4p_4}{4p_4} - \frac{4p_4}{4p_4} = 0 \text{ इसके एक मूल के तुल्य होगा ।}$$

( ८ ) यदि नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल तुल्य हों तो उनको निकालो ।

$$(१) y^2 - y - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \quad |$$

$$(२) y^2 - y + \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \quad |$$

$$(३) y^2 - y^2 - ८y + १२ = 0 \quad |$$

$$(४) y^2 + ८y^2 + २०y + १६ = 0 \quad |$$

$$(५) y^2 - ४y^2 - ८y + ४८ = 0 \quad |$$

$$(६) y^2 - ३y^2 - ६y + २७ = 0 \quad |$$

$$(७) y^2 - ११y^2 + १८y - ८ = 0 \quad |$$

$$(८) y^2 - ७y^2 + १३y^2 + ३y - १८ = 0 \quad |$$

$$(९) y^2 - \frac{१}{२}y + \frac{१}{४} = 0 \quad |$$

$$(१०) y^2 - १३y^2 + ६७y^2 - १७१y^2 + २१६y - १०८ = 0$$

$$(११) २y^2 - १२y^2 + १६y^2 - ६y + ६ = 0 \quad |$$

$$(१२) y^2 - y^2 - २y^2 + २y^2 + y - १ = 0 \quad |$$

$$(१३) y^2 - ३y^2 + ६y^2 - ३y^2 - ३y + २ = 0 \quad |$$

$$(१४) y^2 - २y^2 - ६y^2 + ८y^2 + १७y^2 - ६y^2 - २०y - ८ = 0 \quad |$$

$$(१५) y^2 - ३y^2 - ४y^2 + १४y^2 + ६y^2 - २३y^2 - १४y^2 + १२y + ८ = 0 \quad |$$

## ६-समीकरण के मूलों की सीमा

५७—चतुर्धात के ऊपरवाले समीकरणों के मूलों का जानने के लिये बीजगणित से कोई साधारण रीति नहीं पाई जाती। ऐसी स्थिति में समीकरण के मूल अटकल से निकासे जाते हैं। अर्थात् पहिले अव्यक्त का कोई एक मान कल्पना करते हैं, फिर उसका उत्थापन देने से यदि  $f(y)$  शून्य के तुल्य हुआ तो कहेंगे कि अटकल से माना गया अव्यक्त का मान  $f(y) = 0$  इसमें ठीक है। यदि उस कल्पित मान का उत्थापन देने से  $f(y)$  शून्य के तुल्य नहीं हुआ तो कहेंगे कि यह अव्यक्त का मान नहीं है। फिर अव्यक्त का दूसरा मान मान कर  $f(y)$  में उत्थापन देना होगा यों बार बार कर्म करने से अव्यक्त के जिस कल्पित मान का उत्थापन देने से जब  $f(y)$  शून्य के तुल्य होगा तब कहेंगे कि  $f(y) = 0$  इसमें वह अव्यक्त का मान है।

ऊपर की क्रिया करने में यदि यह मालूम हो जाय कि अव्यक्त का मान कोई ज्ञात संख्या  $a$  से बड़ा वा  $b$  से अल्प नहीं है तो अव्यक्त के मान जानने के लिये जो असकृत्कर्म कहा है उसमें अटकल से अव्यक्त का मान जो  $a$  से अल्प वा  $b$  से अधिक मान कर कर्म करेंगे तो उसमें कम परिश्रम पड़ेगा क्योंकि पहिले अव्यक्त के मान  $a$  से अधिक वा  $b$  से अल्प मानने में जो व्यर्थ परिश्रम पड़ता था और समय भी नष्ट होता था उनका अब बचाव होगा। इसलिये इस अध्याय में समीकरण के मूल किन दो संख्याओं के भीतर होंगे इसका विचार किया जायगा। इस अध्याय में मूल शब्द से सर्वत्र संभाव्य मूल समझना चाहिए।



**सीमा**—सीमा से ऐसा समझना चाहिए जैसे कल्पना करो कि अ— स्थान से कोई मनुष्य व— स्थान के लिये रवाना हुआ। वहाँ पहुँचने पर देखा कि अंगुलियों में अंगूठियाँ नहीं हैं, कहीं राह में गिर पड़ीं। अंगूठियाँ जहाँ जहाँ गिरी होंगी वे स्थान अवश्य अ और व के अन्तर्गत हैं। इसलिये अ और व को उन स्थानों की सीमा कहेंगे। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के भीतर समीकरण के सभी मूल आ जायें उन संख्याओं को उन मूलों की सीमा कहते हैं। यदि कहा जाय कि अमुक संख्या समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा है तो इससे यह समझना चाहिए कि समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल उस संख्या से अधिक नहीं हो सकता।

५८—सब से बड़े संख्यात्मक ऋण गुणक में एक जोड़ देने से साधारण स्वरूपवाले समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा होती है।

यहाँ साधारण स्वरूप वा रूपवाले समीकरणों में उन समीकरणों को समझना चाहिए जिनमें  $y^n$  इसका गुणक एक एक हो।

मानलो कि  $F(y) = 0$  यह न घात का एक साधारण रूपवाला समीकरण है जिसमें सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक  $p$  है तो समीकरण के आदि पद को छोड़ सब में ऋणात्मक गुणक  $p$  कर देने से

$$F(y) > y^n - p (y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)$$

$$\text{वा फ (य)} > \text{य}^{\text{न}} - \text{प} \frac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १}$$

इसलिये यदि  $\text{य} > १$  तो

$$\text{य}^{\text{न}} - १ - \text{प} \frac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १} \text{ इससे फ (य) बहुत बड़ा होगा ।}$$

$$\text{यदि } \text{य}^{\text{न}} - १ - \text{प} \frac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १} \text{ यह वा } (\text{य}^{\text{न}} - १) \left( १ - \frac{\text{प}}{\text{य} - १} \right)$$

यह धन होगा तो फ (य) भी धन होगा । परन्तु जब  $\text{य} > १$  तब एक खण्ड  $\text{य}^{\text{न}} - १$  यह सर्वदा धन ही रहेगा ।

इसलिये यदि  $१ - \frac{\text{प}}{\text{य} - १}$  यह धन होगा तो फ (य) सर्वदा धन होगा परन्तु  $\text{य} - १ > \text{प}$  वा  $\text{य} > \text{प} + १$  होता है तो  $१ - \frac{\text{प}}{\text{य} - १}$  यह सर्वदा धन होता है ।

इसलिये जब  $\text{य} > \text{प} + १$  तो फ (य) सर्वदा धन रहेगा । यहाँ कहेंगे कि धनात्मक मूल  $\text{प} + १$  इस से छोटे हैं । इसलिये समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा  $\text{प} + १$  सिद्ध होती है ।

जैसे फ (य) =  $\text{य}^२ - २\text{य}^२ + ३\text{य}^३ - ४\text{य}^४ - २\text{य} - ६ = ०$  ऐसा कल्पना किया जाय तो इसमें सबसे बड़ा ऋण गुणक ६ है इसलिये धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा  $६ + १ = ७$  हुई ।

५६—यदि फ (य) = ० इसमें  $\text{य} = -१$  तो स्पष्ट है कि धन युक्ति से १ के धन मानों की जो प्रधान सीमा होगी वही य के ऋण मानों की प्रधान सीमा होगी । परन्तु फ (य) = ०

यह यदि कोई विषय न घात का समीकरण हो तो  $(-r)^n = -r^n$  । इसलिये  $f(-r) = 0$  इसके सब पदों को शून्य के पक्ष में ले जाकर तब ऊपर की युक्ति से सीमा का विचार करना चाहिए ।

जैसे गत प्रक्रम के समाकरण में यदि  $y = -r$  माना जाय तो उसका स्वरूप

$$-r^2 + 2r^3 - 3r^4 - 4r^5 + 5r - 6 = 0 \text{ ऐसा हुआ ।}$$

दूसरे पक्ष में ले जाने से

$$r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 - 5r + 6 = 0 \text{ ऐसा हुआ ।}$$

इसमें सबसे बड़ा ऋणात्मक गुणक ५ इसलिये  $r$  के धन मानों की वा  $y$  के ऋण मानों की प्रधान सीमा  $-(5+1) = -6$  हुई । इसलिये  $f(y) = 0$  इस समीकरण के सभी मूल  $-6$  और ० इन्हीं दो संख्याओं के भीतर हैं ।

यदि  $f(y) = 0$  इस समीकरण में सब से बड़ा गुणक  $m$  हो तो स्पष्ट है कि चिन्ह विचार के बिना पूर्व युक्ति से कह सकते हो कि  $f(y) = 0$  इसके सब मूल  $-(m+1)$  और  $m+1$  इनके भीतर हैं ।

६०—न घात के साधारण स्वरूप वाले समीकरण में यदि सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक  $p$  हो और ऋणात्मक गुणक वाले पद में अव्यक्त का सबसे बड़ा घात  $n-t$  हो तो घनात्मक मूलों की प्रधान सीमा  $1 + \sqrt[n-t]{n}$  होती है ।

$f(y) = 0$  इस न घात के समीकरण का यदि ऐसा रूप हो कि आदि पद से लेकर  $t-1$  पद तक के गुणक धन हों और अवशिष्ट पदों में सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक  $p$  हो तो स्पष्ट है कि  $f(y)$  यह  $y^n - p (y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)$  इससे बड़ा होगा अर्थात्  $y^n - p \frac{y^{n-t+1} - 1}{y - 1}$  इससे बड़ा होगा और

$\frac{(y-1)^n (y-1) - p (y^{n-t+1} - 1)}{y - 1}$  इससे बहुत बड़ा होगा।

यदि  $y > 1$  तो  $f(y)$  यह  $\frac{(y-1)^n (y-1) - p \cdot y^{n-t+1}}{y - 1}$  इससे और भी बहुत बड़ा होगा। इसलिये यदि  $\frac{(y-1)^{n+1} - p \cdot y^{n-t+1}}{y - 1}$  यह वा  $\frac{y^{n-t+1}}{y - 1} \left\{ (y-1)^t - p \right\}$  बड़ा

अथवा  $(y-1)^t - p$  यह धन होगा तो  $f(y)$  भी धन होगा। परन्तु यदि  $(y-1)^t = p$  अथवा  $y = 1 + p^{\frac{1}{t}}$  तो  $(y-1)^t - p$  यह धन होता है। इसलिये  $y, 1 + \sqrt[t]{p}$  इसके तुल्य वा अधिक होगा तो  $f(y)$  भी धन होगा। इसलिये  $f(y) = 0$  इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा  $1 + \sqrt[t]{p}$  यह हुई।

जैसे यदि  $f(y) = y^4 + 2y^3 + y^2 - 12y - 12$  तो यहाँ तीन पद तक धन गुणक हैं और आगे के पदों में सब

से बड़ा ऋण गुणक १५ है इसलिये  $t = ४$ ,  $p = १५$  इनका  $१ + p^{\frac{1}{t}}$  इसमें उत्थापन देने से प्रधान सीमा  $१ + (१५)^{\frac{1}{4}} = ३$  (स्वल्पान्तर से) ।

सीमा जानने के लिये यदि निरवयव त घात मूल न मिले तो  $p$  में कोई सब से छोटी संख्या मिला कर तब त घात मूल लौ जिसमें प्रधान सीमा इस आए हुए सीमा के मान के अन्तर्गत हो ।

इस पर से यह प्रकार उत्पन्न होता है—अवशिष्ट पदों में सब से बड़ा जो ऋणात्मक गुणक हो उसके संख्यात्मक मान का आदि से ले जितने पद तक धन गुणक हैं उसके संख्या तुल्य घात मूल लेकर उसमें एक जोड़ दो तो धन मूलों की सीमा होगी ।

६१—यदि किसी समीकरण में प्रत्येक ऋणात्मक गुणक को धनात्मक मान कर उसमें उसके पूर्व आए हुए धनात्मक गुणकों के योग से भाग दिया जाय तो इस प्रकार उपलब्ध सब से बड़ी लब्धि में एक जोड़ देने से धन मूलों की प्रधान सीमा होती है ।

दीर्घगणित से सिद्ध है कि य<sup>n</sup>

$$= (y-1) (y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) + 1$$

इसलिये यदि समीकरण का ऐसा रूप हो जिसके बहुत पदों के गुणक धन और बहुतों के ऋण हों अर्थात्

$\Phi(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - p_3 y^{n-3} + p_4 y^{n-4} + \dots - p_t y^{n-t} + \dots + y_n = 0$  ऐसा हो तो इसमें  $y$  के जिन जिन घातों का गुणक धन है उनका रूप ऊपर के समीकरण में पद बदलने से और जिनके गुणक ऋण हैं उनको ज्यों का त्यों रखने से

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & p_0 (y-1) y^{n-1} + p_1 (y-1) y^{n-2} \\ & + p_2 (y-1) y^{n-3} + \dots + p_{t-1} (y-1) + p_t \\ & + p_1 (y-1) y^{n-2} + p_2 (y-1) y^{n-3} + \dots \\ & + p_2 (y-1) + p_1 \\ & + p_2 (y-1) y^{n-3} + \dots + p_2 (y-1) + p_2 \\ & - p_3 (y-1) y^{n-4} \dots \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

इस रूपान्तर में यदि  $y$  एक से अधिक हो तो प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्ति  $y$  के धन मान में धन ही रहेगी, जहाँ कोई ऋण संख्या है वहाँ वह भी पंक्ति धन ही रहेगी यदि  $(p_0 + p_1 + p_2) > p_3$

इसी प्रकार  $(p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{t-1})(y-1) > p_t$

इसलिये  $y > \frac{p_3}{p_0 + p_1 + p_2} + 1$

साधारण से  $y > \frac{p_t}{p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{t-1}} + 1$

इससे सिद्ध होता है कि ऋणात्मक पद की संख्या में उसके पहले पदों में जितने घनात्मक गुणक हैं उनकी संख्या

के योग का भाग दो यदि लब्धि पूरी न आवे तो शेष को छोड़ एकाधिक लब्धि लो और उसमें एक जोड़कर उसे खण्ड मानो । इस प्रकार से जितने ऋणात्मक गुणक हों सब पर से खण्डों का साधन करो । सब खण्डों में जो सबसे बड़ा हो उसे समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा समझो ।

$$\text{जैसे यदि } f(x) = x^2 + ६x^2 - १५x^2 - ५१x^2 \\ + ५५x - १७ = ०$$

ऊपर की युक्ति से खण्ड

$$= \frac{१५}{६+१} + १, \frac{५२}{६+१} + १, \frac{१७}{६+१+५५} + १ \\ = ३, ७, १$$

इनमें सब से बड़ा खण्ड ७ है इसलिये धनात्मक मूलों की सीमा ७ हुई । इसी उदाहरण में ५६वें प्रक्रम से ५२ और ५८वें प्रक्रम से  $१ + \sqrt{५२} = ६$  प्रधान सीमा आती है । इन दोनों से ७ यह कम है इसलिये इन दोनों प्रकारों से यह प्रकार यहाँ पर कर्म लाघव उत्पन्न करता है ।

प्रथम ऋणात्मक गुणक के पहले जहाँ कई एक धनात्मक गुणक हों और धनात्मक गुणकों की संख्या जहाँ भारी भारी हो वहाँ पर इस प्रकार से प्रधान सीमा की संख्या छोटी आवेगी जिस पर से गणित करने में कर्म लाघव होगा ।

६२—कभी कभी कुछ हेर फेर से समीकरणों का रूपान्तर करने से बहुत छोटी सीमा का पता लग जाता है ।

जैसे पिछले प्रक्रम के उदाहरण में

$$फ (य) = य^2 + ६य^2 - १५य^2 - ५२य^2 + ५५य - १७ = ०$$

$$वा य^2 (य^2 - ५२) + ६य^2 (य - \frac{१५}{६}) + ५५(य - \frac{१७}{५}) = ०$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि  $य = ४$  तो  $फ (य)$  धन होता है ।  
इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो पिछली सब  
प्रधान सीमाओं से छोटी है ।

दूसरा उदाहरण:—

$$मानो कि  $फ (य) = य^2 - ५य^2 - १३य^2 + २य^2 + य - ७० = ०$$$

इसमें ५६वें और ५८वें प्रक्रम से धन मूलों की प्रधान  
सीमा  $७० + १ = ७१$ , ५६वें प्रक्रम से  $\frac{७०}{५} + १$  अर्थात् १६ सीमा  
आती है । परन्तु इसी का यदि  $य^2 (य^2 - ५य - १३) + २य^2$   
 $+ य - ७०$  ऐसा रूपान्तर कर डालो और पहले ५६वें प्रक्रम से  
 $य^2 - ५य - १३$  इसमें सीमा का विचार करो तो  $१३ + १ = १४$   
यह हुआ । इस मान में  $य^2 (य^2 - ५य - १३)$  यह तो धन होता  
ही है किन्तु  $२य^2 + य - ७०$  यह भी उसी १४ के मान का  
व्यथापन देने से धन होता है । इसलिये धन मूलों की प्रधान  
सीमा १४ हुई जो १६ से भी छोटी है ।

६३—कल्पना करो कि  $फ (य) = प_०.य^n + प_१.य^{n-१}$   
 $+ प_२.य^{n-२} + \dots + प_{n-१}.य + प_n = ०$  तो स्पष्ट है कि इसमें  
 $n + १$  पद होंगे ।

$n + १$  में ३ का भाग देने से शेष १ वा २ बचेगा । इसलिये  
 $फ (य)$  में तीन तीन पदों को लेने से यदि शेष न बचे तो

$$फ (य) = य^{n-२} ( प_०.य^२ + प_१.य + प_२ ) -$$

$$+ य^{n-४} ( प_३.य^२ + प_४.य + प_५ ) + \dots$$

$$+ ( प_{n-२}.य^२ + प_{n-१}.य + प_n ) \dots \dots \dots (१)$$



शेष एक बचे तो

$$\begin{aligned} \text{फ}(y) &= y^{n-2} (p_0 y^2 + p_1 y + p_2) \\ &+ y^{n-3} (p_3 y^2 + p_4 y + p_5) + \dots \\ &+ y(p_{n-3} y^2 + p_{n-2} y + p_{n-1}) + p_n \dots \dots (२) \end{aligned}$$

और यदि शेष दो बचे तो

$$\begin{aligned} \text{फ}(y) &= y^{n-2} (p_0 y^2 + p_1 y + p_2) \\ &+ y^{n-3} (p_3 y^2 + p_4 y + p_5) + \dots \\ &+ y^2(p_{n-4} y^2 + p_{n-3} y + p_{n-2}) \\ &+ (p_{n-1} y + p_n) \dots \dots \dots (३) \end{aligned}$$

तीनों स्थितिओं में कोष्ठकान्तर्गत जितने वर्गात्मक अवयवों के फल हैं उन सब को पृथक् पृथक् शून्य के समान कर य के मान ले आवें। इन मानों में जो सब से बड़ा होगा स्पष्ट है कि वही (१) में धनमूल की सीमा होगी।

यदि  $p_n$  धनात्मक हो तो (१) में भी वही सीमा होगी, यदि  $p_n$  ऋणात्मक और  $y$  के उस बड़े मान से अल्प हो तो भी वही सीमा होगी और यदि ऋणात्मक  $p_n$  उस बड़े मान से बड़ा हो तो  $p_n$  का संख्यात्मक मान जो होगा वही सीमा होगी।

(१) स्थिति में उस बड़े मान का उत्थापन  $(p_{n-1} y + p_n)$  इसमें देने से इसका मान यदि धन आवे तो उसी बड़े मान के समान सीमा होगी, यदि ऋण आवे तो उससे बड़े जिस मान के उत्थापन देने से  $(p_{n-1} y + p_n)$  यह धन हो वही सीमा होगी।

प्रत्येक वर्गसमीकरण में  $y$  के मान निकालने में यदि निरवयव मूल न मिले तो जिसका मूल लेना हो उसे कुछ अधिक कर निरवयव मूल लेकर  $y$  का मान निकालो। यदि  $y$  का मान भिन्न आवे तो उसमें भी कुछ अधिक कर निरवयव कर लो।  $y$  के द्विविध मान में जो ऋणात्मक मान हो उसे छोड़ दो।

जैसे ६०वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण में

$$y^2 - 2y^2 - 13y^2 + 2y^2 + y - 60$$

$$= y^2 (y^2 - 2y - 13) + (2y^2 + y - 60)$$

इसमें पहले  $y^2 - 2y - 13 = 0$  इस पर से  $y$  का धन मान

$$= \frac{2 + \sqrt{60}}{2} = 9 \text{ (कुछ अधिक)}$$

फिर  $2y^2 + y - 60 = 0$  इस पर से  $y$  का धन मान

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 30} = 6 \text{ (कुछ अधिक)}$$

यहाँ दोनों समान ही स्वल्पान्तर से  $y$  के धन मान हुए। इसलिये धन मूल की सीमा ७ हुई जो सब से छोटी है।

जिस वर्गसमीकरण से असम्भव मान आवे उसे छोड़ दो क्योंकि उसमें  $y$  के किसी धन मान में फल धन ही होगा।

$p_0, p_1, p_2$ , इत्यादि में कोई त्रिक ऋणात्मक होंगे तब ऊपर की युक्ति से काम नहीं चलेगा परन्तु वहाँ भी एक पद के ऐसे खण्ड करो जिसमें कोष्ठ के मोतर के आदि पद में धन गुणक हों फिर तारतम्य से ऊपर की युक्ति से ऐसा दूसरा

समीकरण का रूपान्तर बना सकते हो जिससे यह पता लग जायगा कि  $y$  के किस छोटे धन मान में  $f(y)$  का मान धन होगा।

६४—ऊपर के प्रक्रमों में प्रधान सीमा के जानने के लिये कई एक युक्तियाँ दिखलाई जा चुकी हैं अब इस प्रक्रम में कनिष्ठ सीमा जानने की विधि लिखते हैं।

**कनिष्ठ सीमा**—जिस संख्या से समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल छोटा न हो उस संख्या को समीकरण के धनात्मक मूलों की कनिष्ठ सीमा कहते हैं।

मान लो कि समीकरण का छोटा रूप बना लिया है। छोटे रूप से सर्वत्र ऐसा समझना कि सब से बड़े घात वाले अव्यक्त के गुणक से दोनों पक्षों में अपवर्तन देकर उसका गुणक एक के तुल्य कर लिया है और उसका रूप

$f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$  ऐसा है। इसमें  $y = \frac{1}{r}$  ऐसा कल्पना कर एक नया समीकरण का रूप जिसमें सब पदों को  $r^n$  इससे गुण और  $p_n$  इसका भाग दे देने से

$$r^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} r^{n-1} + \dots + \frac{p_2}{p_n} r^2 + \frac{p_1}{p_n} r + \frac{1}{p_n} = 0$$

ऐसा हुआ। इसमें मान लो कि पिछले प्रक्रमों की युक्तियों से  $r$  के धन मानों की प्रधान सीमा 'सी' हुई तो स्पष्ट है कि 'सि' से  $r$  बड़ा नहीं हो सकता इसलिये  $y, \frac{1}{सी}$  से छोटा भी नहीं

हो सकता। इसलिये  $y$  के धन मानों की कनिष्ठ सीमा  $\frac{1}{s_i}$  यह हुई।

मान लो कि  $p_{t-1}$  प्रक्रम की युक्ति से इस समीकरण में प्रधान सीमा जानना है तो ऋण गुणकों में सब से बड़े गुणक को  $\frac{p_t}{p_n}$  कहें तो इसकी प्रधान सीमा

$$= 1 - \frac{p_t}{p_n} = \frac{p_n - p_t}{p_n} \quad |$$

इसलिये  $f(y) = 0$  इसमें कनिष्ठ सीमा  $= \frac{p_n}{p_n - p_t}$  यह हुई।

$\frac{p_t}{p_n}$  यह तभी ऋण हो सकता है जब  $p_t$  से विरुद्ध चिन्ह का  $p_n$  हो। इसलिये कनिष्ठ सीमा का संख्यात्मक हर सर्वदा  $p_n$  अर्थात् अंश से बड़ा होगा इसलिये इस पर से यह सिद्ध होता है कि कनिष्ठ सीमा सर्वदा एक से कम होगी।

$p_{t-1}$  और  $p_{t-2}$ — $p_{t-1}$  प्रक्रमों में प्रधान सीमा जानने के लिये जो जो युक्तियाँ दिखलाई गई हैं सब में  $y$  को एक से बड़ा मान लिया गया है इसलिये इन पर से भी स्पष्ट ही है कि कनिष्ठ सीमा एक से सर्वदा छोटी रहेगी।

जैसे इस अध्याय में प्रधान सीमाओं को जानने के लिये सावयव संख्याओं में कुछ कुछ बढ़ा कर निरवयव कर लिया है उसी तरह इस कनिष्ठ सीमा में भी कुछ बढ़ा कर इसका मान सर्वदा एक के तुल्य कहना चाहिए तब इस कनिष्ठ सीमा

जानने के लिये नया प्रक्रम व्यर्थ है क्योंकि ५६, ५८—५९वें प्रक्रमों से पहले ही स्पष्ट है कि य का धन मान एक से अल्प नहीं होगा।

टाडहण्टर (Todhunter) साहब ने अपने ग्रन्थ के ६३वें प्रक्रम में जो  $\frac{1}{2}$  यह कनिष्ठ सीमा का मान लिखा है वह जहाँ जहाँ य का मान रूप से अधिक होगा व्यर्थ है क्योंकि वहाँ स्पष्ट है कि एक से अल्प य का धन मान होना असम्भव है। जैसे यदि

$$f(y) = y^3 - ६y^2 + २६y - २४ = ०$$

इसमें ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा २४ आई। फिर य के स्थान में  $\frac{1}{2}$  इसका उत्थापन देने से और  $२^३$  से गुण देने से और  $-२४$  का भाग देने से

$$२^३ + \frac{२६}{-२४} २^२ - \frac{६}{-२४} २ + \frac{१}{-२४} = ०$$

इसमें  $p_n = -२४$ , और  $p_t = २६$ । इसलिये कनिष्ठ

$$\text{सीमा} = \frac{p_n}{p_n - p_t} = \frac{-२४}{-२४ - २६} = \frac{१२}{२५} \text{ जो व्यर्थ है क्योंकि}$$

य का धनमान समीकरण से स्पष्ट है कि एक से अधिक होगा।

इसलिये  $f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = ०$  इसमें य के स्थान में १ उत्थापन देकर समझ लो कि  $१ + p_1 + p_2 + \dots + p_n$  यह धन वा ऋण आता है यदि ऋण आवे तो व्यवहार के लिये कनिष्ठ सीमा को १ मान लो।

६५—न्यूटन की रीति—न्यूटन ने प्रधान सीमा जानने के लिये जो विधि लिखी है उसे नीचे लिखते हैं:—

मान लो कि  $f(y) = 0$  इसमें सीमा का ज्ञान करना है।  $y$  के स्थान में  $च + r$  का उत्थापन देकर इसका स्वरूप  $११$  के प्रक्रम से

$$f(च + r) = f(च) + r f'(च) + \frac{r^2}{2!} f''(च) + \dots + \frac{r^n}{n!} f^{(n)}(च) = 0 \text{ ऐसा हुआ। इसमें यदि } f(च),$$

$f'(च), f''(च), \dots, f^{(n)}(च)$  ये सब किसी धन  $च$  के मान में धन हों तो  $r$  के किसी धन मान में  $f(च + r)$  यह धन ही होगा। इसलिये  $f(च + r) = 0$  ऐसा होना असम्भव होगा। इसलिये ऊपर का समीकरण ठीक तभी होगा जब  $r$  का मान ऋण होगा। परन्तु  $y = र + च \therefore र = y - च$  परन्तु  $r$  ऋण है इसलिये  $y, च$  से बड़ा नहीं हो सकता क्योंकि ऐसा होने से  $r$  का मान धन होगा जो यहाँ पर न होना चाहिए। इसलिये ऐसी स्थिति में  $च$  को  $y$  के धन मानों की प्रधान सीमा कहेंगे।

जैसे ६० के प्रक्रम के दूसरे उदाहरण में

$$y^2 - ५y^2 - १३y^2 + २y^2 + y - ७०$$

$$\text{यहाँ } f(च) = च^2 - ५च^2 - १३च^2 + २च^2 + च - ७०$$

$$f'(च) = २च - २०च - २६च + ४च + १$$

$$\frac{१}{२} f''(च) = १०च - ३०च - ३६च + २$$

$$\frac{१}{३!} f'''(च) = १०च - २०च - १३$$

$$\frac{१}{४!} f^{(4)}(च) = २च - ५$$

यहाँ सुभीते के लिये नीचे से विचार करना आरम्भ करो तो जब च = १ तो फ''' (च) धन होता है। जब च = २ तब फ'' (च) धन होता है। जब च = ४ तब फ' (च) धन होता है। जब च = ६ तब फ (च) धन होता है। और जब च = ७ तब फ (च) भी धन होता है। इसलिये च के धन ७ मान में फ (च), फ (च) ..... फ''' (च) सब धन हुए इसलिये य के धनमानों की प्रधान सीमा ७ हुई। यही ६२वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुई है।

यहाँ जिस च के धन में फ (च) यह धन आ गया उस च के मान में फ' (च), फ'' (च) इत्यादि धन आते हैं कि नहीं इसकी परीक्षा करनी आवश्यकता नहीं, अब वे सब आप ही आप धन होंगे क्योंकि मानो कि च = ४ तो नीचे से फ'' (च) तक धन होते हैं तो च को कुछ बढ़ा कर ४ + क के तुल्य करने से

$$फ'' (अ + क) = फ'' (अ) + क फ''' (अ) + \frac{क^2}{२!} फ'''' (अ) + \dots$$

इसमें स्पष्ट है कि दहिने पक्ष में सब पद धन हैं, इसलिये फ'' (अ + क) यह भी धन हुआ। इसलिये जब नीचे से विचार करना आरम्भ किया गया है तब स्पष्ट है कि च के मान के बढ़ने से नीचे वाले आप ही धन होंगे। इसलिये यहाँ पर त्वर परीक्षा करनी व्यर्थ है।

सर्वत्र जहाँ जहाँ अव्यक्त के ऋणमान की प्रधान सीमा जाननी हो तो ५७वें प्रक्रम से वहाँ वहाँ पर सहज में जान सकते हो।

जैसे  $y^2 - ७y^2 - १५y^2 + ३y^2 + ४y + ४ = ०$  इसमें  
५७वें प्रक्रम की युक्ति से  $y = -१$  करने से

$r^2 + ७r^2 - १५r^2 - ३r^2 + ४r + ४ = ०$  इसमें धन मानों  
की प्रधान सीमा ५६वें प्रक्रम से  $\frac{४}{१+७+४} + १ = ५।$

अथवा  $r^2 - १५r^2 + ४r + ७r^2 - ३r^2 - ४ =$

$$= r^2 (r^2 - १५) + ४r + ७ (r^2 - \frac{३}{५}r^2 - \frac{४}{५})$$

$$= r^2 (r^2 - १५) + ४r + ७ \left\{ r^2 (r^2 - \frac{३}{५}) - \frac{४}{५} \right\}$$

इससे स्पष्ट है कि जब  $r = ४$  तो  $f(r)$  धन होता है; इसलिये  
समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा पहिले से छोटी ४ ही  
हुई।

और  $f(r)$  में जब  $r = ०$  तब  $f(r) = १ + ७ - १५ - ३$   
 $+ ४ - ४ = १२ - ६६ = -५४$  इसलिये धन मूलों की कनिष्ठ  
सीमा  $+१$  होगी। इसलिये  $f(y) = ०$  इसके ऋण मूलों की  
सीमा  $-४$  और  $-१$  हुई।

६६—प्रधान सीमा जानने में बड़ी सावधानी चाहिए।  
समीकरण का साधारण रूप देख कर प्रधान सीमा जानने में  
कभी कभी धोखा हो जाने की सम्भावना होती है।

जैसे यदि  $f(y) = (y-५)^2 (y-२) = ०$  ऐसा हो तो  
इस रूप से तो स्पष्ट है कि  $y$  का धन मान ५ से अधिक नहीं  
हो सकता तथा धोखे से २ से भी अधिक नहीं कहा जा  
सकता। इसलिये धोखे से ० को भी प्रधान सीमा कह सकते



हो जो कि वस्तुतः कनिष्ठ सीमा है। यहाँ पर अपचित घात क्रम से गुणकर समीकरण का रूप बनाओ तो

$$\begin{aligned} \text{फ (य)} &= (य-५)^२ (य-२) = (य^२ - १०य + २५)(य-२) \\ &= य^३ - १२य^२ + ४५य - ५० = ० \end{aligned}$$

यहाँ ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा ५१ और ५८वें प्रक्रम से भी ५१ आती है। यह तो बहुत भारी होने से ठीक ही है परन्तु ५६वें प्रक्रम से जो  $\frac{५०}{१+४५} + १ = २$  यह प्रधान सीमा जो आती है वह ठीक नहीं,

इसी प्रकार दूसरे  $(य-५)(य-४)(य-१) = ०$  इस उदाहरण में भी देखने से प्रधान सीमा ५ है और यह भी स्पष्ट है कि १ से अधिक य के सब धन मानों में फ (य) धन होगा इसलिये यदि १ को प्रधान सीमा कहोगे तो ठीक नहीं होगा।

इसी फ (य) को घात कर  $य^३ - १०य^२ + २६य - २०$  ऐसा बनाओ तो ५६वें, ५८वें, प्रक्रम से प्रधान सीमा २१ यह ठीक आती है परन्तु ५६वें से जो  $\frac{२०}{१+४५} + १ = २$  आती है यह ठीक नहीं।

यहाँ डेस्कर्टिस् की युक्ति से जानते हैं कि अव्यक्त के सब मान धन हैं इसलिये १० सब मानों का योग होगा। तब स्पष्ट है कि कोई धन मान १० से बड़ा न होगा इसलिये यहाँ १० को प्रधान सीमा कह सकते हैं। इसी प्रकार पहिले उदाहरण  $य^३ - १२य^२ + ४५य - ५०$  इसमें प्रधान सीमा १२ होगी जो क्रम से ०१ और ५१ दोनों से छोटी है। इस प्रकार से और उदाहरणों में भी समझना चाहिए।

६७—जब २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से स्पष्ट है कि

$f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n = 0$  इसमें  $-p_1$  यह सब मूलों के योग के समान है और  $f(-r) = 0$  में जो जो  $r$  के धन मान आवेंगे वे  $y$  के ऋणमान होंगे इसलिये यदि  $f(y) = 0$  इसमें  $y$  के सब मान सम्भाव्य हों तो  $f(-r) = 0$  इसके धन मूलों की जो प्रधान सीमा हो उसे धन मूलों की संख्या से गुण कर  $f(y)$  के द्वितीय पद के विरुद्ध चिन्हात्मक गुणक में जोड़ देने से जो योग हांगा वह  $f(y) = 0$  इसमें  $y$  के सब धन मानों के योग से बड़ा हांगा। इसलिये योग को प्रधान सीमा कह सकते हैं।

जैसे  $y^2 - ७y + ३ = 0$  इसके सब मूल सम्भाव्य हैं (४७वें प्रक्रम देखो) इसलिये  $y$  के स्थान में  $-r$  का उत्थापन देने से  $r^2 - ७r + ३ = 0$  ऐसा समीकरण बना जिसका न्यान्तर  $r(r^2 - ७) - ३ = 0$  ऐसा कर सकते हो इससे स्पष्ट है कि यदि  $r = ३$  तो  $f(-r)$  यह सर्वदा धन हाता है और यहाँ धन मान एक ही है इसलिये  $r$  के धन मान की प्रधान सीमा ३ बड़ी। इसे एक रो गुण कर  $f(y)$  के  $y^2$  के गुणक शून्य में जोड़ देने से  $f(y) = 0$  इसके धन मूलों की प्रधान सीमा ३ हुई।

६८—यदि  $f(y)$  में  $y$  के स्थान में कम से अ और क ऐसी दो संख्याओं का उत्थापन दिया जाय जिनके बीच  $f(y) = 0$  इसके मूलों की संख्या विषम हो तो  $f(a)$  और  $f(k)$  ये दोनों विरुद्ध

चिन्ह के होंगे। यदि उनके बीच समीकरण का कोई मूल न हो या मूलों की संख्या सम हो तो वे दोनों एक चिन्ह के होंगे।

$f(y) = 0$  इस समीकरण के सब सम्भाव्य मूल क्रम से  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  मानों तो

$$f(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3) \cdots (y - \alpha_t) f_a(y)$$
 ऐसा होगा।

जहाँ  $f_a(y)$ , सब असम्भाव्य मान सम्बन्धी अव्यक्त के एक घात खण्ड के घातके तुल्य है और जो  $y$  के किसी सम्भाव्य मान में सर्वदा धन ही रहता है क्योंकि किसी समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भाव्य मान सम्बन्धी अव्यक्त के खण्ड रहेंगे जिनके मान क्रम से

$y - \alpha - k\sqrt{-1}$ ,  $y - \alpha + k\sqrt{-1}$  ये होते हैं (रद्दवाँ प्रक्रम देखो) और जिनके घात  $(y - \alpha)^2 + k^2$  ये सर्वदा  $y$  के सम्भाव्य मान में धन ही होते हैं।

कल्पना करो कि  $\alpha$  और  $k$  दो संख्या हैं जिनमें  $k$  से अधिक  $\alpha$  है और  $\alpha$  और  $k$  के बीच में  $f(y) = 0$  इसके सम्भाव्य मूल  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  ये पड़े हैं।

अब  $y$  के स्थान में क्रम से  $\alpha$  और  $k$  का उत्थापन देने से

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \cdots (\alpha - \alpha_t) f_a(\alpha)$$

$$f(k) = (k - \alpha_1)(k - \alpha_2) \cdots (k - \alpha_t) f_a(k)$$

यहाँ स्पष्ट है कि  $(अ-अ_1)$   $(अ-अ_2)$  ....  $(अ-अ_t)$  ये सब खण्ड धन हैं और  $(क-अ_1)$   $(क-अ_2)$  .....  $(क-अ_t)$  ये सब खण्ड ऋण हैं। और ऊपर की युक्ति से फा (अ) और फा (क) ये दोनों सर्वदा धन अर्थात् एक ही चिन्ह के हैं। इसलिये फा (अ) और फा (क) ये दोनों क्रम से तभी एक या विरुद्ध चिन्ह के होते हैं जब सम्भाव्य मूलों की अर्थात्  $अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_t$  इनकी संख्या सम या विषम होती है।

६६—ऊपर की युक्ति की विलोम विधि से यह सिद्ध होता है कि यदि फा (य) में य के स्थान में उत्थापित जो दो संख्यायें विरुद्ध चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उन संख्याओं के बीच फा(य)=० इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी है और यदि वे संख्यायें एक चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उनके बीच या तो समीकरण का कोई मूल नहीं है या मूलों की सम संख्या पड़ी है।

ऊपर अ को भी  $अ_1, अ_2, \dots, अ_t$  से छोटा मान लेने से वह क को  $अ_1, अ_2, \dots, अ_t$  से बड़ा मान लेने से यह स्पष्ट है कि फा (अ) और फा (क) यदि एक ही चिन्ह के हों तो सम्भव है कि अ और क के बीच फा (य)=० इसका कोई मूल न पड़ा हो।

इस सिद्धान्त के अन्तर्गत १६वें प्रक्रम का सिद्धान्त है इसलिये इसके बल से उस में की बात सिद्ध हो जाती है।

७०— $f(y) = 0$  इसके पास पास के जो दो दो सम्भाव्य मूल होंगे उनके बीच में  $f(y) = 0$  इसका एक एक सम्भाव्य मूल अवश्य होगा ।

मान लो कि एक एक से न्यून  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_t$  सम्भाव्य मूल और असम्भाव्य एक घात के खण्ड  $f(y)$  जो सर्वदा  $y$  के किसी सम्भाव्य मान में धन रहता है,  $f(y) = 0$  इसमें है तो

$f(y) = (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_t)$   
 $f(y)$  और पूर्व प्रक्रम से

$$f'(y) = \left\{ (y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_t) \right. \\ \left. + (y - a_1)(y - a_3) \dots (y - a_t) \right\} f(y)$$

$$+ (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_t) f'(y)$$

इसमें  $y$  के स्थान में क्रम से  $a_1, a_2, \dots, a_t$  का उत्थापन देने से सब में  $(y - a_1)(y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_t)$  यह तो उड़ जायगा । इसलिये  $f'(a_1)$  उसी चिन्ह का होगा जिस चिन्ह का  $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_t)$  है । इसी प्रकार  $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_t)$  यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का  $f'(a_2)$  होगा ।

$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_3 - a_t)$  यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का  $f'(a_3)$  होगा । इसी प्रकार आगे भी करने से स्पष्ट है कि  $f'(a_1)$  धन होगा क्योंकि इसके

खण्डों में एक ऋण है। इस प्रकार पहिला धन, दूसरा ऋण तीसरा धन इत्यादि एकान्तर विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये ६७वे प्रक्रम से  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_t$  इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच  $f'(y) = 0$  इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी होगी। इसलिये  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच  $f'(y) = 0$  इसका एक संभाव्य मूल अवश्य होगा।

६६—यदि  $f(y) = 0$  इसके  $\alpha_1$  मूल त बार,  $\alpha_2$  मूल थ बार,  $\alpha_3$  मूल द बार इत्यादि आवें और असंभाव्य मूल सम्बन्धी घण्डों के घात  $f_a(y)$  हो तो

$$f(y) = (y - \alpha_1)^t (y - \alpha_2)^{\theta} (y - \alpha_3)^d \dots f_a(y)$$

(यहां भी  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$  क्रम से एक एक से न्यून मानो।)

यहां भी ५६वें प्रक्रम से

$$f'(y) = f_a(y) \left\{ t(y - \alpha_1)^{t-1} (y - \alpha_2)^{\theta} \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \theta(y - \alpha_1)^t (y - \alpha_2)^{\theta-1} (y - \alpha_3)^d \dots \dots \dots \right\} \\ + (y - \alpha_1)^t (y - \alpha_2)^{\theta} (y - \alpha_3)^d \dots \dots f'_a(y)$$

कल्पना करो कि  $f(y)$  और  $f'(y)$  का अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन

$$(y - \alpha_1)^{t-1} (y - \alpha_2)^{\theta-1} (y - \alpha_3)^{d-1} \dots = f_1(y)$$

$$\text{ता } \frac{फ'(य)}{फ_1(य)} = फ_1(य) \left\{ त (य - अ_2) (य - अ_3) \cdot \dots \dots \right. \\ \left. + थ (य - अ_1) (य - अ_3) \dots + \dots \dots \right\} \\ + (य - अ_1) (य - अ_2) (य - अ_3) \dots \dots फ_1'(य) = फि (य)$$

पिछले प्रक्रम की युक्ति से  $अ_1, अ_2; अ_2, अ_3$  इत्यादि के बीच  $फि (य) = 0$  इसके मूलों का विषम संख्या पड़ी होगी और  $फ'(य) = फ_1 (य) फि (य)$  इसमें अव्यक्त के जिस जिस मान में  $फि (य)$  शून्य के तुल्य होगा उस उस मान में  $फ'(य)$  भी शून्य के तुल्य होगा; इसलिये यहां भी  $फ (य) = 0$  इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच  $फ'(य) = 0$  इसके एक एक मूल अवश्य होंगे, यह सिद्ध होता है।

७०—ऊपर की युक्ति की विपरीत क्रिया से यह भी सिद्ध होता है कि  $फ'(य) = 0$  इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच  $फ (य) = 0$  इसका एक ही मूल पड़ सकता है। अधिक मूल नहीं पड़ सकते क्योंकि कल्पना करो कि यदि  $फ'(य) = 0$  इसके दो पास के जो  $अ_1, अ_2$  मूल हैं उनके भीतर  $फ (य) = 0$  इसके दो मूल  $क_1$  और  $क_2$  पड़ते हैं तो अब ६८वें और ६९वें प्रक्रमों की युक्ति से कम से कम  $फ'(य) = 0$  इसका एक मूल  $क_1$  और  $क_2$  के बीच में अ पड़ेगा इसलिये दो दो पास के मूल  $अ_1, अ_2$  ये हुए जो पूर्व कल्पित धर्म से विरुद्ध हैं इसलिये  $अ_1, अ_2$  के बीच  $फ (य) = 0$  इसका एक ही मूल हो सकता है, अधिक नहीं हो सकता।

अनुमान— $फ'(य) = 0$  इसका सब से बड़ा जो मूल आवेगा उससे बड़ा  $फ (य) = 0$  इसका कोई एक ही मूल

होगा। क्योंकि यदि दो बड़े मूल हों तो ऊपर की युक्ति से इन दोनों के बीच  $फ'$  (य) = ० इसका एक मूल होगा जो पहिले कल्पित सब से बड़े मूल से भी बड़ा होगा जो पूर्व कल्पना से असम्भव है।

इसी प्रकार  $फ'$  (य) = ० इसका सब से छोटा जो मूल होगा उससे छोटा  $फ$  (य) = ० इसका एक ही कोई मूल हो  
I कता है।

७१—यदि  $फ$  (य) = ० इस न घात वाले समीकरण के सम्भाव्य मूल म हों तो ऊपर की युक्ति से  $फ'$  (य) = ० इसके कम से कम  $m-1$  संभाव्य मूल होंगे।  $फ''$  (य) = ० इसके कम से कम  $m-2$  संभाव्य मूल होंगे। इसी तरह  $फ^{(t)}$  (य) = ० इसके कम से कम  $m-t$  संभाव्य मूल होंगे। इसलिये  $फ^{(t)}$  (य) = ० इसके यदि आ असंभव मूल हों तो  $फ$  (य) = ० इसके भी कम से कम आ असम्भव मूल होंगे। यदि आ से भी कम असम्भव मूल मानो तो  $फ$  (य) = ० इसके  $n-आ$  इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे और ऊपर की युक्ति से  $फ^{(t)}$  (य) = ० इसके  $n-t-आ$  इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे। इसलिये सब मूल  $n-t-आ+आ=n-t$  इससे अधिक आवेंगे। परन्तु  $फ'$  (य),  $फ''$  (य) इत्यादि के आनयन से स्पष्ट है कि  $फ^{(t)}$  (य) = ० यह  $n-t$  घात का होगा इसलिये सब मान  $n-t$  से अधिक न होने चाहिए। इसलिये पहली बात असम्भव है। तब सिद्ध हुआ कि  $फ$  (य) = ० इसके कम से कम आ असम्भव मूल होंगे।

७२—११वें प्रक्रम से यदि  $फ$  (य) का  $n-t-1$  संख्यक उत्पन्न फल निकालें और उसे शून्य के तुल्य करें तो



$$\frac{p_0 y^{t+1} (n)!}{t+1!} + \dots + \frac{p_{t-1} y^2 (n-t+1)!}{2!} + p_t y (n-t)! \\ + p_{t+1} (n-t-1)! = 0 \text{ ऐसा होगा । इसमें } y \text{ के}$$

स्थान में  $\frac{1}{r}$  का उत्थापन देने से,  $r^{t+1}$  से गुण देने से और

$p_{t+1} (n-t-1)$  इससे भाग देने से

$$r^{t+1} + \frac{(n-t) p_t r^t}{p_{t+1}} \\ + \frac{(n-t+1)(n-t)}{1!} \cdot \frac{p_{t-1} r^{t-1}}{p_{t+1}} + \dots = 0$$

इसके यदि सब मूल संभाव्य होंगे तो मूलों का वर्गयोग अवश्य धन होगा । इसलिये ३४वें प्रक्रम से

$$\frac{(n-t)^2 p_t^2}{p_{t+1}^2} > (n-t+1)(n-t) \frac{p_{t-1}}{p_{t+1}}$$

$$\text{वा } p_t^2 > \frac{(n-t+1) p_{t-1} p_{t+1}}{n-t}$$

$$\text{वा } p_t^2 > p_{t-1} p_{t+1}$$

इसलिये यदि पास पास के कोई तीन पदों के गुणक में मध्य का वर्ग आदि और अन्त के घात से अल्प हो तो अवश्य कहेंगे कि  $f^{n-t+1}(y) = 0$  इसका कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल होगा । इसलिये ७१वें प्रक्रम से  $f(y) = 0$  इसका भी कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल अवश्य होगा ।

## मूलों की सीमा

७३— $f'(y) = 0$  इसके जितने सम्भाव्य मूल हैं यदि वे विदित हों तो  $f(y) = 0$  इसके जितने सम्भाव्य मूल होंगे उनकी संख्या मालूम हो जायगी।

कल्पना करो कि  $f'(y) = 0$  इसके सम्भाव्य मूल क्रम से एक से एक अधिक  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_t$  हैं तो  $f(y)$  में  $y$  के स्थान में  $-\infty, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, +\infty = 0$

इनका क्रम से उत्थापन देने से कोई दो पास के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो १६वें और ७०वें प्रक्रमों से  $y$  के उन दो मानों के भीतर  $f(y) = 0$  इसका एक मूल अवश्य होगा। इसलिये  $f(y)$  में  $y$  के स्थान में ऊपर लिखे हुए मानों का क्रम से उत्थापन देने से जो श्रेणी प्राप्त होगी उसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही  $f(y) = 0$  इसके सम्भाव्य मूल आवेंगे।

यदि ऊपर लिखित  $y$  के किसी मान के उत्थापन देने से  $f(y)$  यह शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि  $f(y) = 0$  इसके कई मूल समान हैं जो ५६वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायंगे।

जैसे यह जानना चाहते हैं कि किस स्थिति में

$y^2 - t_2 y + t_1 = 0$  इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे जब यह ज्ञात है कि  $t_2$  धन सम्भाव्य संख्या है।

यहां  $f'(y) = 2y - t_2$  इसलिये  $f'(y) = 0$  इसका एक मूल  $= +\sqrt{\frac{t_2}{2}} = \alpha_1$  दूसरा  $= -\sqrt{\frac{t_2}{2}} = \alpha_2$ । इस

प्रकार से  $f'(y) = 0$  इसके दोनों मूल सम्भाव्य हुए।

फ (य) में य के स्थान में इन दोनों मूलों का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \text{फ (अ}_1) &= \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - t_2 \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + t_3 \\ &= -2 \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + t_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{फ (अ}_2) &= -\left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + t_2 \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + t_3 \\ &= 2 \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + t_3 \end{aligned}$$

अब यदि  $t_3 > 2 \left(\frac{t_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$  या  $\left(\frac{t_3}{2}\right)^2 > \left(\frac{t_2}{3}\right)^3$  तो यदि  $t_3$  धन हो तो फ (अ<sub>1</sub>) और फ (अ<sub>2</sub>) दोनों धन हुए। इसलिये

$$\begin{array}{cccc} \text{फ}(-\infty), & \text{फ}(\text{अ}_2), & \text{फ}(\text{अ}_1), & \text{फ}(-\infty) \\ - & + & + & + \end{array}$$

यहां एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ (य) = ० इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा।

यदि  $t_3$  ऋण और  $\left(\frac{t_3}{2}\right)^2 > \left(\frac{t_2}{3}\right)^3$  तो फ (अ<sub>1</sub>) और फ (अ<sub>2</sub>) दोनों ऋण होने तब

$$\begin{array}{cccc} \text{फ}(-\infty), & \text{फ}(\text{अ}_2), & \text{फ}(\text{अ}_1), & \text{फ}(+\infty) \\ - & - & - & + \end{array}$$

यहां भी एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ (य) = ० इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा जो अ<sub>1</sub> से बड़ा होगा।

पुनः कल्पना करो कि  $\left(\frac{t_3}{2}\right)^2 < \left(\frac{t_2}{3}\right)^3$  तो चाहे  $t_3$  धन वा ऋण हो  $f(a_1)$  ऋण और  $f(a_2)$  धन होगा। इसलिये

$$\begin{array}{cccc} f(-\infty), & f(a_2), & f(a_1), & f(+\infty) \\ - & + & - & + \end{array}$$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये  $f(y) = 0$  इसके तीन मूल संभाव्य हुए।

७४—प्रत्येक व्यत्यास में  $f(y) = 0$  इसका एक ही मूल होगा।

कल्पना करो कि  $f(y) = 0$  इसके धन मूलों की प्रधान सीमा  $a$  और ऋण मूलों की प्रधान सीमा  $-k$  है और कोई दो मूलों का अन्तर  $n$  से छोटा नहीं है तो  $f(y)$  में  $y$  के स्थान में  $a, a-j, a-2j, \dots$

$a-(t-1)j, a-tj$  (जहां  $a-(t-1)j$  यह  $-k$  से बड़ी और  $a-tj$  छोटी है) इत्यादि का उत्थापन देने से  $f(y)$  के जो अनेक मान आवेंगे उनमें जिन दो दो मानों के बीच व्यत्यास होगा  $y$  के उन दो मानों के बीच  $f(y) = 0$  इसका एक मूल अवश्य होगा क्योंकि यदि मान लो कि  $y$  के स्थान में  $a-2j$  और  $a-3j$  के उत्थापन से  $f(y)$  में व्यत्यास हुआ तो  $f(y) = 0$  इसका एक ही कोई मूल  $a-2j$  और  $a-3j$  इनके भीतर होगा। यदि मानो कि  $a-2j$  और  $a-3j$  इनके भीतर दो होंगे तो उनका अन्तर  $a-2j$  और  $a-3j$  इनके अन्तर  $n$  से छोटा होगा। परन्तु

ज को तो सब अन्तरों से छोटा पहिले मान लिया है इसलिये दो मूलों का अन्तर ज से भी छोटा होना असम्भव है। इसलिये एक एक व्यत्यास में  $f(y) = 0$  इसका एक ही मूल होगा।

जैसे  $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$  इस पर से ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से  $f(y) = 0$  इसके मूलों के अन्तर वर्ग के समान जिस समीकरण के मूल हैं उसका स्वरूप

$$r^3 - 42r^2 + 441r - 48 = 0 \text{ ऐसा होगा। इसमें यदि}$$

$$r = \frac{1}{l} \text{ तो}$$

$$48l^3 - 441l^2 + 42l - 1 = 0$$

$$\text{वा } 48l^2 (l - \frac{1}{4}) + 42(l - \frac{1}{4}) = 0$$

इसमें प्रधान सीमा  $\frac{1}{4}$  आई। इसलिये  $r$  को कनिष्ठ सीमा  $\frac{1}{4}$  हुई।

$f(y) = 0$  इसके कोई दो मूलों का अन्तर  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  इससे छोटा न होगा और  $f(y) = 0$  इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ५६वें प्रक्रम से  $4 + 1 = 5$  होगी और ५७वें प्रक्रम से ऋण मूलों की सीमा  $-(1 + \sqrt{4}) = -3$  यह होगी। इसलिये  $y$  के स्थान में  $5, 5 - \frac{1}{2}, 5 - \frac{3}{2}, 5 - 1, 4 - \frac{1}{2}, \dots$  इत्यादि के उत्थापन से जो  $f(y)$  के अनेक मान आचेंगे उनसे स्पष्ट जान पड़ेगा कि ३ और  $2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{2}$  और  $2\frac{1}{2}$ , और  $-2$  और  $-2\frac{1}{2}$  इनके बीच  $f(y) = 0$  इसका एक एक मूल पड़ा हुआ है।

७५—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखलाते हैं।

(१)  $y^2 - 2y^2 + y + 2 = 0$  इसके धन मूलों की प्रधान सीमा बतलाओ।

यहां ५६वें प्रक्रम से, सब से बड़े ऋणात्मक गुणक की संख्या = है। इसलिये प्रधान सीमा  $= + 1 = 1$  हुई। ५८वें प्रक्रम से भी यही आती है।

(२)  $y^3 + y^2 + y^2 - 11y + 2 = 0$  इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या होगा।

यहां ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा  $11 + 1 = 12$  और ५८वें प्रक्रम से

$1 + (11)^{\frac{1}{2}}$  यह अर्थात् ४ हुई जो पहले से छोटी है।

यहां ५८वें प्रक्रम से  $\frac{11}{1+1+1} + 1$  यह अर्थात् ५ भां प्रधान सीमा आती है जो १२ से छोटी है।

(३)  $y^6 + 2y^5 - 8y^4 + 6y^3 - 10y^2 - 12y^2 + 7y - 1 = 0$  इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ५६वें प्रक्रम से १३, और ५८वें प्रक्रम से

$\frac{4}{1+2}, \frac{10}{1+2+6}, \frac{12}{1+2+6}, \frac{1}{1+2+6+7}$  इन भिन्नो में सब से बड़ा तीसरा है इसलिये प्रधान सीमा २ हुई जो १३ से छोटी है।

(४)  $y^3 - 2y^2 + 34y^2 - 3y + 11 = 0$  इसके रूपान्तर से धन मूलों की प्रधान सीमा का पता लगाओ।

यहां इसका रूपान्तर

$$य^४ - ५य^३ + ६य^२ + २य - ३५ + १६ = ०$$

$$\text{वा } य^२(य^२ - ५य + ६) + २य(य - ३\frac{५}{२}) + १६ = ०$$

यहां  $य^२ - ५य + ६ = ०$  इसके असम्भव मूल आते हैं।  
इसलिये यह ६१वें प्रक्रम से य के किसी सम्भाव्य मान में धन  
ही होगा तब दूसरे खण्ड पर से प्रधान सीमा १ हुई।

(५)  $५य^२ - ८य^४ - ११य^३ - २३य^२ - १०य - ३११ = ०$   
रूपान्तर कर इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा  
वतलाओ।

यहां  $५य^२$  का पांच विभाग कर प्रत्येक ऋण पद में मिला  
कर समान गुणकों के अलगाने से रूपान्तर

$$य^४(य - ८) + य^३(य^२ - ११) + य^२(य^३ - २३) + य(य^४ - १०) \\ + (य^२ - ३११) = ० .$$

इस पर से प्रधान सीमा ८ हुई।

(६)  $य^४ - य^३ - ३य^२ - ५य - २३ = ०$  इसके रूपान्तर से  
धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ४ पद ऋण हैं और सब से बड़ा य का घात भी ४ ही  
है इसलिये दोनों पक्षों को ४ से गुण कर  $४य^४$  का चार भाग  
कर चारो ऋण पदों में मिलाने से रूपान्तर

$$य^३(य - ४) + य^२(य^२ - १२) + य(य^३ - २०) + (य^४ - ६२) = ०$$

इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो और  
दूसरे प्रकारों से आई हुई सीमाओं से छोटी है।

( ७ ) न्यूटन की रीति से

$f(y) = y^4 - 2y^3 - 3y^2 - 12y - 3 = 0$  इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या है ।

६३वें प्रक्रम से, यहाँ  $f(y) = y^4 - 2y^3 - 3y^2 - 12y - 3$

$$f'(y) = 4y^3 - 6y^2 - 6y - 12$$

$$\frac{1}{2} f''(y) = 6y^2 - 6y - 3$$

$$\frac{1}{6} f'''(y) = 4y - 2$$

यहाँ  $y=1$  तो  $f'''(y)$  धन;  $y=2$  तो  $f''(y)$  धन;  $y=3$  तो  $f'(y)$  धन और  $y=4$  तो  $f(y)$  धन होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई ।

( = )  $y^2 - 2y^2 + 4y + 4 = 0$  इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या होगी ।

यहाँ  $y$  का चाहे शून्य से लेकर जो धन मान मानों सब में  $f(y)$  धन ही होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा यदि शून्य को कहें तो अशुद्ध है । ५६वें प्रक्रम से यहाँ  $x+1=0$  प्रधान सीमा ठीक है । यही ५६वें प्रक्रम से भी आती है । ६४वें प्रक्रम की युक्ति से यहाँ  $y=-1$  का उत्थापन देने से

$$r^2 + 2r^2 + 4r - 4 = 0$$

$$\text{वा } r(r^2 + 2r + 4) - 4 = 0$$

यहाँ यदि  $r=2$  तो  $f(r)$  शून्य के तुल्य होता है और यदि  $r$  दो से अधिक हो तो  $f(r)$  धन होता है । इसलिये



य के ऋणमान की सीमा २ हुई। इसे  $f(y)$  के  $y^2$  के विपरीत चिन्ह गुणक में अर्थात्  $n$  में घटा देने से प्रधान सीमा ६ हुई।

(६) सिद्ध करो कि  $y^n - n अ य + (n-1)क = 0$  इसके सम्भव मूल कब और किस स्थिति में आवेंगे।

यहां  $f'(y) = n y^{n-1} - n अ = 0$   $\therefore y = \frac{अ}{n-1} = अ_1$  यदि  $n$  सम हो।

इसलिये  $f'(y)$  में  $y$  का एक ही सम्भाव्य मान निकला। इसका उत्थापन  $f(y)$  में देने से

$$\begin{aligned} f(y) &= अ \frac{n}{n-1} - n अ \frac{n}{n-1} + (n-1) क \\ &= -(n-1) अ \frac{n}{n-1} + (n-1) क = 0 \end{aligned}$$

इसलिये यदि  $अ^n < क^{n-1}$  तो  $f(y)$  का मान धन होगा और यदि  $अ^n > क^{n-1}$  तो  $f(y)$  ऋण होगा। अब  $n$  के सम होने से ७३वें प्रक्रम से

$$f(-\infty), f(अ_1), f(+\infty)$$

+	+	+	पहिली स्थिति में।
+	-	+	दूसरी स्थिति में।

इसलिये यदि  $अ^n < क^{n-1}$  तो  $f(y) = 0$  इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा और यदि  $अ^n > क^{n-1}$  तो दो सम्भाव्य मूल होंगे।

इसी प्रकार  $n$  के विषम होने से यदि  $a^n > k^{n-1}$  तो  $f(y) = 0$  इसके तीन और यदि  $a^n < k^{n-1}$  तो एक सम्भाव्य मूल होगा।

(१०)  $y^n (y-1)^n = 0$  स्पष्ट है कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं जिनमें  $n$  शून्य के और  $+1$  के समान है। अब इसके  $n$  वारोत्पन्न फल पर से दिखलाओ कि

$$y^n - n \frac{n}{2n} y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} y^{n-2} - \dots = 0$$

इसके सब सम्भाव्य मूल  $0$  और  $1$  के बीच में पड़े हैं।

यहां ११वें प्रक्रम में  $\frac{r^n}{t!}$  का गुणक है उसमें  $n$  के स्थान में  $2n$  का और  $t$  के स्थान में  $n$  का उत्थापन देने से और  $f(y) = y^n (y-1)^n$  इसका रूप द्वियुक् पद सिद्धान्त से फैलाने से स्पष्ट है कि ऊपर का समीकरण  $f^n(y) = 0$  यह है और ७१वें प्रक्रम से इसके सब सम्भाव्य मूल  $0$  और  $1$  के बीच में होंगे क्योंकि  $f(y) = 0$  इसके सब सम्भाव्य मूल  $0$  और  $1$  के बीच में हैं। इसलिये  $f'(y) = 0$  इसके भी सब सम्भाव्य मूल  $0$  और  $1$  के बीच में होंगे। फिर इसके प्रथमोत्पन्न फल  $f''(y) = 0$  इसके भी सम्भाव्य मूल ऊपर ही की युक्ति से  $0$  और  $1$  के बीच में होंगे। इसी प्रकार आगे भी किया करते जाओ तो स्पष्ट हो जायगा कि  $f^n(y) = 0$  इसके भी सब सम्भाव्य मूल  $0$  और  $1$  के बीच में होंगे।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

(१)  $y^8 - 8y^7 + 25y^6 + 11y^5 - 16y^4 + 2 = 0$  इसके धन और ऋण मूलों की प्रधान सीमाओं को बताओ।

( २ )  $y^4 - 2y^3 + 12y^2 + 6y - 31 = 0$  इसका ' इस प्रकार से रूपान्तर करो कि धन मूलों की प्रधान सीमा ६ हो ।

( ३ ) सिद्ध करो कि  $y^4 + 4y^3 - 20y^2 - 16y - 2 = 0$  इसका एक धन मूल २ और ३ के बीच होगा और कोई धन मूल ३ से बड़ा न होगा । एक ऋण मूल  $-4$  और  $-8$  के होगा और कोई ऋण मूल  $-4$  से अल्प न होगा ।

( ४ ) न्यूटन की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों की सीमाओं का ज्ञान करो:—

$$( १ ) y^4 - 2y^3 + 6y^2 + 7y - 10 = 0 ।$$

$$( २ ) y^4 - 4y^2 + 5y - 2 = 0 ।$$

$$( ३ ) y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 2y - 4 = 0 ।$$

$$( ४ ) y^4 - 4y^3 + 10y^2 - 16 = 0 ।$$

$$( ५ ) y^4 - 3y^3 + 2y^2 + y - 3 = 0 ।$$

$$( ६ ) y^4 - 7y^3 + y^2 - 3 = 0 ।$$

( ५ ) नीचे लिखे हुए समीकरणों के सम्भाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बतलाओ:—

$$( १ ) y^4 - 12y + 17 = 0 ।$$

$$( २ ) y^4 - 32y + 20 = 0 ।$$

$$( ३ ) y^4 - 4y + 3 = 0 ।$$

$$( ४ ) 4y^4 + 6y^2 - 12y + 2 = 0 ।$$

$$( ५ ) y^4 - 3y^2 + 4 = 0 ।$$

$$( ६ ) y^4 - 5y^2 + 4 = 0 ।$$

(६) यदि  $f(y) = (y^2 - 1)^n = 0$  तो दिखलाओ कि

$$y^n - n \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} y^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} y^{n-4} - \dots = 0$$

इसके सब सम्भाव्य मूल  $-1$  और  $1$  के बीच में होंगे।

(७) यदि  $t, y, d$  इन तीनों में से कोई दो शून्य के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि

$$(y-a)(y-b)(y-c) - t^2(y-a) - y^2(y-b) - d^2(y-c) - 2tyd = 0$$

इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे।

(=) यदि  $f(y) = y^n(1-y)^n = 0$  तो इस पर से सिद्ध करो कि

$$1 - \frac{n}{1} \frac{n+1}{1} y + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{(n+1)(n+2)}{2!} y^2 - \dots = 0$$

इसके सब मूल  $0$  और  $1$  के बीच में होंगे।

(८)  $f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + y - t = 0$  इसमें यदि पदों के सब संख्यात्मक गुणकों से  $p$  बड़ा हो और  $t$  धनात्मक हो परन्तु  $\frac{1}{2+4t}$  इससे छोटा हो तो अव्यक्त का एक धन सम्भाव्य मान  $2t$  से अल्प होगा।

(१०)  $3y^2 + 2y^2 - 6y^2 - 24y + t = 0$  इसमें यदि  $-m$  से छोटा और  $-11$  से बड़ा  $t$  हो तो समीकरण के चार

सम्भाव्य मूल, यदि,  $-n$  से बड़ा और १६ से छोटा न हो तो दो सम्भाव्य मूल और यदि १६ से बड़ा न हो तो कोई सम्भाव्य मूल न होगा ।

### ७-समीकरणों का लघूकरण

७६—समीकरण के किसी दो मूलों में किसी प्रकार के ज्ञात सम्बन्ध से अल्प घात के नये समीकरण द्वारा उन दोनों मूलों के जानने की रीति को समीकरण का लघूकरण कहते हैं ।

दिए हुए किसी समीकरण के दो मूलों में परस्पर सम्बन्ध को जानते हो तो उस सम्बन्ध से अल्प घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसका एक मूल दिए हुए समीकरण के एक मूल के समान होगा ।

जैसे  $f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n = 0$  इसके यदि दो मूल  $\alpha_1$  और  $\alpha_2$  हैं और इनमें  $\alpha_2 = f(\alpha_1)$  इस प्रकार का सम्बन्ध है तो  $\alpha_1$  के स्थान में  $y$  का उत्थापन देने से

$$f\{f(y)\} = p_0 \{f(y)\}^n + p_1 \{f(y)\}^{n-1} + \dots + p_n$$

यदि  $f\{f(y)\}$  इसको  $fi(y)$  कहें तो  $y$  के स्थान में  $अ_1$  का उत्थापन देने से

$fi(अ_1) = f\{f(अ_1)\} = f(अ_2) = 0$  क्योंकि अव्यक्त का  $अ_2$  यह एक मान है। इसे लिये  $fi(y) = 0$  और  $f(y) = 0$

इनके मूलों में  $अ_1$  यह एक मूल उभयनिष्ठ हुआ और  $f(y)$  और  $fi(y)$  का महत्तमापवर्तन अवश्य अव्यक्तात्मक निकलेगा जिसे शून्य के समान करने से  $अ_1$  यह व्यक्त हो जायगा। यदि महत्तमापवर्तन में अव्यक्त के वर्गादिरहें तो  $अ_1$  इसके दो तीन इत्यादि मान आवेंगे। फिर  $अ_1$  के मान से और  $अ_2 = f(अ_1)$  इस संबंध से  $अ_2$  का भी ज्ञान हो जायगा।

इस प्रकार  $f(y) = 0$  इसके दो मूल  $अ_1$  और  $अ_2$  ज्ञात हो गए। तब  $(y - अ_1)(y - अ_2)$  इससे  $f(y) = 0$  में भाग देने से लब्धि दो घात कम और निःशेष मिलेगी अर्थात् यदि  $f(y) = 0$  यह न घात का समीकरण होगा तो लब्धि  $n-1$  घात का समीकरण होगी। इस प्रकार दो मूलों के सम्बन्ध से दिए हुए समीकरण से दो अल्प घात का एक नया समीकरण बन जायगा।

उदाहरण—(१)  $f(y) = y^3 - ५y^2 - ४y + २० = 0$  इसके दो मूल ऐसे हैं जिनका अन्तर ३ होता है तो सब मूलों को बतलाओ।

यहां जिन दो मूलों का अन्तर ३ है यदि उनको  $अ_1$  और  $अ_2$  मान लें तो

$अ_2 = अ_1 + ३ = फा (अ_1)$  इस लिये ऊपर के समीकरण में  $य + ३$  का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} फि (य) &= (य + ३)^३ - ५(य + ३)^२ - ४(य + ३) + २० \\ &= य^३ + ६य^२ + २७य + २७ - ५य^२ - ३०य - ४५ \\ &\quad - ४य - १२ + २० \\ &= य^३ + ४य^२ - ७य - १० \end{aligned}$$

$फ (य)$  और  $फि (य)$  का महत्तमापवर्त्तन  $य - २$  हुआ । इसे शून्य के तुल्य करने से  $य$  अर्थात्  $अ_1 = २$  हुआ । इसका उत्थापन  $अ_1$  में देने से  $अ_2 = अ_1 + ३ = ५$  हुआ । फिर  $(य - २)$   $(य - ५)$  इसका भाग  $फ (य)$  में देने से लब्धि  $= य + २ = ०$  इस लिये  $य$  का तीसरा मान  $- २$  हुआ ।

( २ )  $फ (य) = य^३ - ५य^२ + ११य^२ - १३य + ६ = ०$  इसके दो मूल  $अ_1$  और  $अ_2$  के बीच  $२अ_2 + ३अ_1 = ७$  सम्बन्ध है तो सब मूलों को बताओ ।

यहां सम्बन्ध समीकरण से  $अ_2 = \frac{७ - ३अ_1}{२} = फा (अ_1)$

ऐसा हुआ इसलिये  $फ (य)$  में  $फा (य) = \frac{७ - ३अ_1}{२}$  इसका उत्थापन देने से, हर को समच्छेद कर उड़ा देने से और ६ का भाग देने से

$$फि (य) = ६य^३ - ५४य^२ + १२८य^२ - १३८य + ५४$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्तन य-१ हुआ। इसे शून्य के तुल्य करने से  $अ_१ = १$ । इसका उत्थापन  $अ_१$  में देने से  $अ_२ = २$ । फिर फ (य) में (य-१) (य-२) का भाग देकर लब्धि को शून्य के समान करने से और दो मूल  $१ + \sqrt{-२}$ ,  $१ - \sqrt{-२}$  ये आते हैं।

७७—यदि फ (य) = ० इसके  $अ_१$ ,  $अ_२$ ,  $अ_३$  इन तीन मूलों में

$$अ अ_१ + क अ_२ + ग अ_३ = घ$$

ऐसा सम्बन्ध हो तो यहां सम्बन्ध समीकरण से

$$अ_३ = \frac{घ - अ अ_१ - क अ_२}{ग}$$

फिर उत्थापन से फ ( $अ_१$ ) = ०, फ ( $अ_२$ ) = ०,

$$फ \left( \frac{घ - अ अ_१ - क अ_२}{ग} \right) = ०$$

ऐसे तीन समीकरण होंगे। अन्त के दो समीकरणों से  $अ_३$  की दो उन्मितिओं पर से एक

फा ( $अ_१$ ) = ० ऐसा समीकरण बनेगा। इसमें  $अ_१$  के स्थान में य का उत्थापन देने से फा (य) = ० और फ (य) = ० इनके मूलों में से एक मूल  $अ_१$  उभयनिष्ठ होगा जो महत्तमापवर्तन श्री युक्ति से सहज में व्यक्त हो जायगा।

७८—समीकरण के मूलों और पदों के जो सम्बन्ध २५वें प्रक्रम में लिखे हैं उनके बल से भी जिस समीकरण के मूलों के परस्पर सम्बन्ध दिए हों उन मूलों को सहज में निकाल सकते हैं। जैसे उदाहरण—(१)  $य^३ - ६य^२ + ११य - ६ = ०$



यदि इसके मूल  $अ_1, अ_2$  और  $अ_3$  हों और उनमें  $२अ_1 + ३अ_2 + ४अ_3 = ०$  ऐसा सम्बन्ध हो तो उन मूलों को व्यक्त करो।

$$\text{यहाँ २५वें प्रक्रम से } अ_1 + अ_2 + अ_3 = ६ \dots\dots\dots (१)$$

$$२अ_1 + ३अ_2 + ४अ_3 = २० \dots\dots\dots (२)$$

$$(१) \text{ का दूना } (२) \text{ में घटा देने से } अ_2 + २अ_3 = ८$$

$$\therefore अ_2 = ८ - २अ_3 = \text{फा } (अ_3)$$

फ (य) में  $८ - २य$  का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \text{फि (य)} &= (८ - २य)^2 - ६ (८ - २य) + ११ (८ - २य) - ६ \\ &= ४१२ - ३८४य + ६६य^2 - ८४ + १६२य \\ &\quad - २४य^2 + ८८ - २५य - ६ \\ &= २१० - २१४य + ७२य^2 - ८४ = ० \end{aligned}$$

— २ का अपवर्त्तन देने से

$$\text{फि (य)} = ४य^2 - ३६य + १०७ य - १०५$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन यहाँ य - ३ आता है।

$$\text{इसलिये } अ_3 = ३, अ_2 = ८ - २अ_3 = २, \text{ तब } अ_1 = १$$

(२) फ (य) = ० इसके दो दो मूलों का योग २ त अर्थात् यदि एक जोड़े मूल  $अ_1, अ_2$  हों तो  $अ_1 + अ_2 = २$ त, है तो मूलों को बताओ।

$$\text{यहाँ } अ_2 = २त - अ_1 \text{ वा. } अ_1 = १त - अ_2$$

इसलिये  $f(y) = 0$  और  $f(2t - y) = 0$  । परन्तु यहां दोनों फल एक रूप हो जायेंगे । क्योंकि  $f(a_1) = 0 = f(2t - a_2)$  और

$$f(a_2) = 0 = f(2t - a_1)$$

इसलिये दोनों फल में उभयनिष्ठ मूल  $a_1, a_2$  हैं ।

इसी प्रकार प्रत्येक जोड़ा मूल दोनों फलों में आवेंगे । इसलिये दोनों फल एक रूप के होंगे । अब यहां महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से मूल नहीं निकल सकते क्योंकि दोनों फल का महत्तमापवर्त्तन  $f(y)$  यही हुआ । तब जान पड़ा कि  $f(y) = 0$  यह जितने घात का समीकरण होगा उतने ही घात का समीकरण महत्तमापवर्त्तन की विधि से भी बना जिसके मूल जानने में कुछ भी सुगमता न पड़ेगी ।

इसलिये यहां कल्पना करो कि

$$\left. \begin{array}{l} a_1 - a_2 = 2t \\ a_1 + a_2 = 2t \end{array} \right\} \therefore a_1 = t + t$$

इसका उत्थापन  $f(a_1) = 0$  में देने से  $f(t + t) = 0$  ऐसा होगा । अब इस पर से  $t$  का मान जानने से तत्सम्बन्धी  $a_1$  और  $a_2$  आ जायेंगे । जब जानते हैं कि  $f(y) = 0$  इसके एक एक जोड़े मूल आवेंगे तब स्पष्ट है कि यह समघात का समीकरण होगा ।

मान लो कि

$$f(y) = (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3)(y - a_4) \dots$$

$$\begin{aligned}
 \text{तब फ (ल + त)} &= (त + ल - अ_१) (त + ल - अ_२) \\
 &\times (त + ल - अ_३) (त + ल - अ_४) \dots\dots \\
 &= \left\{ ल^२ - \left( \frac{अ_१ - अ_२}{२} \right)^२ \right\} \\
 &\times \left\{ ल^२ - \left( \frac{अ_३ - अ_४}{२} \right)^२ \right\} \dots\dots
 \end{aligned}$$

इसलिये फ (त + ल) = ० में ल के समघात रहेंगे। इसमें यदि ल<sup>२</sup> को एक अव्यक्त राशि मान लें तो जितने घात का फ (य) = ० यह समीकरण होगा उसके आधे घात का फ (त + ल) = ० यह समीकरण होगा।

अथवा कल्पना करो कि अ<sub>१</sub> अ<sub>२</sub> = ल तो

$$\begin{aligned}
 (य - अ_१) (य - अ_२) &= य^२ - (अ_१ + अ_२) य + अ_१ अ_२ \\
 &= य^२ - तय + ल
 \end{aligned}$$

इसलिये फ (य) यह य<sup>२</sup> - तय + ल इससे निःशेष होगा।

अब फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से य<sup>२</sup> - तय + ल इसका भाग तब तक देते जाओ जब तक कि शेष पा य + वा ऐसा न हो। पा और वा को य से स्वतन्त्र समझना चाहिए अर्थात् ये दोनों ल के फल होंगे।

अब पूर्व युक्ति से स्पष्ट है कि शेष शून्य होगा इसलिये पा = ० और व = ० होंगे। इसलिये ल का कोई मान अवश्य ऐसा होगा जिससे दोनों समीकरण सत्य होंगे। इसलिये पा और वा में एक मान उभयनिष्ठ हुआ जो महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से निकल आवेगा।

तब  $a_1 + a_2 = 2n$  और  $l = a_1$   $a_2$  इन समीकरणों से  $a_1$  और  $a_2$  व्यक्त हो जायेंगे ।

$$(3) \quad P_n(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

इसके सब मूल योगान्तर श्रेणी में हैं तो मूलों को बताओ ।

यहां यदि पहला मूल  $= a$  और चय  $= k$  ऐसी कल्पना की जाय तो सब मूल क्रम से

$a, a+k, a+2k, \dots, a+(n-1)k$  होंगे ।

२५वें प्रक्रम से

$$-p_1 = a + (a+k) + (a+2k) + \dots + \left\{ a + (n-1)k \right\}$$

$$\text{और } p_1^2 - 2p_2 = a^2 + (a+k)^2 + \dots + \left\{ a + (n-1)k \right\}^2$$

$$\text{अर्थात् } -p_1 = na + \frac{n(n-1)}{2} k, \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{और } p_1^2 - 2p_2 = n a^2 + n(n-1)ak + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} k^2 \dots \dots (2)$$

(1) के वर्ग को  $n$  गुणित (2) में घटा देने से

$$(n-1)p_1^2 - 2np_2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12} k^2 \dots \dots \dots (3)$$

इस पर से  $k$  व्यक्त हो जायगा फिर  $a$  भी व्यक्त होगा ।

(४)  $f(y) = y^3 - 3y^2 - 8y + 12 = 0$  यदि इसके एक मूल का चिन्ह बदल दिया जाय तो दूसरा मूल होता है अर्थात् यदि दो मूल  $\alpha_1$  और  $\alpha_2$  हों तो  $\alpha_2 = -\alpha_1$  यह सम्बन्ध है। तब सब मूलों को बतलाओ।

यहां ७६वें प्रक्रम से  $y$  के स्थान में  $-y$  का उत्थापन देने से

$$f_1(y) = y^3 + 3y^2 - 8y - 12$$

अब  $f(y)$  और  $f_1(y)$  के महत्तमापवर्त्तन से सब मूल निकाल सकते हो।

$$\text{अथवा } f(y) = y^3 - 3y^2 - 8y + 12 = 0 \dots \dots (1)$$

$$f_1(y) = y^3 + 3y^2 - 8y - 12 = 0 \dots \dots (2)$$

दोनों के अन्तर से

$$6y^2 - 24 = 0 \quad \therefore y = \pm 2$$

इसलिये  $f(y) = 0$  इसके दो मूल  $+2, -2$ , ये हुए। इन पर से तीसरा मूल  $+3$  आवेगा।

$$(5) y^3 - 7y^2 + 14y - 8 = 0 \dots \dots (1)$$

इसके दो मूलों का घात यदि २ हो तो मूलों को बताओ।

यदि दो मूल  $\alpha_1$  और  $\alpha_2$  हों तो  $\alpha_1 \alpha_2 = 2$

$$\therefore \alpha_2 = \frac{2}{\alpha_1} = f(\alpha_1)$$

इसलिये  $y$  के स्थान में  $\frac{2}{y}$  का उत्थापन देने से

$$फ\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{z}{y^3} - \frac{7 \times 8}{y^2} + \frac{2z}{y} - z = z - 2zy + 2zy^2 - 56 = 0$$

इसमें  $-8$  का भाग दे देने से मान लो कि

$$फि(y) = 2y^3 - 7y^2 + 7y - 2 = 0 \dots\dots\dots(२)$$

अब (१) और (२) के महत्तमापवर्तन  $y=1$  को शून्य के समान करने से  $अ_1 = 1$  और  $अ_2 = 2$

इन पर से तीसरा मूल  $अ_3 = 4$  आता है।

इस प्रकार से जहाँ जिस तरह से सुभीता पड़े वैसी क्रिया करनी चाहिए।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१— $y^4 - 7y^3 + 11y^2 - 7y + 10 = 0$  इसके दो मूल  $अ_1, अ_2$  में  $अ_2 = 2अ_1 + 1$  यह सम्बन्ध है। सब मूलों को बताओ। उत्तर  $अ_1 = 2, अ_2 = 5$  और दो मूल  $= \pm \sqrt{-1}$

२—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों को बताओ जिनके दो मूल  $अ_1, अ_2$  में  $अ_2 = -अ_1$  यह सम्बन्ध है।

$$(१) y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 2y - 5 = 0$$

$$(२) y^4 + 3y^3 - 7y^2 - 27y - 12 = 0$$

$$(३) y^4 + 3y^3 + 2y^2 + 5y - 3 = 0$$

$$(४) y^4 + y^3 - 11y^2 - 6y + 12 = 0$$

३— $y^4 + p_1y^2 + p_2y + p_3 = 0$  इसके दो मूल  $अ_1$  और  $अ_2$  में यदि  $अ_1अ_2 + 1 = 0$  ऐसा सम्बन्ध है तो  $p_1, p_2, p_3$  में कैसा सम्बन्ध होगा। उ०  $1 + p_2 + p_1p_3 + p_3^2 = 0$

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल योगान्तर श्रेढी में हैं। मूलों को बताओ।

$$(१) y^3 - ६y^2 + ११y - ६ = ०$$

$$(२) y^3 - ६y^2 + २३y - १५ = ०$$

$$(३) २y^3 - १६y^2 + २८y^2 + १६y - ३० = ०$$

$$(४) y^3 + ४y^2 - ४y^2 - १६y = ०$$

५— $y^3 - ७y^2 - y + २ = ०$  इसके दो मूलों का घात -१ है तो मूलों को बताओ। उ० १, -१, २।

६— $y^3 - ७y^2 + १४y - ८ = ०$  इसके क्रम से मूल  $अ_१$ ,  $२अ_१$ ,  $४अ_१$  इस प्रकार के हैं तो सब मूलों का ज्ञान करो।

७— $y^3 - ६y^2 + ७y^2 + ६y - ८ = ०$  इसके दो दो मूल  $अ + १$ ,  $अ - १$ ,  $क + १$ ,  $क - १$ , इस प्रकार से हैं। मूलों को बताओ। उ० १, -१, ४, २।

८— $y^3 - १२y^2 + ५५y^2 - १२०y^2 + १२४y - ४८ = ०$  इसके मूल  $अ_१$ ,  $२अ_१$ ,  $अ_२$ ,  $३अ_२$ ,  $अ_१ + अ_२$  इस क्रम से हैं। मूलों को व्यक्त करो। उ० १, २, २, ४, ३।

९—नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के कितने मान समान हैं।

$$(१) y^3 + ३y^2 - ५y^2 - ६y - ८ = ०$$

$$(२) y^3 + y^2 - ६y^2 + १०y - ८ = ०$$

$$उ० y = -४, वा y = ४$$

१०— $y^3 + पअय^2 + (म^२ + म) अ^२य^२ + प_१अ^३य + अ^४ = ०$  इसके सब मूल गुणोत्तर श्रेढी में हैं। सब मूलों को तथा प और प\_१ को म और अ के रूप में बताओ।

[मान लो कि मूल क्रम से  $\frac{अ_1}{क_1}, \frac{अ_2}{क_2}, अ_3, क_3, अ_4, क_4$  ये हैं। इनके घात  $अ_1^x = अ_2^y$ , और दो दो मूलों के घातों का योग  $= (म_1^2 + म)$  अ, इस पर से सब मूलों का पता लग जायगा और यह भी जान पड़ेगा कि  $प = प_1$ ।]

## ८-हरात्मक समीकरण

७६— $\frac{१}{अ}$  को अ की हरात्मा कहते हैं। इसी प्रकार य की हरात्मा  $\frac{१}{य}$  और  $\frac{य}{र}$  की हरात्मा  $\frac{र}{य}$  है।

**हरात्मक समीकरण**—अव्यक्त के स्थान में उसकी हरात्मा का उत्थापन देने से जिस समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता उसको हरात्मक समीकरण कहते हैं।

अर्थात्  $f(y) = 0$  इसके जितने मूल हैं उनके हरात्मा के समान अव्यक्त के स्थान जिस समीकरण में आते हैं उसका रूप ४०वें प्रक्रम से यदि

$$f(y) = y^n + प_1 y^{n-1} + प_2 y^{n-2} + \dots + प_n = 0 \text{ यह हो तो}$$

$$प_n r^n + प_{n-1} r^{n-1} + प_{n-2} r^{n-2} + \dots + प_1 r + १ = 0$$

ऐसा होगा।

इसमें  $प_n$  का भाग दे देने से समीकरण का रूप

$$r^n + \frac{प_{n-1}}{प_n} r^{n-1} + \frac{प_{n-2}}{प_n} r^{n-2} + \dots + \frac{प_1}{प_n} r + \frac{१}{प_n} = 0$$

ऐसा होगा।



इसमें यदि  $\frac{p_{n-1}}{p_n} = p_1, \frac{p_{n-2}}{p_n} = p_2, \dots \frac{p_1}{p_n} = p_{n-1}, \frac{1}{p_n} = p_n$

ऐसा हो तो स्पष्ट है कि जो रूप  $\Phi(y) = 0$  इसका है वही इस नये समीकरण का होगा। इसलिये  $y$  के स्थान में उसकी हरात्मा  $\frac{1}{y}$  का उत्थापन देने से भी  $y$  के वे ही सब मान आवेंगे। इस प्रकार  $y$  के स्थान में यदि उसके हरात्मा का उत्थापन देने से जो नया समीकरण बने उसमें भी यदि दिए हुए समीकरण के  $y$  के मान के समान ही मान आवें तो उस नये समीकरण को हरात्मक समीकरण कहते हैं।

ऊपर गुणकों में जो सम्बन्ध दिखलाया है उसके अन्तिम समीकरण  $\frac{1}{p_n} = p_n$  इससे  $p_n^2 = 1 \therefore p_n = \pm 1$ । इसलिये हरात्मक समीकरण दो प्रकार के होते हैं। (१) जिसमें  $p_n = +1$  और (२) जिसमें  $p_n = -1$ ।

पहिले प्रकार के समीकरण में

$$p_{n-1} = p_1, p_{n-2} = p_2, \dots p_1 = p_{n-1}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के गुणक जिस समीकरण में तुल्य होते हैं वही पहिले प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है। दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में

$$p_{n-1} = -p_1, p_{n-2} = -p_2, \dots p_1 = -p_{n-1}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित गुणकों की संख्या जिस समीकरण

में समान रहती है परन्तु बिन्हों में व्यत्यास हो जाता है वही दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है ।

८०—किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का समीकरण बनाना ।

कल्पना करो कि किसी हरात्मक समीकरण का अ<sub>१</sub> यह एक मूल है तो इसके आदि समीकरण में जिससे यह हरात्मक समीकरण बना है एक अव्यक्त मान  $\frac{१}{अ_१}$  यह होगा । परन्तु

दोनों समीकरणों में अव्यक्त के मान समान हैं इसलिये  $\frac{१}{अ_१}$  यह

एक अव्यक्त का मान हरात्मक समीकरण में भी होगा । इस युक्ति से स्पष्ट है कि हरात्मक समीकरण में एक एक जोड़े अव्यक्त

के मान अ<sub>१</sub>,  $\frac{१}{अ_१}$  । अ<sub>२</sub>,  $\frac{१}{अ_२}$  । अ<sub>३</sub>,  $\frac{१}{अ_३}$  इस प्रकार के होंगे ।

इसलिये समीकरण की घात संख्या यदि विषम होगी तो

हरात्मक समीकरण में अव्यक्त का एक मान अवश्य ऐसा होगा

जसकी हरात्मा उसी के तुल्य होगी अर्थात् वह मान पहले

प्रकार के हरात्मक समीकरण में - १ होगा और दूसरे प्रकार के

हरात्मक समीकरण में + १ होगा । इसलिये पहिले प्रकार के

हरात्मक समीकरण में y + १ का और दूसरे प्रकार के हरात्मक

समीकरण में y - १ का निःशेष भाग लग जायगा, जिसके

भाग देने से पहले प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात का

होगा । और यदि दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात

का होगा तो उसका रूप य<sup>n</sup> - १ + प<sub>१</sub>y (य<sup>n-२</sup> - १) + ... ..

इस प्रकार का होगा जो  $y^2 - 1$  इससे भाग देने से निशेष हो जायगा और लब्धि पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण होगी।

इस प्रकार से किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण बना सकते हैं। लाघव से सर्वत्र हरात्मक समीकरण से पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण समझना चाहिए जिसका अन्त पद  $+ 1$  होगा।

दूसरे प्रकार का समघात का यदि हरात्मक समीकरण होगा तो गुणकों के सम्बन्ध से  $p_m = -p_m$  एक ऐसी स्थिति होगी जहां  $m = \frac{n}{2}$  परन्तु जो कुछ  $p_m$  है सो तो हई है फिर वह अपने ही ऋणात्मक मान के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये यदि  $p_m$  शून्य के तुल्य न हो तो यह असंभव है। ऐसी स्थिति में हरात्मक समीकरण के बीच का पद न रहेगा।

द१—हरात्मक समीकरण को लघु करना अर्थात् छोटे घात का बनाना।

कल्पना करो कि

$$y^{2m} + p_1 y^{2m-1} + p_2 y^{2m-2} + \dots + p_{2m} y^0 + p_1 y + 1 = 0$$

यह एक हरात्मक समीकरण है। इसे छोटे घात का बनाना है।

ऊपर के समीकरण में  $y^m$  का भाग देने से, दो दो समान गुणक के पदों को एकत्र करने से

$$y^m + \frac{1}{y^m} + p_1 \left( y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}} \right)$$

$$+ p_2 \left( y^{m-2} + \frac{1}{y^{m-2}} \right) + \dots = 0 \text{ ऐसा हुआ ।}$$

$$\text{इसमें यदि } y + \frac{1}{y} = r_1, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = r_2,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = r_3, \dots, y^n + \frac{1}{y^n} = r_n,$$

ऐसी कल्पना की जाय तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$r_1^2 = \left( y + \frac{1}{y} \right)^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 = \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + 2$$

$$\therefore r_1^2 = r_2 + 2 \quad \therefore r_2 = r_1^2 - 2$$

$$r_3 = y^3 + \frac{1}{y^3} = \left( y + \frac{1}{y} \right) \left( y^2 + \frac{1}{y^2} - 1 \right)$$

$$= \left( y + \frac{1}{y} \right) \left\{ \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) - 1 \right\} = r_1 (r_2 - 1) \\ = r_1 r_2 - r_1$$

इस प्रकार

$$r_{t+1} = r_t r_1 - r_{t-1} \text{ ऐसा सिद्ध होगा ।}$$

इस पर से त के स्थान में २, ३, ४, इत्यादि का उत्थापन देने से  $r_1$  के फल स्वरूप में  $r_3, r_4$  इत्यादि के मान आजायंगे जिन पर से पहिले की अपेक्षा अब आधे घात का अर्थात्  $\frac{1}{2}$  घात का समीकरण बनेगा । इस पर से जब  $r_1$  का मान

आ जायगा तब  $y + \frac{1}{y} = 1$ , इस पर से  $y$  के दो दो मान आ जायंगे ।

उदाहरण—(१)  $y^2 + y^4 + y^6 + y^8 + y + 1 = 0$  इसमें  $y$  के मानों को बताओ ।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के समान गुणक समान हैं इसलिये यह हरात्मक समीकरण हुआ । अन्त पद के धन रूप अर्थात् एक होने से यह समीकरण  $y + 1$  से निःशेष होगा । भाग देने से

$$y^4 + y^2 + 1 = 0 ।$$

इसमें  $y^2$  का भाग देकर समान गुणक के दो दो पदों को एकत्र करने से

$$y^2 + \frac{1}{y^2} + 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore r_1 = \pm 1$$

$$\text{इसलिये } y + \frac{1}{y} = 1, y + \frac{1}{y} = -1$$

$$\text{इन पर से } y \text{ के मान } \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} ।$$

(२)  $y^{10} - 3y^8 + 2y^6 - 2y^4 + 3y^2 - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान क्या हैं ।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान और विरुद्ध चिन्ह के हैं इसलिये यह दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण है । इसे  $y^2 - 1$  से लघु प्रकार ( हवाँ प्रक्रम देखो ) से भाग देने से

$$\begin{array}{cccccc}
 १ & -३ & +५ & -५ & +३ & -१ \\
 & १ & -२ & ३ & -२ & १ \\
 \hline
 & -२ & ३ & -२ & १ & ०
 \end{array}$$

इसलिये हरात्मक समीकरण

$$y^5 - २y^3 + ३y^2 - २y^2 + १ = 0 \text{ यह हुआ } \dots\dots(१)$$

इसमें  $y^5$  का भाग दे देने से और सम गुणक के दो पदों को एकत्र करने से

$$\left(y^5 + \frac{१}{y^5}\right) - २\left(y^2 + \frac{१}{y^2}\right) + ३ = 0$$

प्रथम प्रक्रम से  $t_1$  और  $t_2$  के मान पर से

$$t_1 = r_1^5 - ४r_1^3 + २, \quad t_2 = r_1^5 - २ \text{ इनका उत्थापन देने से}$$

$$r_1^5 - ६r_1^3 + ६ = (r_1^3 - ३)^2 = 0$$

$$\text{इसलिये } r_1^3 = ३ \therefore r_1 = \pm \sqrt[3]{३}$$

$$\text{और } y + \frac{१}{y} = +\sqrt[3]{३}, \quad y + \frac{१}{y} = -\sqrt[3]{३}$$

$$\text{इन पर से } y \text{ के मान } \frac{\sqrt[3]{३} \pm \sqrt{-१}}{२}, \quad \frac{-\sqrt[3]{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$$

ये मान (१) समीकरण में दो दो बार आते हैं।

$$(३) \quad y^3 + १ = 0 \text{ इसके मूल बताओ।}$$

$$\text{यहां } y^3 \text{ का भाग देने से } y^3 + \frac{१}{y^3} = 0$$

$$\text{प्रथम प्रक्रम से } r_1^3 - ३r_1 = 0 \therefore r_1 = 0, \quad r_1 = \pm \sqrt[3]{३}$$

इसलिये दिए हुए समीकरण में वर्गात्मक अव्यक्त खराड

$y^2 + 1 = 0$ ,  $y^2 \pm \sqrt{3} y + 1 = 0$  ऐसे होंगे जिनके वश से ६ मूल आ जायेंगे ।

$$(४) \frac{(1+y)^2}{1+y^2} + \frac{(1-y)^2}{1-y^2} = 2 \text{ अ इसमें } y \text{ के मान बताओ ।}$$

यहां समीकरण का रूप छोटा करने से और ८१वें प्रक्रम की युक्ति से

$$(1-\alpha)r_1^2 + (1+\alpha)r_2^2 - (4+\alpha) = 0 \text{ ऐसा होगा ।}$$

इस पर से  $y$  के सब मानों का पता लग जायगा ।

$$(५) y^{2m} + p_1 y^{2m-1} + p_2 y^{2m-2} + \dots + p_m y^0 \\ + 1 = 1 \text{ कयम-१} + p_{m-1} \text{ कयम-२} + \dots + p_2 \text{ कयम-२} y^2 + p_1 \text{ कयम-१} y + \text{कयम} = 0$$

इसका ऐसा रूपान्तर करो जिसमें एक हरात्मक समीकरण बने ।

मान लो कि  $y = \text{लक}^{\frac{1}{2}}$  तो समीकरण का रूप

$$\text{ल}^{2m} \cdot \text{कयम} + p_1 \text{ल}^{2m-1} \cdot \text{क}^{\frac{2m-1}{2}} + \dots + p_m \text{ल}^m \text{क}^{\frac{m}{2}} \\ + p_{m-1} \text{ल}^{m-1} \text{क}^{\frac{m+1}{2}} + \dots \\ + \dots + p_1 \text{ल} \text{क}^{\frac{2m-1}{2}} + \text{कयम} = 0$$

इसमें  $x$  का भाग देने से

$$\begin{aligned} & x^m + p_1 x^{m-1} \cdot k^{-\frac{1}{2}} + \dots + p_m x^0 \cdot k^{-\frac{m}{2}} \\ & + p_{m-1} x^{m-1} \cdot k^{-\frac{m-1}{2}} + \dots \\ & + \dots + p_1 k^{-\frac{1}{2}} + 1 = 0 \end{aligned}$$

अब यह हंरात्मक समीकरण हो गया क्योंकि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान हैं।

इस प्रकार से दिए हुए समीकरण से जहाँ हंरात्मक समीकरण बन जाता हो तहाँ अव्यक्त के मान निकल सकते हैं।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

- १।  $y^2 - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।
- २।  $(1+y)^2 = a(1+y^2)$  इसके मूल बताओ।
- ३।  $(1+y)^2 = a(1+y^2)$  इसमें  $y$  के मान बताओ।
- ४।  $2y^3 + y^2 - 13y^2 + 13y^2 - y - 2 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।  
- उ० २, १, १, १,  $(-3 \pm 1/2)$ , १, -१।
- ५।  $y^2 - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।
- ६।  $y^2 + py^2 + 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।
- ७।  $y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_r y^2 + p_1 y + 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान यदि अ, क, ख, ग, घ, इत्यादि हों तो सिद्ध करो कि



$$\begin{aligned} & \frac{अ^2}{क^2} + \frac{अ^2}{ख^2} + \dots + \frac{क^2}{अ^2} + \frac{क^2}{ख^2} + \dots + \frac{ख^2}{अ^2} + \frac{ख^2}{क^2} + \dots \\ & = (प_1^2 - २प_2)^2 - न \end{aligned}$$

$$८। य^{२न} - प_१ य^{२न-१} + प_२ य^{२न-२} - प_३ य^{२न-३} + \dots = ०$$

इस प्रकार के हरात्मक समीकरण में जहाँ एक धन, एक ऋण, इस प्रकार से पद हैं वहाँ सिद्ध करो कि यदि  $\frac{प_१}{न} < २$  तो सब अव्यक्त के मान संभाव्य नहीं हो सकते।

९।  $य^७ - २य^५ + य^४ + य^३ - २य^२ + १ = ०$  इसके मूल बताओ।

१०।  $य^७ + २य^६ - ८य^५ - ७य^४ - ७य^३ - ८य^२ + २य + १ = ०$  इसमें  $य$  के मान बताओ।

११।  $य^८ + २य^७ + ३य^६ + २य^५ - ३य^४ - ३य^३ - १ = ०$  इस में  $य$  के मान बताओ।

## ६-द्वियुक्पद समीकरण

८२—जो समीकरण  $य^n - अ = ०$  इस प्रकार का होता है उसे द्वियुक्पद समीकरण कहते हैं। इसमें  $अ$  यह व्यक्त संख्या है।

इस समीकरण के सब मूल भिन्न भिन्न होंगे क्योंकि फ' (य) =  $य^n - अ = ०$  तो फ' (य) =  $न य^{n-१} = ०$ । अब  $य$  का कोई ऐसा मान नहीं जो दोनों समीकरणों को ठीक रखे (५३वां प्रक्रम देखो)

दृ३—यदि  $y^n - अ = ०$  तो बीजगणित की साधारण रीति से  $y = \sqrt[n]{अ}$  अर्थात् अ के न घात मूल के तुल्य y का एक मान आता है। परन्तु वह न घात का समीकरण है इसलिये २४वें प्रक्रम से y के भिन्न भिन्न न मान आवेंगे। इसलिये कह सकते हैं कि कोई बीजात्मक राशि के न घात मूल भिन्न भिन्न न आवेंगे।

किसी बीजात्मक राशि के कोई एक न घात मूल से एक के अर्थात् रूप के न घात मूलों को क्रम से गुण देने से उस राशि के सब न घात मूलों के मान हो जायेंगे।

कल्पना करो कि अ राशि के न घात मूल का एक मान अ है अर्थात्  $अ^n = अ$  तो y के स्थान में अ र का उत्थापन देने से  $y^n - अ = अ^n - अ = अ (अ^{n-1} - १) = ०$ ।

$$\therefore अ^{n-1} - १ = ० \quad \therefore अ = \sqrt[n-1]{१}$$

इसलिये १ के न घात मूल के तुल्य र हुआ और  $y = अ \cdot र = अ \sqrt[n-1]{१}$ । परन्तु  $y = \sqrt[n]{अ}$  इसलिये  $\sqrt[n]{अ} = अ \sqrt[n-1]{१}$ ।

$अ^n - अ = ०$  वा  $अ^n + अ = ०$  इस प्रकार के दिए हुए समीकरण पर से  $अ^{n-1} - १ = ०$  वा  $अ^{n-1} + १ = ०$  इसे प्रकार का समीकरण बन जाता है जिससे १ के न घात मूलों के मान

जान कर उन्हें क्रम से  $\alpha$  के  $n$  घात मूल के एक मान से जा व्यक्तिगणित वा द्वियुक्पद सिद्धान्त से आ जायगा, गुण देने से  $y$  के सब मान आ जायंगे।

अब  $+1$  वा  $-1$  के  $n$  घात मूल के सब मान कैसे निकलेंगे इसके लिये आगे कुछ सिद्धान्त दिखलाते हैं।

८४—यदि  $y^n - 1 = 0$  इसमें  $y$  का एक मान  $\alpha_1$  हो तो  $\alpha_1^m$  यह भी  $y$  का एक मान होगा जहां  $m$  कोई धन वा ऋण अभिघात है। क्योंकि  $(\alpha_1^m)^n = (\alpha_1^n)^m = 1^m = 1$ ।

८५—यदि  $y^n + 1 = 0$  इसमें यदि  $y$  का एक मान  $\alpha_1$  हो तो  $\alpha_1^m$  भी  $y$  का एक मान होगा जहां  $m$  कोई धन वा ऋण विषम अभिघात है। क्योंकि

$$(\alpha_1^m)^n = (\alpha_1^n)^m = (-1)^m = -1$$

८६—यदि  $m$  और  $n$  परस्पर दृढ़ हो तो  $y^m - 1 = 0$  और  $y^n - 1 = 0$  इन दोनों समीकरणों में एक को छोड़  $y$  का ऐसा कोई मान न होगा जो उभयनिष्ठ हो।

कल्पना करो कि  $p_1$  और  $p_2$  दो ऐसे अभिघात हैं जिनके वश से

$$p_1 m - p_2 n = \pm 1$$

ऐसा समीकरण बनना है। ( $p_1$  और  $p_2$  सर्वदा  $\frac{m}{n}$  इसके विततरूप से व्यक्त हो जाते हैं; इसके लिये मेरा सोचा

भास्कराचार्य का बीजगणित देखो) और मान लो कि य का एक मान एक को छोड़  $अ_1$  है जो दोनों समीकरणों को ठीक रखता है तो

$$अ_1 = 1 \quad \therefore \quad अ_{प,म} = 1 \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{और } अ_1 = 1 \quad \therefore \quad अ_{प,न} = 1 \dots \dots \dots (२)$$

(१) में (२) का भाग देने से

$$अ_{प,म} - अ_{प,न} = अ_{\pm 1} = 1$$

इसलिये  $अ_1 = 1$  इससे ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध हुआ ।

८७— $य^n - 1 = 0$  इसमें यदि न दृढ़ संख्या हो और इस समीकरण का एक मूल रूप छोड़ कर  $अ_1$  हो तो सब मूल क्रम से

$अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_{n-1}, \dots, अ_n$  ये होंगे ।

८८वें प्रक्रम में सिद्ध है कि  $अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_n$  ये सब मूल हैं । इसलिये यहाँ पर इतना ही दिखला देना है कि ये सब परस्पर भिन्न हैं अर्थात् इनमें कोई एक दूसरे के समान नहीं हैं । यदि हैं तो मान लो कि  $अ_1$  और  $अ_2$  दोनों तुल्य हैं जहाँ त और द दोनों न से अल्प हैं । इसलिये त-द भी न से अल्प होगा ।

$$\text{अब } अ_1 = अ_2 \quad \therefore \quad अ_1 - अ_2 = 0 \quad \text{और } अ_1 = 1$$

इसलिये  $य^n - 1 = 0$  और  $य^n - 1 = 0$  इन दोनों समीकरणों में य का एक मान रूप के अतिरिक्त  $अ_1$  उभयनिष्ठ हुआ जो न और त-द के परस्पर दृढ़ होने से ८८वें प्रक्रम से असम्भव है । इसलिये

$अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_n$  ये सब आपस में समान नहीं हैं यह सिद्ध हुआ। तब स्पष्ट हो गया कि वे सब  $य^n - १ = ०$  इसके मूल हैं।

दृ८—यदि  $n$  दृढ़ संख्या न हो और  $य^n - १ = ०$  इसका रूपातिरिक्त एक मूल  $अ_१$  हो तब यह नहीं कह सकते कि  $अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_n$  ये भी क्रम से सब मूल होंगे।

क्योंकि यदि  $n = p \cdot l$ , जहां  $p$  दृढ़ संख्या है और  $य^p - १ = ०$  इसका एक मूल  $अ_१$  हो तो यही एक मूल  $य^n - १ = ०$  इसका भी होगा क्योंकि  $अ_n^p = अ_१^p = (अ_१^p)^l = १$  और उर्व प्रक्रम की युक्ति से

$अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_p$  ये सब भिन्न भिन्न होंगे परन्तु आगे आगे बढ़ाने से  $अ_{p+1}^p = अ_१^p \times अ_१ = अ_१$  यह अव्यक्त के पहले मान के समान हो गया। इसी प्रकार  $य$  के आगे के सब मान अब पिछले मानों के समान होंगे।

इसलिये  $अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_n$  ये सब  $य^n - १ = ०$  इसके सब मूल नहीं हो सकते क्योंकि इसके जितने मूल हैं उनमें कोई आपस में समान नहीं है (८२वां प्र० देखो)।

दृ९—यदि  $n = k \cdot l$ , जहां  $ये सब दृढ़ संख्या हैं$  तो  $य^k - १ = ०, य^{kl} - १ = ०, य^l - १ = ०, \dots$  इनके जो मूल होंगे वे सब  $य^n - १ = ०$  इसके भी मूल होंगे।

क्योंकि यदि  $य^k - १ = ०$  इसके कोई एक मूल को  $अ_१$  कहो तो  $अ_१^k = १$  जिससे  $अ_n^k = (अ_१^k)^l = १$  अर्थात्  $अ_n^k - १ = ०$

- इसी प्रकार और  $y^x - 1 = 0$ ,  $y^y - 1 = 0 \dots$  समीकरणों के मूल से भी सिद्ध कर सकते हो।

६०—यदि  $n = क, ख, ग \dots$  जहाँ  $क, ख, ग \dots$  इत्यादि सब दृढ़ संख्या हैं तो  $y^n - 1 = 0$  इसके मूल  $(1 + अ_1 + अ_2 + अ_3 + \dots + अ_{क-1}) (1 + अ_2 + अ_3 + अ_4 + \dots + अ_{ख-1}) (1 + अ_3 + अ_4 + \dots + अ_{ग-1})$  इनके गुणनफल में जो आदि से न पद होंगे उन प्रत्येक पद के समान होंगे। जहाँ  $अ_1, य^क - 1 = 0$  इसका  $अ_2, y^ख - 1 = 0$  इसका  $अ_3, y^ग - 1 = 0$  इसका  $\dots$  एक मूल है।

यहाँ  $क, ख, ग$ , तीन दृढ़ संख्या के घात के तुल्य न है यह मान कर उपपत्ति दिखलाई जाती है।

ऊपर के गुणनफल में मान लो कि कोई पद  $अ_प, अ_ख, अ_ग$  है तो स्पष्ट है कि यह  $y^n - 1 = 0$  इसका एक मूल है क्योंकि  $अ_प, न = 1, अ_ख, न = 1, अ_ग, न = 1$

इसलिये  $(अ_प, अ_ख, अ_ग)^न = 1$

अब इतना और दिखला देना है कि ऊपर के गुणनफल में कोई दो पद आपस में तुल्य नहीं है। यदि कहा जाय कि तुल्य हैं तो मान लो कि

$अ_प, अ_ख, अ_ग = अ_प', अ_ख', अ_ग'$  तब  $अ_प - प' = अ_ख' - ख अ_ग' - ग$  इस समीकरण का बायां पद  $य^क - 1 = 0$  इसका एक मूल है और दहना पद

$य^ख ग - 1 = 0$  इसका एक मूल है। इसलिये  $य^क - 1 = 0$ ,  $य^ख ग - 1 = 0$  इन दोनों में एक मूल उभयनिष्ठ हुआ। परन्तु क और ख न परस्पर दृढ़ हैं, इसलिये  $\infty$  प्रक्रम से यह बात

असंभव है। इसलिये ऊपर के गुणन फल में कोई दो पद परस्पर तुल्य नहीं हैं।

६१—इसी प्रकार यदि  $n = क^प ख^ब ग^म$  जहाँ  $क, ख, ग$  दृढ़ हैं तो दिखला सकते हो कि  $अ_१, अ_२, अ_३$  इस प्रकार के जो न गुणन फल होंगे वे  $य^n - १ = ०$  इसके मूल होंगे जहाँ  $अ_१, य^क - १ = ०$  इसका  $अ_२, य^ख - १ = ०$  इसका  $अ_३, य^ग - १ = ०$  इसका एक मूल है।

इसकी उपपत्ति भी पिछले ही प्रक्रम की युक्ति ऐसी है क्योंकि  $क^प, ख^ब, ग^म$  इनमें प्रत्येक से  $n$  निःशेष होता है इसलिये  $अ_n = १, अ_n = १, अ_n = १$  और ६०वें प्रक्रम की युक्ति से दिखला सकते हो कि  $अ_१, अ_२, अ_३$  इस प्रकार के मूलों के कोई दो गुणनफल समान नहीं हैं।

इसी प्रकार, तीन से अधिक दृढ़ संख्याओं को भिन्न भिन्न घात के गुणन फल के तुल्य 'न' हो तो भी सब बात सिद्ध कर सकते हो।

६२— $य^n - १ = ०$  इसमें  $य$  के  $n$  मान आवेंगे और यदि  $n = प^अ$  जहाँ  $प$  कोई दृढ़ संख्या है और  $य^{अ-१} - १ = ०$  इसमें  $प^{अ-१}$  इतने  $य$  के मान आवेंगे जो सब ६६वें प्रक्रम से  $य^n - १ = ०$  इसमें भी  $य$  के मान होंगे। इसलिये  $य^{प^{अ-१}} - १ = ०$  इसके जितने मूल हैं उनसे नये  $प^{अ} - प^{अ-१} = प^{अ} (१ - \frac{१}{प})$  इतने मूल  $य^n - १ = ०$  इसके होंगे।

इसी प्रकार  $य^{क-१} - १ = ०$  इसके मूल से  $य^{क} - १ = ०$  इस के नये मूल  $य^{क} (१ - \frac{१}{क})$  इतने होंगे।

अब यदि  $n = p^{\text{अ}} v^{\text{क}}$  जहाँ  $p$  और  $v$  परस्पर दृढ़ हैं और ऊपर के नये मूलों में पहले समीकरण का एक मूल  $a_1$ , दूसरे का एक मूल  $a_2$ , कल्पना करो तो जितने मूल  $y^{\text{अ}} - 1 = 0$ , और  $y^{\text{क}} - 1 = 0$  इनके होंगे उनसे नया एक मूल  $a_1, a_2$  के तुल्य  $y^n - 1 = 0$  इसका होगा।

यदि कहो कि  $a_1, a_2$  यह नया मूल  $y^n - 1 = 0$  इसका न होगा तो कल्पना करो कि कोई 'न' से अल्प  $m$  घात के समीकरण का यह मूल होगा तो  $(a_1, a_2)^m = 1$

$$\therefore a_1^m = a_2^{-m}$$

परन्तु  $a_1^{\text{अ}}, y^{\text{अ}} - 1 = 0$  इसका एक मूल है और  $a_1^{-m}, y^{\text{क}} - 1 = 0$  इसका एक मूल है। इसलिये दोनों समीकरण का एक ही मूल हुआ जो  $p^{\text{अ}}$  और  $v^{\text{क}}$  के परस्पर दृढ़ होने से  $\frac{p}{v}$  प्रक्रम से असंभव है। इसलिये  $n$  से  $m$  छोटा नहीं हो सकता। इसलिये  $y^n - 1 = 0$  इसका  $a_1, a_2$  यह एक नया मूल होगा। इस प्रकार से दो दो मूलों को लेने से

$$p^{\text{अ}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) v^{\text{क}} \left(1 - \frac{1}{v}\right) = n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

इतने भेद होंगे। इसलिये  $y^n - 1 = 0$  इसके  $n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \times \left(1 - \frac{1}{v}\right)$  इतने मूल

$y^{\text{अ}} - 1 = 0$  और  $y^{\text{क}} - 1 = 0$  इसके मूलों से नये आवेंगे।

**विशिष्ट मूल**—इस प्रकार से  $n$  घात द्वियुक्पद समीकरण में  $n$  के अपवर्तनाङ्क रूप घात के समीकरण के मूलों से जो नये मूल आते हैं उन्हें विशिष्ट मूल कहते हैं।



६३— $y^n - 1 = 0$  इसका एक विशिष्ट मूल यदि  $a_1$  कहें तो सब मूल क्रम से

$a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, \dots, a_1^{n-1}$  ये होंगे।

यहां स्पष्ट है कि  $a_1^n = 1$  क्योंकि  $n$ वें प्रक्रम से ये सब मूल होंगे। इनमें यदि कोई दो तुल्य हों तो मान लें कि  $a_1^n = a_1^d$   $\therefore a_1^{n-d} = 1$  परन्तु  $n-d$  यह  $n$  से अल्प है इसलिये  $a_1$  विशिष्ट मूल नहीं हो सकता।

ऊपर के मूलों को  $1, a_1, a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{n-1}$  ऐसे भी लिख सकते हैं। इस श्रेणी में यदि एक पद  $a_1^r$  यह चुन लें जहां  $n$  से छोटा और दृढ़ है तो

$$a_1^r, a_1^{2r}, a_1^{3r}, \dots, a_1^{(n-1)r}, a_1^{nr} (= 1)$$

ये सब भी परस्पर दृढ़ भिन्न होंगे क्योंकि  $n, 2n, 3n, \dots$  इत्यादि घाताङ्कों में  $n$  का भाग देने से शेष भिन्न भिन्न  $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  ये आते हैं। और ऊपर लिखे मूलों में से  $a_1^r$  से आगे  $n+1$  दूर्ग पर जो जो पद हैं उनके मूल होंगे। अन्तिम पद के बाद आठि पद से गणना कर  $n+1$  का विचार करो। इसलिये ये भी वे ही सब मूल हैं केवला ऊपर के क्रम की अपेक्षा भिन्न क्रम से स्थित है।

६४— $y^n - 1 = 0$  इसके कोई एक विशिष्ट मूल जानने के लिये चाहिए कि  $n$  का दृढ़ गुण्य गुणक रूप खण्ड कर उन गुण्य गुणक घात के जो पृथक् पृथक् द्वियुक्तपद समीकरण होंगे उनमें जो समान अव्यक्तात्मक गुण्य गुणक रूप खण्ड हों उनमें से एक एक और भिन्न अव्यक्तात्मक सब खण्डों के घात

से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लब्धि को शून्य के तुल्य करने से विशिष्ट मूल को लाना चाहिए। अथवा जो पृथक् पृथक् द्वियुक्पद समीकरण है उनके लघुत्तमापवर्त्य से भाग देकर, लब्धि को शून्य कर विशिष्ट मूल ले आओ।

जैसे  $y^3 - 1 = 0$  इसके मूलों को जानना है।

यहां  $n = 3 = 2 \times 1$  इसलिये  $y^2 - 1 = 0$ ,  $y^3 - 1 = 0$  इनके सब मूल  $y^3 - 1 = 0$  इसके भी मूल होंगे (८६ प्र० देखो)

परन्तु  $y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$  और  $y^3 - 1 = (y-1) \times (y^2 + y + 1)$ । दोनों में  $y-1$  यह खण्ड आया। यह खण्ड और दोनों के भिन्न भिन्न खण्डों के घात

$$\begin{aligned} &= (y+1)(y-1)(y^2+y+1) \\ &= (y+1)(y^3-1) \end{aligned}$$

इससे  $y^3 - 1$  इसमें भाग देने से और लब्धि को शून्य के समान करने से

$$\frac{y^3 - 1}{(y+1)(y^3 - 1)} = \frac{y^3 + 1}{y+1} = y^2 - y + 1 = 0 \text{ ऐसा हुआ}$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha_1 \text{ वा } \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha_2।$$

और दिए हुए समीकरण के मूल

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 (= 1)$$

यहां

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$अ^१ = अ_१ \cdot अ_२ = \frac{(१ + \sqrt{-३})(-१ + \sqrt{-३})}{२ \times २} = -१$$

$$अ^२ = अ_१ \cdot अ_३ = -\frac{१ + \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^३ = अ_१ \cdot अ_४ = \frac{(-१ - \sqrt{-३})(१ + \sqrt{-३})}{२ \times २} = \frac{१ - \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^४ = अ_१ \cdot अ_५ = \frac{(१ - \sqrt{-३})(१ + \sqrt{-३})}{२ \times २} = १$$

इसलिये क्रम से मूल

$$१, \frac{१ + \sqrt{-३}}{२}, \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२}, -१, -\frac{१ + \sqrt{-३}}{२}, \frac{१ - \sqrt{-३}}{२},$$

इसमें अन्त का मूल, अ<sub>२</sub> के समान है। इस पर से यदि ६३वें प्रक्रम से मूल निकालो तो

अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, अ<sub>४</sub>, अ<sub>५</sub>, अ<sub>६</sub> ये होंगे।

परन्तु

$$अ_२ = \frac{१ - \sqrt{-३}}{२}, अ_३ = -\frac{१ + \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_४ = अ_२ \cdot अ_३ = \frac{(१ - \sqrt{-३})(-१ - \sqrt{-३})}{२ \times २} = -१$$

$$अ_५ = अ_२ \cdot अ_४ = -\frac{१ - \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_1' = अ_2' \cdot अ_2 = \frac{(1 - \sqrt{-3})(-1 + \sqrt{-3})}{2 \times 2} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$अ_1' = अ_2' \cdot अ_2 = \frac{(1 - \sqrt{-3})(1 + \sqrt{3})}{2 \times 2} = 1$$

क्रम से मूल

$$\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, -1, -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, 1$$

यह मूल श्रेणी  $अ_2$  से बनी है और  $अ_2 = अ_1'$ । इसलिये ६वें प्रक्रम से  $t = ५$  और  $t + १ = ६$ , इसलिये पहली मूल श्रेणी के  $अ_1'$  पद से छ पद जो हैं वे इस मूल श्रेणी के क्रम से दूसरा, तीसरा इत्यादि पद हैं।

(२)  $y^{12} - 1 = 0$  इसके विशिष्ट मूलों को जानना है।

यहां  $n = १२$  जो २ और ३ दृढाङ्क से निःशेष होता है जैसे  $1^2 = ४$ ,  $1^2 = ६$ , इसलिये  $y^4 - 1 = 0$  और  $y^6 - 1 = 0$  इसके जितने मूल होंगे वे सब  $y^{12} - 1 = 0$  इसके भी मूल होंगे। इसलिये  $y^4 - 1$  और  $y^6 - 1$  इसके लघुत्तमापवर्त्य  $(y^2 + 1)$

$$\times (y^3 - 1) \text{ इससे } y^{12} - 1 \text{ इसमें भाग देने से } \frac{y^{12} - 1}{(y^2 + 1)(y^3 - 1)} \\ = y^4 - y^2 + 1 \dots \dots \dots \text{ इस लब्धि को शून्य के तुल्य करने से } -$$

$$y^4 - y^2 + 1 = 0 \dots \dots \dots (१)$$

यह हरात्मक समीकरण हुआ।

(१) में  $y^2$  का भाग देने से और  $y + \frac{1}{y} = r$ , मानने से  
द्विचै प्रक्रम से

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 1 = r^2 - 1 = 0$$

$$\therefore r = \pm \sqrt{1} = y + \frac{1}{y}$$

$$\therefore y^2 + 1 = \pm y\sqrt{1}$$

$$\text{वा } y^2 \mp y\sqrt{1} + 1 = 0$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{1} \pm \sqrt{-1}}{2} \text{ वा } y = \frac{-\sqrt{1} \pm \sqrt{-1}}{2}$$

$y^2 - 1 = 0$  इसके ये चार विशिष्ट मूल हुए।

इन चारों को क्रम से  $\alpha$ ,  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\frac{1}{\alpha_1}$  कहो तो

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1} = (\alpha + \alpha_1) \left(1 + \frac{1}{\alpha\alpha_1}\right) = 0$$

$$\therefore \alpha\alpha_1 = -1$$

$y^2 - 1 = (y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0$ ।  $y^2 - 1 = 0$  इसके जो मूल हैं उनके नये  $\alpha$  और  $\alpha_1$  हैं इसलिये  $y^2 + 1 = 0$  इस समीकरण के  $\alpha$  और  $\alpha_1$  मूल हैं। तब  $\alpha^2 = -1$  और  $\alpha^4 = -\frac{1}{\alpha} = \alpha_1$ । इसलिये

$\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{\alpha_1}$ , इन मूलों को  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ ,  $\alpha^4$  इस श्रेणी से प्रकट कर सकते हैं क्योंकि  $\alpha^2 = -1$  और इस श्रेणी में

एकादि पदों के पहले स्थान में क्रम से अ, अ<sup>२</sup>, अ<sup>३</sup>, अ<sup>४</sup> रख कर, क्रम से उनका ५, ७, ११ घात करने से और १२ से ऊपर के घातों को १२ से तष्ट करने से

अ,	अ <sup>२</sup> ,	अ <sup>३</sup> ,	अ <sup>४</sup>
अ <sup>५</sup> ,	अ <sup>६</sup> ,	अ <sup>७</sup> ,	अ <sup>८</sup>
अ <sup>९</sup> ,	अ <sup>१०</sup> ,	अ <sup>११</sup> ,	अ <sup>१२</sup>
अ <sup>१३</sup> ,	अ <sup>१४</sup> ,	अ <sup>१५</sup> ,	अ <sup>१६</sup>

देखो यहाँ हर एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तियों में वे ही मूल हैं केवल क्रम में भेद है।

अ, अ<sup>२</sup>, अ<sup>३</sup>, अ<sup>४</sup> इन विशिष्ट मूलों में घात की संख्यायें ५, ७, ११ ये सब १२ से अल्प और दृढ़ हैं। इसलिये ह्रस्व प्रक्रम से कोई को लेकर उसके एक, द्वि, इत्यादि सम घात से य<sup>१२</sup>—१=० इसके मूल आ जायँगे। इन चारों पर से मूल जो घात १२ से ऊपर हैं उन्हें १२ से तष्ट कर देने से

अ	अ <sup>२</sup>	अ <sup>३</sup>	अ <sup>४</sup>	अ <sup>५</sup>	अ <sup>६</sup>	अ <sup>७</sup>	अ <sup>८</sup>	अ <sup>९</sup>	अ <sup>१०</sup>	अ <sup>११</sup>	१
अ <sup>२</sup>	अ <sup>४</sup>	अ <sup>६</sup>	अ <sup>८</sup>	अ <sup>१०</sup>	अ <sup>१२</sup>	अ <sup>१४</sup>	अ <sup>१६</sup>	अ <sup>१८</sup>	अ <sup>२०</sup>	अ <sup>२२</sup>	२
अ <sup>३</sup>	अ <sup>६</sup>	अ <sup>९</sup>	अ <sup>१२</sup>	अ <sup>१५</sup>	अ <sup>१८</sup>	अ <sup>२१</sup>	अ <sup>२४</sup>	अ <sup>२७</sup>	अ <sup>३०</sup>	अ <sup>३३</sup>	३
अ <sup>४</sup>	अ <sup>८</sup>	अ <sup>१२</sup>	अ <sup>१६</sup>	अ <sup>२०</sup>	अ <sup>२४</sup>	अ <sup>२८</sup>	अ <sup>३२</sup>	अ <sup>३६</sup>	अ <sup>४०</sup>	अ <sup>४४</sup>	४

ये क्रम भेद से सब तिर्यक् पंक्तियों में एक ही हैं।

इस प्रकार से जहाँ जैसा सम्भव हो तहाँ तैसे दिए हुए समीकरण के ऐसे उससे बड़े से बड़े ऐसे लघु घात के समीकरण बनाने चाहिए जिनमें वे लघु घाताङ्क से दिए हुए समीकरण की घात संख्या निःशेष हो जाय। फिर इन समीकरणों के लघुत्तमापवर्त्य से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लघ्वि को शून्य के समान कर विशिष्ट मूलों का पता लगाना चाहिए।

६५— $y^n - 1 = 0$  इस समीकरण में जहाँ  $n$  की संख्या दो से अधिक है, ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि १ को छोड़ इसके सब मूल असम्भव हैं। इसलिये ऐसे समीकरण का विशिष्ट मूल भी असम्भव संख्या होगा।

त्रिकोणमिति में डिमाइवर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि यदि  $t$  यह धन अभिघातक हो तो

$$\left( \cos \frac{2t\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2t\pi}{n} \right)^n = 1$$

इसलिये  $y^n - 1 = 0$  इसका एक मूल

$$\cos \frac{2t\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2t\pi}{n} = 1, \text{ यह अवश्य होगा}$$

यदि  $t$  को  $n$  से बड़ा मानो तो कह सकते हो कि  $y^n - 1 = 0$  इसका एक विशिष्ट मूल  $1$  होगा और तब ६३वें प्रक्रम से

$$1, 1^n, 1^{2n}, \dots, 1^{n-1}$$

ये सब दिए हुए समीकरण के मूल होंगे जो परस्पर भिन्न हैं। यदि कोई कहे कि इनमें कोई दो समान हैं तो मान लो कि  $1^a = 1^b$  जहाँ  $a$  और  $b$  दोनों धन और  $n$  से अल्प हैं

डिमाइवर के सिद्धान्त से

$$1^a = \cos \frac{2at\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2at\pi}{n}$$

$$\text{और } 1^b = \cos \frac{2bt\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2bt\pi}{n}$$

$$\text{यदि ये दोनों तुल्य होंगे तो अवश्य } \frac{2at\pi}{n} \text{ और } \frac{2bt\pi}{n}$$

ये दोनों तुल्य होंगे अथवा दोनों का अन्तर चार समकोण का अपवर्त्य होगा।

इसलिये  $\frac{य^०}{न}$  यह एक अभिन्नाङ्क होगा। परन्तु त यह न से बड़ा है, इसलिये  $य^०$  द यह न से निःशेष होगा। परन्तु  $य$  और  $द$  ये न से छोटे कल्पना किए गए हैं, इसलिये न से इनके अन्तर का निःशेष होना असम्भव है। तब  $अ^०$ ,  $अ^०$  ये दोनों परस्पर तुल्य नहीं हो सकते। इसलिये ऊपर के सब मूल अवश्य परस्पर भिन्न हैं।

६६— $य^n - १ = ०$  और  $य^n + १ = ०$  इनके मूलों के जानने के लिये नीचे लिखी साधारण रीति को इस तरह दिखला सकते हो

अदि  $n = २^०$  तो  $य^n - १ = ०$  इसका एक मूल तो स्पष्ट है कि  $+१$  होगा और सब मूल बार बार  $-१$  के मूल लेने से जो  $१५$ वें प्रक्रम से असम्भव होंगे व्यक्त हो जायेंगे। यदि  $n = ५^०$ , जहाँ  $५ = २^०$  तो

$$य^n = य^{५^०} = (य^२)^५ = र^५, \text{ यदि } य^२ = र \text{ तो}$$

$य^n - १ = ०$  और  $य^n + १ = ०$  इन दोनों के मूल क्रम से  $र^५ - १ = ०$  और  $र^५ + १ = ०$  इनके मूल होंगे। इनमें यदि  $र$  के मान व्यक्त हो जायँ तो उनके बार बार ५ बार मूल लेने से  $य$  के मान भी व्यक्त हो जायँगे।

६७— $य^n - १ = ०$  इसमें मान लो कि  $n$  विषम  $२म + १$  के तुल्य है तो डिकार्टिस् की युक्ति से  $य^{२म+१} - १ = ०$  इसका ऋण संभव मूल न होगा और धन संभाव्य मूल  $n + १$  होगा। यदि  $+१$  से भिन्न कोई और धन संख्या का उत्थापन  $य$  में दो तो स्पष्ट है कि  $य^{२म+१}$  यह १ के समान न होगा। इसलिये इस समीकरण का  $+१$  के अतिरिक्त कोई सम्भव मूल न होगा।



$y^{2m+1} - 1 = 0$  इसमें  $y - 1$  का भाग देने से लब्धि

$$y^{2m} + y^{2m-1} + \dots + y^2 + y + 1 = 0$$

यह हरात्मक समीकरण का रूप है, इसलिये हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से इस पर से एक  $m$  घात का समीकरण बन जायगा।

६८— $y^n - 1 = 0$  इसमें यदि  $n = 2m$  तो इसके दो ही सम्भाव्य मूल  $+1$  और  $-1$  आवेंगे। इसलिये  $(y+1) \times (y-1) = y^2 - 1$  इसका भाग समीकरण में देने से एक नया हरात्मक समीकरण

$$y^{2m-2} + y^{2m-4} + \dots + y^2 + 1 = 0 \text{ ऐसा होगा।}$$

इस पर से हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से  $m-1$  घात का समीकरण बन जायगा।

$y^{2m} - 1 = 0$  इसे  $(y^m - 1)(y^m + 1) = 0$  ऐसे भी लिख सकते हैं। अब

$y^m - 1 = 0$  और  $y^m + 1 = 0$  इन पर से भी दिए हुए समीकरण के मूलों को जान सकते हो।

६९— $y^n + 1 = 0$  इसमें यदि  $n$  विषम  $2m+1$  के तुल्य हो तो  $y^{2m+1} + 1 = 0$  इसका एक ही सम्भाव्य मूल  $-1$  होगा। इसलिये  $y^{2m+1} + 1 = 0$  इसमें  $y + 1$  का भाग देने से एक हरात्मक समीकरण

$y^{2m} - y^{2m-1} + y^{2m-2} - \dots + y^2 - y + 1 = 0$  ऐसा होगा। इस पर से मूलों को पता लग सकता है।

यदि  $n$  विषम हो तो स्पष्ट है कि  $y$  के स्थान में  $-y$  का उत्थापन देने से  $y^n - 1 = 0$  ऐसा एक समीकरण बन जायगा

जिनके मूल पूर्व प्रक्रमों से वे ही विरुद्ध चिह्न के आ जायेंगे जो दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

१००— $y^n + 1 = 0$  यदि इसमें न सम २म के तुल्य हो तो  $y^{2m} + 1 = 0$  इसका एक भी संभाव्य मूल न होगा और  $y^{2m} + 1 = 0$  यह स्वयं हरात्मक समीकरण है, इसलिये इसमें  $y^m$  का भाग देकर  $y^m + \frac{1}{y^m} = 0$  यह पूर्वघात के आधे घात का एक समीकरण बन जायगा।

१०१—ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट होता है कि  $y^n - 1 = 0$  और  $y^n + 1 = 0$  इन दोनों पर से एक ऐसा हरात्मक समीकरण बनता है जिसके सब मूल दिए हुए समीकरण के सब असम्भव मूल के तुल्य हैं और जिसमें २१वें प्रक्रम से  $y + \frac{1}{y} = r_1$  ऐसा होगा, जिसमें दिखला सकते हो कि  $r_1$  का मान सर्वदा सम्भाव्य संख्या है।

$$\text{यदि } y = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n} = z_1 \text{ (१५वाँ प्र० देखो)}$$

$$\text{तो } y + \frac{1}{y} = r_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$+ \frac{\cos \frac{2\pi}{n} - \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}}{\left( \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n} \right)} \times$$

१

$$\left( \cos \frac{2\pi}{n} - \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{कोज्या } \frac{\sin \pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{\sin \pi}{n} + \text{कोज्या } \frac{\sin \pi}{n} \\
 &\quad - \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{\sin \pi}{n} \\
 &= \text{कोज्या } \frac{\sin \pi}{n},
 \end{aligned}$$

इस पर से  $r$ , का मान सम्भाव सिद्ध होता है।

१०२—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१)  $y^2 - 1 = 0$  इसके मूलों को बताओ।

यहाँ एक मूल  $+1$  यह सम्भाव्य है, इसलिये  $y - 1$  का भाग देने से

$$\frac{y^2 - 1}{y - 1} = y + 1 = 0।$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2} \text{ हुए।}$$

इसमें यदि  $\frac{-1 + \sqrt{-1}}{2} = \alpha_1$  और  $\frac{-1 - \sqrt{-1}}{2} = \alpha_2$

तो  $\alpha_1^2 = \alpha_2$ । इसलिये  $y^2 - 1 = 0$  इसके क्रम से मूल

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^3 (= 1)$  इनको १ का घन मूल कहते हैं। मूलों में  $\alpha_1$  को घा से प्रकट करते हैं।

$y$  के चिन्ह को बदल देने से  $y^2 + 1 = 0$  इस समीकरण के क्रम से मूल

$$-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1^3 (= -1)$$

(२)  $x^2 - 1 = 0$  । इसके मूलों को व्यक्त करो ।

दिए हुए समीकरण को

$(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 0$  ऐसा भी लिख सकते हैं ।

इस पर से  $y^2 + 1 = 0$  और  $y^2 - 1 = 0$  ये हुए ।

फिर (१) बड़ाहरण से,  $y^2 - 1 = 0$  इसके क्रम से मूल

$$y_1, y_2, 1, -1, -y_1, -y_2, -1$$

(३)  $y^2 + 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ ।

यहाँ हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = 0 = r_1^2 - 1 \text{ यदि } r_1 = y + \frac{1}{y} \text{ ।}$$

इस पर से  $r_1 = \pm \sqrt{2}$  और  $y^2 + 1 = \pm y\sqrt{2}$

इसलिये  $y$  के मान

$$\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, -\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

(४)  $y^2 - 1 = 0$  इसके मूलों को बताओ ।

$$y^2 - 1 = (y - 1)(y^2 + y^2 + y^2 + y + 1) = 0$$

हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$y^2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} + 1 = 0$$

$$\text{यदि } r_1 = y + \frac{1}{y}$$

$$\text{तो } r_1^2 + r_1 - 1 = 0 \therefore r_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$r_1$  के मान से मूलों का ज्ञान सुखम है ।

$y^2 - 1 = 0$  इसके मूलों के चिन्ह बदल देने से  $y^2 + 1 = 0$  इसके सब मूल होंगे ।

( ५ )  $y^3 - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मानों को बताओ ।

यहाँ  $y^3 - 1 = (y^3 - 1) (y^2 + y + 1) = 0$

$y^3 - 1 = 0$  इस पर से  $y$  के पूर्व सिद्ध तीन मान

१,  $\omega$ ,  $\omega^2$ ,

और  $y^2 + y + 1 = 0$  इस हरात्मक समीकरण से

$$y^2 + \frac{1}{y} + 1 = 0$$

इस पर से  $r_1^3 - 1, r_1 + 1 = 0$  यह घन समीकरण बना जब  $r_1 = y + \frac{1}{y}$  इसमें यदि  $r_1$  के मान व्यक्त हों तो  $y$  के बाकी व मान भी व्यक्त हो जायँगे । ( ऐसे घन समीकरण में  $y$  के मान कैसे व्यक्त होते हैं इसकी विधि आगे लिखी जायगी )

अथवा  $y^3 + 1, y + 1 = 0$  इस पर से वर्ग समीकरण की विधि से  $y^2 - \omega = 0$ ,  $y^2 - \omega^2 = 0$  ऐसे दो समीकरण बनेंगे ।

फिर  $y^2 - 1 = 0$ ,  $y^2 - \omega = 0$ ,  $y^2 - \omega^2 = 0$  ऐसे तीन समीकरणों से जो  $y$  के नव मान आते हैं वे क्रम से ( ८६वाँ प्रकरण देखो )

१,  $\omega$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^3$ ,  $\omega^4$ ,  $\omega^5$ ,  $\omega^6$ ,  $\omega^7$ ,  $\omega^8$  ये हैं ।

इनमें  $\omega^3$  इसके  $y$  का एक विशिष्ट मान मानने से दिये हुए समीकरण में  $y$  के रूप से नव मान

१, घा<sup>१</sup>, घा<sup>२</sup>, वा, घा<sup>३</sup>, घा<sup>४</sup>, घा<sup>२</sup>, घा<sup>४</sup>, घा<sup>३</sup> ये सृहज में आ जाते हैं ।

इनमें  $y^2 - 1 = 0$  इसके मूल १, घा, घा<sup>२</sup> को निकाल देने से

$(y^2 - घा)(y^2 - घा^2) = y^4 + y^2 + 1 = 0$  इसमें के लुबो मान  $y$  के हैं । इस प्रकार जहाँ पर जैसे लाघव हो उत्तर निकालना चाहिए ।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१ ।  $y^2 - 1 = 0$  इसके मूल बताओ ।

२ ।  $y^2 - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ ।

३ ।  $y^2 + 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ ।

४ । १०२ प्रक्रम के ( १ ) उदाहरण से सिद्ध करो कि  $१ + घा + घा^२ = ०$  ।

५ । सिद्ध करो कि ( घाम + घा<sup>२</sup>न ) ( घा<sup>२</sup>म + घान ) यह अकरणी गत होगा ।

$$\text{उ० } म^२ - मन + न^२ ।$$

६ । सिद्ध करो कि ( अ + घाक + घा<sup>२</sup>ग ) ( अ + घा<sup>२</sup>क + घाग )  
 $= अ^२ + क^२ + ग^२ - अक - अग - कग ।$

७ । सिद्ध करो कि

$$(अ + क + ग) (अ + घाक + घा<sup>२</sup>ग) (अ + घा<sup>२</sup>क + घाग) \\ = अ^३ + क^३ + ग^३ - ३अकग ।$$

८ । एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूल

$म + न, घाम + घा<sup>२</sup>न, घा<sup>२</sup>म + घान$  हों ।

$$\text{उ० } y^३ - १ मनय - (म^३ + न^३) = ०$$

६।  $(य + १)^० - (य^० + १)$  इसके मुख्य गुणक रूप खण्डों को निकालो।

$$उ० ७य (य + १) (य^२ + य + १)^२$$

१०। एक ऐसा घन समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$अ_१ + अ_१^६, अ_२ + अ_१^५, अ_३ + अ_१^४$  ये हों जहाँ  $अ_१, य^० - १ = ०$  इसमें य का एक असम्भव मान है।

$$उ० य^३ + य^२ - २य - १ = ०।$$

११।  $य^५ - १ = ०$  इसका एक विशिष्ट मूल  $अ_१$  हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से  $अ_१ + २अ_१^४, अ_२ + २अ_१^३, अ_३ + २अ_१^२, अ_४ + २अ_१$  ये हों।

$$उ० य^५ + २य^४ - य^२ - ३य + ११ = ०$$

१२।  $य^{१२} - १ = ०$  इसका एक विशिष्ट मूल  $अ_१$  हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से

$$अ_१ + अ_१^९ + अ_१^८ + अ_१^७, अ_२ + अ_१^६ + अ_१^५ + अ_१^४,$$

$$अ_३ + अ_१^३ + अ_१^२ + अ_१ ये हों। उ० य^{१२} + य^२ - ४य + १ = ०$$

१३।  $४य^४ - ८५य^३ + ३५७य^२ - ३४०य + ६४ = ०$  इन पर से एक हरात्मक समीकरण बना कर तब इसके मूलों को बताओ।

मान लो कि  $र = \frac{य}{२} \therefore य = २र$ । इसका उत्थापन समीकरण में देने से

$६४र^४ - ६८०र^३ + १४२८र^२ - ६८०र + ६४ = ०$  अब यह हरात्मक समीकरण घन जायगा। इस पर से र का मान व्यक्त होने से समीकरण के मूल भी व्यक्त हो जायँगे।

१४।  $y^n - 1 = 0$  इसमें यदि  $n$  दृढ़ हो और इसका एक असम्भव मूल  $\alpha$  हो तो सिद्ध करो

$$(1 - \alpha) (1 - \alpha^2) (1 - \alpha^3) \dots (1 - \alpha^{n-1}) = n$$

१५।  $y^{12} - 1 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

१६।  $y^{12} - 1 = 0$  इसके सब विशिष्ट मूल धे ही हैं जो  $y^6 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$  इसके मूल हैं, यह सिद्ध करो।

१७।  $y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0$  यह एक हरात्मक समीकरण है। इस पर से २१वें प्रक्रम की युक्ति से जो

$$r^4 - r^3 - 4r^2 + 4r + 1 = 0$$

पैसा समीकरण बनेगा इसमें  $r$  के मान

$$\text{२कोज्या } \frac{2\pi}{12}, \text{ २कोज्या } \frac{4\pi}{12}, \text{ २कोज्या } \frac{6\pi}{12}, \text{ २कोज्या } \frac{8\pi}{12}$$

ये ही होंगे यह सिद्ध करो।

## १०-परिच्छिन्न मूल

१०३—जिस मूल को किसी अभिशाङ्क वा भिन्नाङ्क से प्रकाश कर सकें उसको परिच्छिन्न मूल कहते हैं। जैसे  $4, 9, \frac{1}{4}$  इत्यादि।

बीजगणित से सिद्ध है कि किसी करणी का मान न अभिघांक, न भिन्नाङ्क होता है इसलिये करणीगत राशि का मूल परिच्छिन्न मूल नहीं है। जैसे  $\sqrt{2}$  इस करणी का मान न अभिघात है और न भिन्न है, इसलिये  $\sqrt{2}$  इसका मूल संभाव्य तो है परन्तु परिच्छिन्न नहीं है।



करणी का मान न भिन्नाङ्क, न अभिन्नाङ्क होता है इसकी उपपत्ति को कमलाकर ने अपने बनाए हुए तत्त्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में बहुत अच्छी तरह से लिखा है। भारतवर्ष में जिस समय (शक १५८० वा सन् १६५८ ई०) इसने अपने इस ग्रन्थ को लिखकर पूरा किया था उस समय यूरोप में न्यूटन की उमर बारह वर्ष की थी।

१०४— $\text{फ (य)} = ०$  इसके आदि पद का गुणक एक हो और अन्य पदों के गुणक यदि परिच्छिन्न अभिन्न हों तो समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्न नहीं हो सकता।

कल्पना करो कि समीकरण

$\text{य}^n + \text{प}_1 \text{य}^{n-1} + \text{प}_2 \text{य}^{n-2} + \dots + \text{प}_{n-1} \text{य} + \text{प}_n = ०$  ऐसा है और यदि सम्भव हो तो कल्पना करो कि इस समीकरण का एक परिच्छिन्न भिन्न मूल  $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$  है जिसमें अ और क परस्पर हठ हैं। इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में य के स्थान में देने से और दोनों पक्षों को  $\text{क}^{n-1}$  से गुण देने से

$$\frac{\text{अ}^n}{\text{क}} + \text{प}_1 \frac{\text{अ}^{n-1}}{\text{क}} + \text{प}_2 \frac{\text{अ}^{n-2}}{\text{क}} + \dots$$

$$+ \text{प}_{n-2} \frac{\text{अ}^2 \text{क}^{n-4}}{\text{क}} + \text{प}_{n-1} \frac{\text{अ} \text{क}^{n-2}}{\text{क}} + \text{प}_n \frac{\text{क}^n}{\text{क}} = ०$$

$$\therefore - \frac{\text{अ}^n}{\text{क}} = \text{प}_1 \frac{\text{अ}^{n-1}}{\text{क}} + \text{प}_2 \frac{\text{अ}^{n-2}}{\text{क}} + \dots$$

$$+ \text{प}_{n-2} \frac{\text{अ}^2 \text{क}^{n-4}}{\text{क}} + \text{प}_{n-1} \frac{\text{अ} \text{क}^{n-2}}{\text{क}} + \text{प}_n \frac{\text{क}^n}{\text{क}}$$

परन्तु यह असम्भव सिद्ध होता है क्योंकि अ और क के परस्पर दृढ़ होने से  $\frac{अ}{क}$  यह एक भिन्नाङ्क ही होगा और दहिना पक्ष अभिन्नाङ्क सिद्ध है, इसलिये कोई दृढ़ भिन्न किसी अभिन्नाङ्क के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये ऊपर के समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्नाङ्क नहीं हो सकता।

अब ऊपर के समीकरण में इतना ही विचार करना चाहिए कि उसका कोई मूल अभिन्न परिच्छिन्न है वा नहीं। इसके लिये जो आगे रीति लिखी जायगी उसे भाजक रीति अथवा न्यूटन की रीति कहते हैं।

१०५—कल्पना करो कि

$$फ़(y) = य^n + प_1 य^{n-1} + प_2 य^{n-2} + \dots + प_{n-1} य + प_n = 0$$

इसका एक अभिन्न परिच्छिन्न मूल अ है तो इसका उत्थापन य के स्थान में देने से

$$अ^n + प_1 अ^{n-1} + \dots + प_{n-1} अ + प_n = 0$$

इसमें अ का भाग देकर पदों को उलट कर रखने से

$$\frac{प_n}{अ} + प_{n-1} + प_{n-2} अ + \dots + प_1 अ^{n-2} + अ^{n-1} = 0$$

इसलिये  $\frac{प_n}{अ}$  यह अवश्य अभिन्न होगा। मान लो कि यह  $व_1$  के तुल्य है तो ऊपर के समीकरण में फिर अ का भाग देने से

$$\frac{व_1 + प_{n-1}}{अ} + प_{n-2} + \dots + प_2 अ^{n-3} + प_1 अ^{n-2} + अ^{n-1} = 0$$

इसलिये  $\frac{v_1 + p_{n-1}}{a}$  यह अभिन्न होगा, मान लो कि यह  $v_1$  के तुल्य है तो फिर ऊपर के समीकरण में  $a$  का भाग देने से

$$\frac{v_1 + p_{n-1}}{a} + p_{n-1} + \dots + p_2 a^{n-2} + p_1 a^{n-1} + a^{n-1} = 0$$

$\frac{v_1 + p_{n-1}}{a}$  यह अभिन्न होगा। इसे ऊपर की युक्ति से

अभिन्न  $v_1$  कहें और फिर  $a$  का भाग दें तो  $\frac{v_1 + p_{n-1}}{a}$  यह अभिन्न ठडरेगा। यों तन्त तक क्रिया करने से अन्त में

$$\frac{v_{n-1} + p_1}{a} + 1 = 0 \text{ ऐसा होगा। इस पर से नीचे लिखी}$$

हुई क्रिया उत्पन्न होती है।

यदि  $f(x) = 0$  इसका एक मूल  $a$  होगा तो समीकरण का अन्त पद  $a$  से अवश्य निःशेष होगा। लब्धि में  $a$  के गुणकाङ्क के जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी  $a$  से निःशेष होगी। इस लब्धि में  $a^2$  का गुणकाङ्क जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी  $a$  से निःशेष होगी। यही क्रिया  $n-1$  बार तक करने से जो निःशेष लब्धि आवे उसमें  $a^{n-1}$  का गुणकाङ्क जोड़ कर  $a$  का भाग दो, यदि लब्धि  $-1$  के तुल्य आवे तो निश्चय समझना चाहिये कि  $f(x) = 0$  इस समीकरण का एक मूल  $a$  अवश्य है। यदि ऊपर की स्थिति का कहीं पर अभिचार हो जाय तो समझना कि अभिन्न  $a$  समीकरण का मूल नहीं है।

१०६—ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि यदि अव्यक्त का मान परिच्छिन्न अ है तो समीकरण का अन्त पद उससे अवश्य निःशेष होता है। इसलिये दिए हुए किसी पूरे समीकरण के अभिन्न परिच्छिन्न मूल जानने के लिये देख लेना चाहिए कि किस किस अभिन्नाङ्क से अन्त पद निःशेष होता है। जिनसे निःशेष हों, स्पष्ट है कि उन्हीं में से कोई न कोई संभव रहते समीकरण का एक मूल होगा। इसलिये अन्त पद को निःशेष करने वाले उन हारों में से एक एक को लेकर १०५वें प्रक्रम की क्रिया करो। जिन जिन हारों में क्रिया, आदि से अन्त तक, पूरी पूरी उतर जाय उन उन हारों को निःशेष्य दिए हुए समीकरण के मूल कहो। दिया हुआ समीकरण यदि पूरा न हो तो ३ प्रक्रम से उसे पूरा कर तब क्रिया करना आरम्भ करो।

परिश्रम बचाने के लिए दिए हुए समीकरण के मूलों की धन और ऋण सीमाओं को ६ अध्याय से जान कर अन्त पद को निःशेष करने वाले हारों में जो जो उन सीमाओं के बाहर पड़े हों उन्हें छोड़ कर जो भीतर हों उन्हीं से १०६ प्र० की क्रिया करो, क्योंकि जो सीमाओं से बाहर हैं वे सीमासाधन की युक्ति से समीकरण के मूल नहीं हो सकते, इसलिये उनको लेकर क्रिया करने से व्यर्थ समय को नष्ट करना है। और अन्त पद के जो +१ और -१ भाग हार हैं उन पर से भी क्रिया करना व्यर्थ गौरव दोष लक्ष्य है क्योंकि +१ और -१ इनका उत्पादन य के स्थान में देने से बड़े लाघव से जान सकते हो कि दिए हुए समीकरण में ये दोनों य के मान हैं वा नहीं।

उदाहरण—( १ )  $y^2 - १६y + ३० = ०$  इसका परिच्छिन्न मूल निकालो ।

यहाँ अन्त पद ३० को निःशेष करने वाले भाग हार

२, ३, ५, ६, १५, ३०, -२, -३, -५, -६, -१५, -३०, -३० ।

धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा, समीकरण को  $y (y^2 - १६) + ३० = ०$  ऐसा लिखने से ५ हुई और  $y$  के स्थान में  $-y$  का उत्थापन देने से ऋण मूलों की प्रधान सीमा,  $y^2 - १६y + ३० = ०$  इसे दो से गुण कर  $y^2$  को दोनों पदों में मिलाने से

$y (y^2 - ३८) + y^2 - ६० = ०$  इस पर से  $-७$  आती है । इसलिये  $-७$  और ५ के भीतर हारों को चुनने से क्रियायोगी संख्यायें

$-६, -५, -३, -२, २, ३, ५$  ये हुई ।

पूरे समीकरण के पद गुणकों को उलट कर एक पंक्ति में रखने से तथा पहले  $-६$  से क्रिया करने में

३०	-१६	०	१
	- ५	+ ४	
	- २४	+ ४	

+ ४ यह अब  $-६$  से निःशेष नहीं होता, क्रिया रुक गई, इसलिये  $-६$  यह समीकरण का मूल नहीं है ।

$-५$  से क्रिया करने में

३०	-१६	०	१
	- ६	+ ५	- १

यहां पूरी क्रिया उतर गई इसलिये -५ यह एक मूल हुआ ।

-३ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{r} ३० \quad -१६ \\ -१० \\ \hline -२६ \end{array}$$

-२६ यह -३ से निःशेष नहीं होता इसलिये क्रिया के  
रकने से -३ यह एक मूल नहीं हो सकता ।

-२ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{r} ३० \quad -१६ \quad ० \quad १ \\ -१५ \quad -१७ \\ \hline -३४ \quad -१७ \end{array}$$

-१७ यह -२ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया  
रकने से -२ यह मूल नहीं है ।

+२ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{r} ३० \quad -१६ \quad ० \quad १ \\ +१५ \quad -१ \quad -१ \\ \hline -४ \quad -२ \quad ० \end{array}$$

यहां पूरी क्रिया उतर गई इसलिये ३ यह एक मूल हुआ

+३ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{r} ३० \quad -१६ \quad ० \quad १ \\ +१० \quad -३ \quad -१ \\ \hline -६ \quad -३ \quad ० \end{array}$$

यहां पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह एक मूल हुआ ।

+५ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{rcccc} ३० & -१६ & ० & १ \\ & + ६ & & \\ \hline & -१३ & & \end{array}$$

यहां -१३ यह ५ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया के रुक जाने से ५ यह मूल नहीं हुआ । इसलिये  $५^३ - १६५ + ३० = ०$  इसके तीनों मूल क्रम से -५, २, ३ हुए ।

१०७—फ (य) = ० इसका यदि एक मूल अ हो और यदि य के स्थान में र+म का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि फ (र+म) = ० इसमें र का एक मान अ-म होगा जहां अ, क दोनों अभिन्न हैं ।

अ और म के अभिन्न होने से र का एक मान अ-म यह अभिन्न होगा और १०६वें प्रक्रम की युक्ति से फ (र+म) में जो र से स्वतन्त्र पद फ (म) होगा उसे निःशेष भी करेगा । इसलिये यदि फ (म) को अ-म निःशेष न करे तो र का मान अ-म नहीं होगा तब दिए हुए समीकरण में य का मान अ भी नहीं होगा । इसलिये र का एक मान अ-म है ।

परीक्षा करने में सुभीता पड़े और फ (म) के मान जानने में भी थोड़ा परिश्रम हो इसलिये म को +१ वा -१ मान लेते हैं । यदि फ (१) यह अ-१ से और फ (-१) यह अ+१ से निःशेष न हो तो कहेंगे कि फ (य) = ० इसका एक मूल अ

नहीं है। अब इस पर से भी अन्त पद को निःशेष करनेवाले हारों में से कौन क्रियोपयोगी नहीं हैं उनका पता लगा सकते हो

जैसे १०६वें प्रक्रम के उदाहरण  $y^3 - १६y + ३० = ०$  इसमें पहले जो  $-६, -५, -१, -२, २, ३, ५$  ये संख्यायें लेकर क्रिया करते रहे उनमें

$f(१) = १२$  इसमें  $-६ - १ = -७$  का पूरा पूरा भाग नहीं लगता इसलिये  $-६$  यह समीकरण का मूल नहीं हो सकता।

इसी प्रकार  $f(-१) = ४$  इसमें भी  $-६ + १ = -५$  का भाग नहीं जाता इसलिये इससे भी सिद्ध होता है कि  $-६$  को समीकरण का मूल न ग्रहण करना चाहिए।

इस प्रकार  $f(y) = y^3 - ३y^2 - ८y - १० = ०$  इस उदाहरण में धनमूलों की सीमा ११,  $y$  के स्थान में  $-२$  का उत्थापन देने से और उचित रीति से समीकरण बनाने से

$$x^3 + ३x(२ - \frac{३}{२}) + १० = ०$$

इसमें स्पष्ट है कि  $x$  के धन मानों की सीमा ३ होगी, इसलिये  $y$  के ऋण मानों की सीमा  $-३$  हुई। अब  $-३$  और  $११$  के बीच में अन्त पद १० को निःशेष करनेवाले  $+१$  और  $-१$  को छोड़ कर और हार

$१०, ५, २, -२$  ये हैं।

इनमें  $f(१) = -२०$  इसको  $१० - १ = ९$  यह निःशेष नहीं करता इसलिये समीकरण का एक मूल १० को न ग्रहण करना चाहिए।



इसी प्रकार  $y^2 - 20y^2 + 168y - 400 = 0$  इस पूरे समीकरण में डेकार्टिस् की युक्ति से सर के न होने से  $y$  का कोई ऋणमान नहीं है तब स्पष्ट है कि दूसरे पद के गुणक को विरुद्ध चिन्ह का बना कर ग्रहण करने से  $y$  के सब धन मानों का योग २० होगा इसलिये  $y$  का कोई एक धन मान २० से अधिक नहीं होगा तब  $y$  के धन मानों की प्रधान सीमा २० हुई

( इस उदाहरण में  $y$  के धन मानों की सीमा जानने के लिये टाड्डहण्टर साहब ने जो समीकरण का रूपान्तर कर ग्रन्थ को बढ़ाया है वह व्यर्थ है। उनके ग्रन्थ का ११६वाँ प्रक्रम देखो ) और  $y$  का ऋण मान कोई है ही नहीं।

इसलिये अन्त पद ४०० को निःशेष करनेवाले २० से अलग हार २, ४, ५, ८, १० और १६ ये हुए।

और  $f(1) = -२२५$  इसमें  $५-१=४$ ,  $८-१=७$ ,  $१०-१=९$  इनका निःशेष भाग न लगने से ५, ८ और १० इन्हें ऊपर लिखे हुए समीकरण के मूलों न ग्रहण करना चाहिए। केवल २, ४ और १६ से परीक्षा करने के लिये १००५वें प्रक्रम की क्रिया करो।

२ से क्रिया करने में

-४००	१६४	-२०	१
	-२००	-१८	-१६
<hr/>		<hr/>	
- २६	- ३८	- १८	

यहां अन्त में शून्य नहीं हुआ इसलिये २ यह मूल नहीं है।

४ से क्रिया करने में

$$\begin{array}{r}
 -४०० \quad १६४ \quad -२० \quad १ \\
 -१०० \quad +१६ \quad -१ \\
 \hline
 + ६४ \quad - ४ \quad ०
 \end{array}$$

यहां किया पूरी हो जाने से ४ यह समीकरण का एक मूल हुआ  
१६ से किया करने में

$$\begin{array}{r}
 -४०० \quad १६४ \quad -२० \quad १ \\
 - २४ \\
 \hline
 १३६
 \end{array}$$

यहां १३६ यह १६ से निःशेष नहीं होता । इसलिये १६ यह  
समीकरण का मूल नहीं है । इस प्रकार से दिए हुए समीकरण  
का परिच्छिन्न अभिन्न मूल एक ही ४ है ।

१०८—फ (य) = ० इसमें य के सब से बड़े/घात के  
गुणकाङ्क से अपवर्त्तन देने से समीकरण के छोटे रूप में पदों  
के गुणक अभिन्न न हों तो ३६वें प्रक्रम से एक नया समीकरण  
जिसमें सब पदों से गुणक अभिन्न हों बना कर तब १०५वें  
प्रक्रम की क्रिया करना आरंभ करो । फिर नये समीकरण के  
मूल से दिए हुए समीकरण के मूल निकाल सकते हो । जैसे

उदाहरण—( १ ) फ (य) =  $y^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{4}y + \frac{1}{8} = 0$   
इसमें यदि  $y = \frac{1}{2}$  तो

$$\text{फ (य)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$$

∴ से गुण देने से अभिन्न समीकरण

$$२^३ + २^२ - १७२ + १५ = ० ।$$

इसका जगन्तर करने से धन मूलों की सीमा ५ हुई :

२ के स्थान में  $-२$  का उत्थापन देने से और समीकरण को ३ से गुण रूपान्तर करने से ऋण मूलों की सीमा  $-८$  हुई। इन दोनों के भीतर अन्तःपद को निःशेष करनेवाली संख्याएँ १, ३, ५,  $-१$ ,  $-३$ ,  $-५$  ये हुई।

और  $f(१) = ०$ । इसलिये २ का एक मान १ है।

$f(-१) = १२$ । इसलिये २ का एक मान  $-१$  यह नहीं है।

३ से क्रिया करने में

१५	$-१७$	१	१
	$+ ५$	$-४$	$-१$
<hr/>			
	$-१२$	$-३$	०

पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह २ का एक मान हुआ।

५ से क्रिया करने में

१५	$-१७$	१	१
	$+ ३$		
<hr/>			
	$-१४$		

५ से  $-१४$  इसके निःशेष न होने से ५ यह २ का मान नहीं है।

$-३$  से क्रिया करने में

१५	$-१७$	१	१
	$- ५$		
<hr/>			
	$-२२$		

$-३$  से  $-२२$  इसके निःशेष न होने से ३ का मान  $-३$  नहीं है।

—५ से क्रिया करने में

१५	—१०	१	१
	— ३	+४	—१
<hr/>			
	—२०	+५	०

क्रिया के पूरी होने से —५ यह र का एक मान हुआ ।

इसलिये र के मान १, ३, —५ ये हुए और  $y = \frac{1}{3}$  इसलिये  
य के मान  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$  ये सिद्ध हुए ।

इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि जब  $f(y) = 0$   
इसमें य के सब से बड़े घात का गुणक रूपातिरिक्त कोई संख्या  
हो और सब पद के गुणक अभिन्न भी हों तो भी यह नहीं कहा  
जा सकता कि य का मान परिच्छिन्न अभिन्नाङ्क होगा ।

१०६—५६वें प्रक्रम में  $f(y)$  और  $f'(y)$  के महत्तमा  
पवर्त्तन परम्परा से दिखला आए हैं कि  $f(y) = 0$  इसके  
कितने मूल दो बार, कितने तीन बार इत्यादि आते हैं । यदि  
 $f(y)$  में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के होंगे तो स्पष्ट  
है कि ५६वें प्रक्रम में जो  $y_1, y_2$  इत्यादि के मान आवेंगे  
उनके पद के गुणक भी सब परिच्छिन्न मूल के होंगे । इसलिये  
यदि  $f(y) = 0$  इसमें य का एक ही कोई मान त बार होगा  
तो वह अव्यक्त मान  $y_{\text{त}} = 0$  इससे जो आवेगा वह परिच्छिन्न  
मूल का होगा क्योंकि एक ही अव्यक्त मान जो त बार आया  
है उसका एक ही मान  $y_{\text{त}} = 0$  इससे निकलेगा । इसलिये  
 $y_{\text{त}}$  यह य के एक घात का खण्ड होगा अर्थात्  $y_{\text{त}} = \text{अपे} - \text{क}$  इस  
रूप का होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से अ और क दोनो परि-

चिह्न मूल के होंगे। इसलिये त बार आए हुए अव्यक्त मान की संख्या यात = ० इससे परिच्छिन्न मूल ही की होगी।

इस पर से नीचे लिखे हुए तीन विशेष उत्पन्न होते हैं

**विशेष—(१)** यदि किसी घन समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आवे तो उस घन समीकरण के समान मूल न आवेंगे। क्योंकि यदि समान मूल होंगे तो एक मूल तीन बार आवेगा वा एक मूल दो बार और दूसरा एक बार आवेगा। दोनों स्थितिओं में ऊपर की युक्ति से एक मूल परिच्छिन्न मूल का होगा जिसका होना कल्पना से विरुद्ध है।

**(२)** यदि किसी चतुर्घात समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आता हो तो ऐसा नहीं हो सकता कि उस चतुर्घात समीकरण का एक मूल चार बार या तीन बार आवे, क्योंकि ऐसा होने से ऊपर की युक्ति से वह मूल परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। इसलिये यदि इस चतुर्घात समीकरण के मूल सचान होंगे तो दो बार एक मूल और दो बार दूसरा मूल आवेगा। ऐसी स्थिति में  $\Phi(y) = 0$  इसमें  $\Phi(y)$  यह एक पूरा पूरा वर्ग होगा।

**(३)** यदि किसी पञ्चघात समीकरण में सब पदों के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न हो तो उस पञ्चघात समीकरण का कोई मूल समान न होगा। क्योंकि

यदि एक मूल चार बार आवे और दूसरा एक बार तो जो चार बार आवेगा वह ऊपर की युक्ति से परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। यदि एक मूल दो बार, दूसरा दो बार और तीसरा एक बार आवे तो ऊपर की युक्ति से तीसरा परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल दो बार और दूसरा, तीसरा और चौथा एक एक बार आवें तो जो दो बार आया है वह परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल तीन बार और दूसरा दो बार आवें तो दोनों परिच्छिन्न ठहरेंगे। यदि एक मूल तीन बार और दूसरा और तीसरा एक एक बार आवें तो जो तीन बार आवेगा वह परिच्छिन्न ठहरेगा। इस तरह से हर एक स्थिति में एक मूल परिच्छिन्न ठहरता है जो कल्पना से विरुद्ध है।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१। परिच्छिन्न मूल से क्या समझते हो।

२।  $y^4 - 2y^3 - 13y^2 + 22y - 24 = 0$  इसमें  $y$  के परिच्छिन्न मान बताओ।  
उ० १, २, ३, - ४।

३।  $3y^4 - 23y^3 + 34y^2 + 31y - 30 = 0$  इसके परिच्छिन्न मूल बताओ।  
उ० १, ३, ५।

४।  $y^4 + y^3 - 2y^2 + 4y - 24 = 0$  इसमें  $y$  के सब मान बताओ।  
उ० - ३, २,  $\pm 2\sqrt{-1}$

५।  $y^4 - 2y^3 - 15y^2 + 62y - 60 = 0$  इसके सब मूल बताओ।  
उ० २, ३, ३, - ५।

६।  $y^4 - 23y^3 + 160y^2 + 31y^2 - 32y + 60 = 0$  इसमें  $y$  के परिच्छिन्न मान बताओ।  
उ० ५, ८, ११।

७।  $y^2 - २६y^4 - ३१y^4 + ३१y^2 - ३२y + ६० = ०$  इसके परिच्छिन्न मूल बताओ। उ० १, -२, ३०।

८।  $f(y) = ०$  इसमें अन्तिम पद जो  $y$  से स्वतन्त्र है यदि विषम संख्या हो और  $f(१)$  यह भी विषम संख्या हो तो  $f(y) = ०$  इसमें  $y$  का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा।

९।  $f(y) = ०$  इसमें यदि  $f(०)$  और  $f(-१)$  दोनों विषम संख्या हों तो  $f(y) = ०$  इसमें  $y$  का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा।

## ११-समीकरण के मूलों का आनयन

११०—जिस रीति से वर्गादि समीकरण के मूल निकाले जाते हैं उस रीति को मूलानयन कहते हैं।

बीजगणित से किसी वर्गसमीकरण को  $y^2 + पा y + बा = ०$  इस प्रकार का बना सकते हो जिसका पदान्तर से  $y^2 + पा y = -बा$  ऐसा रूप होगा। दोनों पक्षों को  $४$  से गुण कर  $पा^2$  जोड़ कर वर्ग मूल लेने से

$$२y + पा = \pm \sqrt{पा^2 - ४बा} \quad \therefore y = \frac{-पा \pm \sqrt{पा^2 - ४बा}}{२}$$

इस पर से  $y$  के दो मान सिद्ध होते हैं जिनसे मुख्य मुख्य रूप खण्डों में दिए हुए समीकरण का

$$\left\{ y - \left( \frac{-पा + \sqrt{पा^2 - ४बा}}{२} \right) \right\} \left\{ y - \left( \frac{-पा - \sqrt{पा^2 - ४बा}}{२} \right) \right\} = ०$$

ऐसा रूप होगा। बीजगणित की साधारण रीति से यह क्रिया प्रसिद्ध है इसलिये इस पर कुछ बढ़ा कर लिखना केवल

ग्रन्थ को व्यर्थ बढ़ाना है। इसलिये आगे घन समीकरण पर विचार करते हैं।

१११—किसी पूरे समीकरण पर  $\times ३६$ वें प्रक्रम की युक्ति से उसी घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसमें दूसरा पद उड़ जायगा। इसलिये घनसमीकरण पर से एक ऐसा समीकरण बन सकता है जिसमें अव्यक्त का घन, अव्यक्त का एक घात और व्यक्ताङ्क रहे पर अव्यक्त का वर्ग न रहे। इसलिये जो घनसमीकरण

$y^3 + py + t = 0$  ऐसा है उसी में  $y$  के मानानयन का विचार करते हैं

११२—कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण

$y^3 + py + t = 0$  ऐसा है।

इसमें कल्पना करो कि  $y = r + l$  तो समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$(r+l)^3 + p(r+l) + t = 0$$

$$\text{वा } r^3 + l^3 + (3rl + p)(r+l) + t = 0 \dots \dots (१)$$

इसमें मान लो कि  $r, l$  ऐसे हैं जिनके वश से  $3rl + p = 0$  होता है तो

$$l = -\frac{p}{3r} \dots \dots \dots (२)$$

इसका उत्थापन (१) में देने से

$$r^3 + \left(-\frac{p}{3r}\right)^3 + t = 0$$

$$\text{वा } r^3 + t - \frac{p^3}{27r} = 0$$

$$\text{इस पर से } r^3 = -\frac{p^3}{27} \pm \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} + \frac{p^3}{27}\right)}$$

$$\text{और } l^3 = -t - r^3 = -\frac{p^3}{27} \pm \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} + \frac{p^3}{27}\right)}$$



यहां र और ल के परस्पर बदल देने से कोई भेद नहीं पड़ेगा इसलिये चिन्ह युगल के स्थान में र<sup>१</sup> में धन और ल<sup>१</sup> में ऋण लेने से

$$y = \left\{ -\frac{r}{4} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{16} + \frac{p^2}{256}\right)} \right\}^{\frac{1}{4}} \\ + \left\{ -\frac{r}{4} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{16} + \frac{p^2}{256}\right)} \right\}^{\frac{1}{4}} \dots \dots \dots (१)$$

१०२ प्रक्रम के (१) उदाहरण से १ का घन मूल १, या, या<sup>२</sup> है इसलिये यदि  $-\frac{r}{4} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{16} + \frac{p^2}{256}\right)}$  इसका एक घन मूल व्यक्त गणित से म संख्या तुल्य आवे तो ८४वें प्रक्रम से इनके तीनों घन मूल म, मघा, मघा<sup>२</sup> होंगे। इसी युक्ति से व्यक्तगणित से यदि  $-\frac{r}{4} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{16} + \frac{p^2}{256}\right)}$  इसका एक घन मूल न संख्या तुल्य हो तो तीनों घन मूल नघा, नघा<sup>२</sup> ये हैं।

इस प्रकार से य के मान जो दो संख्याओं के घन मूल के योग तुल्य आता है उसके प्रत्येक घन मूलों के तीन तीन भेद होने से नव मान आवेंगे परान्तु घनसमीकरण में य के तीन मानों से अधिक नहीं हो सकते। इसलिये य के नव मानों में से छ मान अशुद्ध होंगे और तीन मान शुद्ध। इनकी परीक्षा के लिये (२) से जो र.ल =  $-\frac{p}{4}$  यह सिद्ध होता है उससे क्रिया करनी चाहिए।

कल्पना करो कि र = म, ल = न। म और न ऐसे हैं किनसे म.न =  $-\frac{p}{4}$  यह टीका हो जाता है तो म और न को आहत मान कहेंगे। और यदि र = मघा, ल = नघा<sup>२</sup> तो

$r \cdot l = m \cdot n \cdot \text{घा}^2 = mn$  । इसलिये  $m$  घा और  $n \cdot \text{घा}^2$  ये दो भी ग्राह्य होंगे ।

इसी प्रकार यदि  $r = m \cdot \text{घा}^2$  और  $l = n \cdot \text{घा}$  तो भी  $r \cdot l = m \cdot n \cdot \text{घा}^2 = mn$  ।

इसलिये ये दोनों मान भी ग्राह्य हैं । इन पर से  $y$  के तीन मान क्रम से

$m + n$ ,  $\text{घा} \cdot m + \text{घा}^2 n$ ,  $\text{घा}^2 m + \text{घा} n$ , ये होंगे ।

$r$  और  $l$  के और मान लेने से  $r \cdot l = -\frac{54}{4}$  ऐसा होगा,  $-\frac{54}{4}$  ऐसा नहीं होगा इसलिये उन मानों को न ग्रहण करना चाहिए । जैसे

उदाहरण—( १ )  $y^2 - ५y - १२ = ०$

इसमें  $p = -५$  और  $t = -१२$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये } & \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{20}\right)} \right\}^{\frac{2}{3}} \\ &= \left\{ 5 + \sqrt{\left(16 - \frac{125}{20}\right)} \right\}^{\frac{2}{3}} \\ &= \left( 5 + \sqrt{\frac{247}{20}} \right)^{\frac{2}{3}} = 2.3 \dots \dots \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{20}\right)} \right\}^{\frac{2}{3}} \\ &= \left( 5 - \sqrt{\frac{247}{20}} \right)^{\frac{2}{3}} = .0 \dots \dots \end{aligned}$$

इसलिये  $y = 2.3 + .0 = 2.3$

इसका उत्थापन देने से समीकरण ठीक हो जाता है; इसलिये  $y$  का मान यह ठीक ही आया। इसलिये  $y-1$  इसका समीकरण में भाग दे देने से

$$y^2 + 3y + 4 = 0 \text{ यह हुआ।}$$

इस परसे  $y$  के दो मान  $\frac{-3 \pm \sqrt{-5}}{2}$  ये और आ जाते हैं।

ऊपर जो घन मूल का मान है उसके जानने के लिये बीज-गणित से सर्व साधारण कोई रीति नहीं उत्पन्न होती। इसके लिये गणित क्रिया से आसन्न मान निकालना चाहिए अथवा द्वियुक्पद सिद्धान्त से  $\left(6 \pm \sqrt{\frac{-48}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$  इसे फैला कर तब असन्न मान निकालो।

ऊपर जिस रीति से घनसमीकरण के मूल निकले हैं उसे कार्डन (Cardan) साहेब ने निकाला है। इसलिये उनके आदरार्थ कार्डन की रीति (Cardan's solution of a cubic equation) कहते हैं।

११३—ऊपर घनसमीकरण में अव्यक्त के जो मान दिखलाये गये हैं उन पर कुछ विशेष विचार करते हैं।

कल्पना करो कि  $p$  और  $t$  संभाव्य संख्या हैं तो  $p$  और  $t$  के मान के वश से  $r^3$  और  $l^3$  के मान संभाव्य और असंभाव्य दोनों हो सकते हैं।

पहिले कल्पना करो कि मान संभाव्य हैं और पाटीगणित की रीति से क्रम से  $r^3$  और  $l^3$  के एक एक मान  $m$  और  $n$  हैं तो इस स्थिति में दिए हुए समीकरण में  $y$  के मान क्रम से

$m+n$ ,  $m \cdot \text{घा} + n \text{घा}^2$ ,  $m \cdot \text{घा}^2 + n \text{घा}$  ये होंगे।

इनमें घा के स्थान में उनके मान  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$  इसका

उत्थापन देने से य के क्रम से मान

$$m+n, -\frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3}, \\ -\frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(m-n)\sqrt{-3} \text{ ये होंगे।}$$

यदि  $m$  और  $n$  तुल्य न ह तो इनमें पिछले दो मान असंभव होंगे। यदि  $m$  और  $n$  तुल्य हों तो पिछले दो मान समान होंगे जिनकी संख्या  $-m$  वा  $-n$  के तुल्य होगी।

ऐसी स्थिति में  $r^3 = \text{ज}^3$ , इसलिये  $r^3 + \text{ज}^3 = 0$ । इसके व्यतिरेक से कह सकते हो कि किसी घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान यदि असमान और संभाव्य हों तो  $r^3$  और  $\text{ज}^3$  के मान असम्भाव्य होंगे।

अब कल्पना करो कि  $r^3$  और  $\text{ज}^3$  दोनों असंभाव्य हैं तो  $r^3 + \text{ज}^3$  यह ऋण संख्या होगा और १५वें प्रक्रम से  $r^3$  और  $\text{ज}^3$  के घनमूल क्रम से  $m = m_1 + n_1\sqrt{-3}$ ,  $n = m_1 - n_1\sqrt{-3}$  ये होंगे। इस स्थिति में दिए हुए घनसमीकरण में क्रम से अव्यक्त के मान

$$m_1 + n_1\sqrt{-3} + m_1 - n_1\sqrt{-3} = 2m_1,$$

$$(m_1 + n_1\sqrt{-3})\text{घा} + (m_1 - n_1\sqrt{-3})\text{घा}^2 = -m_1 - n_1\sqrt{-3}$$

और  $(m_1 + m_1\sqrt{-3})\text{घा}^2 + (m_1 - n_1\sqrt{-3})\text{घा} = -m_1 + n_1\sqrt{-3}$ ।

११४—ऊपर जो अव्यक्त मान लिखे हैं उनसे स्पष्ट होता है कि यदि दिए हुए घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान

असमान और संभाव्य हों तो व्यवहार में कार्डन की रीति से काम नहीं चल सकता। क्योंकि इस स्थिति में  $r^3$  और  $l^3$  असंभाव्य हैं। यहाँ बीज गणित की युक्ति से यद्यपि जानते हैं कि इसका कोई न कोई असंभाव्यात्मक मूल निकलेगा तथापि पाटोगणित की युक्ति से उन घनमूलों के मान नहीं जान सकते जिसके लिये इतना प्रयास किया गया है। इसलिये ऐसी स्थिति में कार्डन की रीति से काम नहीं चलेगा। जैसे

उदाहरण—( १ )  $y^3 - 12y + 4 = 0$

यहाँ  $t = +4$  और  $p = -12$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये } -\frac{t}{3} + \sqrt{\frac{t^2}{9} + \frac{p^3}{27}} &= -\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} - 64} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{100}}{3} \sqrt{-1} \end{aligned}$$

अब यहाँ यह नहीं जान पड़ता कि  $-\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{100}}{3} \sqrt{-1}$

इसका क्या घनमूल होगा।

उदाहरण—( २ )  $y^3 - 12y - 4 = 0$

यहाँ  $t = -4$  और  $p = -12$

$$\text{इसलिये } -\frac{t}{3} + \sqrt{\frac{t^2}{9} + \frac{p^3}{27}} = 2 + \sqrt{8 - 12} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\text{इसलिये } y = (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{अटकल से } (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\text{और } (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2 - \sqrt{-1}$$

$$\text{इसलिये } y \text{ का एक मान } 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \text{ हुआ}$$

दिए हुए समीकरण में  $y-4$  का भाग देने से

$$y^2 + 4y + 1 = 0$$

इस पर से  $y$  के और मान  $-2 + \sqrt{3}$ ,  $-2 - \sqrt{3}$  ये आ जाते हैं।

इसलिये जहाँ असंभाव्य का घनमूल अटकल से निकल आवे वहाँ पर कार्डन की रीति से  $y$  के मान आ जायेंगे।

११५—यद्यपि असंभाव्य संख्या के घनमूल का ठीक ठीक पता लगाना कठिन है तथापि त्रियुक्पदसिद्धान्त से घनमूल का आसन्न मान निकाल सकते हैं। जैसे

कल्पना करो कि  $a + k\sqrt{-1}$  इसका घनमूल निकालना है तो यदि  $a > k$  तो

$$\begin{aligned} (a + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} &= a^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{k}{a} \sqrt{-1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{k}{a} \sqrt{-1} + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{k^2}{a^2} \sqrt{-1}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{k^3}{a^3} \sqrt{-1} + \dots \dots \dots \right) \end{aligned}$$

यहाँ  $\frac{k}{a}$  के रूपरूप होने से आगे जाकर  $\frac{k^n}{a^n}$  यह बहुत ही छोटा होगा जिसके आगे सब पदों को स्वरूपान्तर से छोड़ सकते हैं।

यदि  $a < k$  तो

$$\begin{aligned} (a + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} &= (\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \left( k + \frac{a}{\sqrt{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -\sqrt[3]{-1} (k - a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \\ &= -a^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( 1 - \frac{a}{k} \sqrt{-1} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

इस पर से पूर्ववत् आसन्न मान निकल आवेगा ।

जैसे ११४वें प्रक्रम के ( १ ) उदाहरण में  $-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{102}}{2}\sqrt{-1}$

इसका घनमूल निकालना है तो यहां  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $k = \frac{\sqrt{102}}{2}$

और  $a < k$  इसलिये

$$\begin{aligned} \text{घनमूल} &= k^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( 1 - \frac{a}{k} \sqrt{-1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= - \left( \frac{\sqrt{102}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( 1 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{102}}{2}} \sqrt{-1} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= - \left( \frac{\sqrt{102}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{102}} \sqrt{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^2} \frac{102}{102} - \frac{2}{3^2} \frac{k^3}{a^3} \sqrt{-1} + \dots \right) \end{aligned}$$

कोष्ठान्तर्गत केवल चार पद लेने से

$$\begin{aligned} \text{घनमूल} &= - \left( \sqrt{\frac{102}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{102}} \sqrt{-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^2} \frac{1}{\sqrt{102}} \sqrt{-1} \right) \\ &= - \left( \frac{13202}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left\{ 1 + \frac{2}{3\sqrt{102}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3^2 \sqrt{102}} \sqrt{-1} \right\} \\ &= - (661.8)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-1} \left( \frac{66}{32 \times 13222} \sqrt{-1} + 1.021 \right) \end{aligned}$$

$$= 1.2 \left( \frac{1.6}{3.4 \times 1.3 \cdot 2.2} - 1.041 \sqrt{-1} \right)$$

$$= 1.2 \left( 2.09 - 1.041 \sqrt{-1} \right)$$

$$= 2.508 - 1.041 \times 1.2 \sqrt{-1}$$

और  $2.508 + 1.041 \times 1.2 \sqrt{-1}$

$$= \left\{ -\frac{t}{2} - \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

इसलिये  $y = \left\{ -\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$

$$+ \left\{ -\frac{t}{2} - \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

र का पहला मान जो  $2.508 - 1.041 \times 1.2 \sqrt{-1}$

$= 2.508 - 1.249 \sqrt{-1}$  यह आया है इसे या  $= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

$= -0.5 + \frac{\sqrt{-3}}{2} \sqrt{-1} = -0.5 + 0.866 \sqrt{-1}$  इससे गुण देने

से र का दूसरा मान  $= 1.433 + 1.236 \sqrt{-1}$  ।

ल के पहले आए हुए मान को घा<sup>२</sup> से गुण देने से

ल का दूसरा मान  $= 1.433 - 1.236 \sqrt{-1}$  ।

दोनों को जोड़ देने से य का दूसरा मान  $2.066$  यह हुआ ।  
इसमें दशमलव को छोड़ देने से  $y = 2$ , इसका उत्थापन  
समीकरण में देने से समीकरण ठीक हो जाता है ।



इसलिये  $y^2 - १०y + ६ = (y - ३)(y^2 + ३y - ६) = ०$  ।

$y^2 + ३y - ३ = ०$  ऐसा मानने से

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} = \frac{-३ \pm ४.५८}{२} ।$$

इसलिये स्वल्पान्तर से  $y = ०.७६$  वा  $y = -३.७६$  ।

ऊपर पहले  $y$  का जो मान आया है उसमें दो ही दशमलव ग्रहण करें तो यही  $०.७६$   $y$  का मान ठीक आता है ।

पहले त्रियुक्पद सिद्धान्त से  $r$  और  $t$  के जो आसन्न घन मूल आए हैं जिन पर से  $y = ०.७६$  हुआ है उन्हें क्रम से घा और घा<sup>३</sup> से गुण कर दूसरे घन मूलों के मान से  $y = ३$  ऐसा आया है । यदि उन्हें क्रम से घा<sup>३</sup> और घा से गुणकर जाड़ दो तो  $y$  का तीसरा मान  $-३.७६$  यह आवेगा ।

इस प्रकार त्रियुक्पद सिद्धान्त से असंभाव्य संख्याओं का आसन्न घनमूल जान उस पर से स्वल्पान्तर से  $y$  के मान आ सकते हैं । इसलिये व्यवहार में जहाँ घनमूल असम्भवा संख्या में आवेगा वहाँ  $y$  के आसन्न मान कार्डेन की रीति से जान सकते हैं ।

११६—ऊपर दो प्रक्रमों से जान पड़ता है कि  $y^3 + ५y + t = ०$  इस समीकरण में कार्डेन की रीति से बिना परिश्रम  $y$  के मान आ जायेंगे यदि  $\frac{t^2}{४} + \frac{p^3}{२७}$  यह धन सख्या हो अर्थात् यदि  $p$  धन संख्या हो अथवा  $p$  ऋण होकर  $\frac{t^2}{४} > \frac{p^3}{२७}$  ऐसा अर्थात्  $२७ t^2 > ४ p^3$  ऐसा हो । इन स्थितियों

में  $y$  के दो मान असंभाव्य होंगे। और यदि  $\frac{3}{4}t^2$  इससे  $p^2$  का संख्यात्मक मान अल्प हो और  $p$  ऋण हो तो  $y$  के सब मान संभाव्य आवेंगे परन्तु कार्डन की रीति से  $y$  के मान निकालने में सुभीता न पड़ेगा।

यदि  $p$  ऋण हो और  $\frac{t^2}{4} + \frac{p^2}{3} = 0$  तो दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे जैसा कि ११३वें प्रक्रम में लिख आए हैं तब ११२वें प्रक्रम से  $m$  और  $n$  के मान  $\sqrt{-\frac{4}{3}}$  इसके समान होंगे और  $y$  के मान क्रम से  $2m, -m, -m$  ये होंगे।

प्रत्येक स्थिति में यदि ठीक ठीक  $y$  का एक मान आ जाय तो उसको  $y$  में घटाने से जो अव्यक्तात्मक एक खण्ड होगा उससे दिए हुए समीकरण में भाग देने से जो लघुि पुरी पुरी आवेगी उसे शून्य के समान करने से बाकी  $y$  के दो मान आ जायेंगे।

११७—पूरे घन समीकरण से द्वितीय पद न रहने वाला समीकरण बनाने से अव्यक्त के मानों में पूरे घनसमीकरण के पद वश क्या स्थिति होगी इसके लिये एक प्रकार लिखते हैं।

कल्पना करो कि पूरा घनसमीकरण  
 $ay^3 + 3ky^2 + 3vy + g = 0$  है।

इसमें यदि  $y = z - \frac{k}{a}$  तो इस पर से नया समीकरण

$vz^3 + pz + t = 0$  ऐसा होगा जहाँ

$$p = 3 - \frac{3k^2}{a^2}; \quad t = \frac{g}{a} - \frac{3kv}{a^2} + \frac{3k^3}{a^3}.$$

कार्डन की रीति से

$$v = \left\{ -\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ + \left\{ -\frac{t}{2} - \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

यदि  $y$  के दो मान समान आवेंगे तो  $y = v - \frac{k}{v}$   
 $\therefore v = y + \frac{k}{v}$  इस पर से स्पष्ट है कि  $v$  के भी दो मान समान होंगे।

इसलिये यहां भी १.३वें प्रक्रम से

$$\frac{t^2}{4} + \frac{p^3}{27} = (2k^3 - 3अकख + अ^2ग)^2 + (अख - क^2)^2 = 0$$

ऐसा होगा जिसका रूपान्तर बीजगणित से

$$(अग - कख)^2 - 4(क^2 - अख)(ख^2 - कग) = 0 \text{ ऐसा होगा।}$$

इसलिये पूरे घनसमीकरण के पदों के गुणकों में ऊपर जो स्थिति दिखाई गई है वह यदि पाई जाय तो कहेंगे कि  $y$  के दो मान समान होंगे तब  $f(y)$  और  $f'(y)$  के महत्तमापवर्त्तन से  $y$  के उस समान मान को जान सकते हो।

११८—कभी कभी घनसमीकरण के पदों के गुणक इस प्रकार के होते हैं कि उन से बीजगणित की साधारण रीति से अव्यक्त का मान निकल आता है।

जैसे उदाहरण—

$$(१) \quad y^3 + ३y = अ - \frac{१}{अ} \text{ तो इसे}$$

$$y^3 + ३y = \left(अ - \frac{१}{अ}\right)^3 - ३\left(अ - \frac{१}{अ}\right) \text{ ऐसे लिख}$$

सकते हो।

इस पर से

$$y^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left\{y - \left(x - \frac{1}{x}\right)\right\} = 0$$

इसलिये  $y$  का एक मान  $x - \frac{1}{x}$  यह हुआ।

$$(2) y^2 + 2xy^2 + 2y + 1 = 0$$

इसमें जानते हैं कि  $2xy^2 = 2x$  ता समशोधन से

$$-y^2 = 2xy^2 + 2y + 1$$

दोनों पक्षों को  $2x$  से गुणने से

$$-2xy^2 = 2x^2 + 2x^2y + 2x$$

दोनों पक्षों में  $2xy^2$  को जोड़ने से

$$\begin{aligned} (2x^2 - 2x^2y)^2 &= 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^2y + 2x^2 \\ &= (2xy + 1)^2 \end{aligned}$$

घन मूल लेने से  $y\sqrt{2x^2 - 2x^2y} = 2xy + 1$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2x^2y} - 2x}$$

११६— $y^2 + 2y + 1 = 0$  इसमें यदि  $y$  ऋण होकर  $-\frac{1}{2}$  का संख्यात्मक मान लें इससे छोटा हो या  $2$  धन हो तो त्रिकोणमिति की युक्ति से सारणी के बल से सहज में अव्यक्त के मान जान सकते हैं। जैसे पहिले मान लो कि  $y$  धन है तो कार्डन की रीति से

$$\begin{aligned} y &= \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\{ -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

इसमें मानों कि  $\frac{प^3}{२७} = \frac{प^३}{७}$  स्पष्ट, तो इसका उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} य &= \left( -\frac{त}{२} + \frac{त}{२} छेप \right)^{\frac{३}{३}} + \left( -\frac{त}{२} - \frac{त}{२} छेप \right)^{\frac{३}{३}} \\ &= (-त)^{\frac{३}{३}} \left\{ \left( \frac{१-छेप}{२} \right)^{\frac{३}{३}} + \left( \frac{१+छेप}{२} \right)^{\frac{३}{३}} \right\} \\ &= \left( \frac{-त}{कोज्याप} \right)^{\frac{३}{३}} \left\{ \left( कोज्या^३ \frac{प}{२} \right)^{\frac{३}{३}} - \left( ज्या^३ \frac{प}{२} \right)^{\frac{३}{३}} \right\} \\ &= \left( \frac{-त}{कोज्याप} \right)^{\frac{३}{३}} \left\{ कोज्या^३ प - ज्या^३ प \right\} । \end{aligned}$$

दूसरी स्थिति में जब प ऋण और  $\frac{प^३}{२७}$  इसके संख्यात्मक मान से  $\frac{त^३}{७}$  यह बड़ा है तब भाग लो कि  $\frac{प^३}{२७} = -\frac{त^३}{७}$  ज्या२प ।

इस पर से

$$\begin{aligned} य &= \left( -\frac{त}{२} + \frac{त}{२} कोज्याप \right)^{\frac{३}{३}} + \left( -\frac{त}{२} - \frac{त}{२} कोज्याप \right)^{\frac{३}{३}} \\ &= (-त)^{\frac{३}{३}} \left\{ \left( कोज्या^३ \frac{प}{२} \right)^{\frac{३}{३}} + \left( ज्या^३ \frac{प}{२} \right)^{\frac{३}{३}} \right\} \end{aligned}$$

त्रिकोणमिति सत्रन्ध्री भारिणी से ज्या  $\frac{त}{३}$  इत्यादि के मान ज्ञान लेने से लाघव से य का मान आ जायगा ।

$$\begin{aligned} १२०—यदि फ़ (य) &= (य-अ) (य-क) (य-ग) \\ &= अ^२(य-अ) - क^२ (य-क) - ग^२ (य-ग) - २अ'क'ग' = \\ &= (य-अ) \{ (य-क)(य-ग) - अ'^२ \} - \{ क'^२ (य-क) + ग'^२ (य-ग) + २अ'क'ग' \} = ० \quad \dots \dots \dots (१) \end{aligned}$$

तो इसमें यह सिद्ध करना है कि  $y$  के सब मान संभाव्य होंगे।

$(y-k)(y-g)-a^2=0$  इस वर्गसमीकरण में अर्थात्

$$y^2 - y(k+g) + kg - a^2 = 0$$

इसमें  $y$  के मान

$$\begin{aligned} & \frac{k+g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k+g}{2}\right)^2 - (kg - a^2)} \\ &= \frac{k+g}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2 + 2kg + g^2 - 4kg + 4a^2}{4}} \\ &= \frac{k+g}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(k-g)^2 + 4a^2} \end{aligned}$$

यहां मूलचिन्हान्तर्गत संख्या का मूल स्पष्ट है कि  $k-g$  से अधिक आवेगा। इसलिये  $y$  का एक मान  $\frac{k+g}{2} + \frac{k-g}{2}$   $= k$  इससे बड़ा होगा और  $k$  से  $g$  को बड़ा मान लिया है क्योंकि  $k-g$  इसे धन समझते हैं। इसलिये  $y$  का एक मान  $k$  और  $g$  दोनों से बड़ा होगा।

इस प्रकार  $y$  का दूसरा मान  $\frac{k+g}{2} - \frac{k-g}{2}$  इससे भी छोटा होगा। इसलिये वह  $k$  और  $g$  दोनों से छोटा होगा।

कल्पना करो कि  $y$  का बड़ा मान  $x$  और छोटा मान  $z$  है तो फं (य) में  $+\infty$ ,  $x$ ,  $z$  और  $-\infty$  का उत्थापन देने से

फं ( $\infty$ ), फं ( $x$ ) फं ( $z$ ) फं ( $-\infty$ ),

$$\begin{aligned} & +\infty, -\{k'\sqrt{x-k} + g'\sqrt{x-g}\}^2 \\ & +\{k'\sqrt{k-z} - g'\sqrt{g-z}\}^2 - \infty \end{aligned}$$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये  $\infty$  और च के बीच अव्यक्त का एक मान जो च से बड़ा होगा दूसरा च और ज के बीच और तीसरा ज से छोटा ये तीन संभाव्य मान होंगे ।

यदि च और ज तुल्य हों तो वर्ग समीकरण में मूल चिह्नान्तर्गत संख्या का नाश हो जाना चाहिए इसलिये  $अ' = 0$  और  $क = ग$

$$\text{तब फ (य)} = (य - अ) (य - क) (य - क) - ग'^2 (य - क)$$

$$= (य - क) \{ (य - अ) (य - क) - ग'^2 \} = 0$$

इसमें जो  $य - क = 0$  तो  $य - क$

$$\text{और जो } (य - अ)(य - क) - ग'^2 = य^2 - य(अ + क) + अक - ग'^2 = 0$$

$$\text{इससे } य = \frac{अ + क}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{अ - क}{2}\right)^2 + ग'^2}$$

इसलिये य के तीनों मान संभाव्य हुए ।

यदि च का उत्थापन देने से फ (य) शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि फ (य) = 0 इसमें अव्यक्त का एक मान च है और ऊपर व्यत्यास की विधि से सिद्ध होगा कि अव्यक्त का एक मान ज से छोटा होगा । इसलिये फ (य) = 0 इसमें अव्यक्त के दो संभाव्य मान आने से तीसरा भी अवश्य संभाव्य होगा क्योंकि किसी समीकरण का संभाव्य मूल जोड़ा जोड़ा होगा ( २६वां प्रक्रम देखो ) ।

१२१—इस प्रक्रम में घनसमीकरण के कुछ उदाहरण किया समेत दिखलाते हैं ।

$$( १ ) य^3 + ६य - २० = 0 \text{ इसमें य के मान बताओ । }$$

यहां कार्डन की रीति से  $p = 6$ ,  $n = -20$

$$\text{इसलिये } y = (10 + \sqrt{100})^{\frac{1}{3}} + (10 - \sqrt{100})^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{आसने मान से } (10 + \sqrt{100})^{\frac{1}{3}} = 2.932. \dots\dots\dots \text{और}$$

$$(10 - \sqrt{100})^{\frac{1}{3}} = -0.932. \dots\dots\dots$$

इसलिये  $y = 2$  इसका उत्थापन समीकरण में देने से समीकरण ठीक होना है। इसलिये  $y$  का एक मान २ यह ठीक ठहरा।

$y - 2$  इसका समीकरण में भाग देने से  $y^3 + 3y + 10 = 0$  यह आया। इस पर से  $y$  के और दो मान  $-1 \pm \sqrt[3]{-1}$  ये हुए।

यहां अटकल से ठीक ठीक  $(10 + \sqrt{100})^{\frac{1}{3}} = 1 + \sqrt[3]{3}$  और  $(10 - \sqrt{100})^{\frac{1}{3}} = 1 - \sqrt[3]{3}$  इसलिये दोनों का योग २ यह  $y$  का ठीक ठीक मान आता है।

(२)  $y^3 - 3\sqrt[3]{2} y - 2 = 0$  इसमें अव्यक्त के मान बताओ।

यहां  $t = -2$ ,  $p = -3\sqrt[3]{2}$ । इन पर से

$$y = (1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (1 - \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

अब अटकल से

$$(1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}} \sqrt{-1}$$



$$\text{और } (1 - \sqrt{-1})^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}} \sqrt{-1}$$

इसलिये

$$y = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{और } y \text{ के दो मान } \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \text{ ये आधैंगे ।}$$

(३) १२०वें प्रक्रम में फ़ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण का मूल च कय फ़ (य) = ० इसके एक मूल के तुल्य होगा ।

फ़ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण

$$(y - क) (y - ग) - अ'^2 = ० \text{ इसमें च का उत्थापन देने से}$$

$$(च - क) (च - ग) - अ'^2 = ० \quad \dots \quad (१)$$

दूसरे खण्ड में भी च का उत्थापन देने से वह भी शून्य के तुल्य होगा क्योंकि फ़ (च) = ० ।

$$\text{इसलिये } क'^2 (ग - क) + ग'^2 (च - ग) + २ग'क'ग' = ० \quad (२)$$

(१) से अ' का मान जान (२) में उसका उत्थापन देने से

$$क'^2 (च - क) + ग'^2 (च - ग) + २क'ग' \sqrt{(च - क)(च - ग)} = ०$$

$$\text{इसलिये } \{क' \sqrt{(च - क)} + ग' \sqrt{(च - ग)}\}^2 = ०$$

$$\text{और } क'^2 \sqrt{(च - क)} = ग'^2 \sqrt{(च - ग)} \cdot \dots \dots \dots (३)$$

(२) और (३) से

$$व - क = -\frac{घ'ग'}{क}, व - ग = -\frac{अ'क'}{ग} \dots \dots \dots (६)$$

और  $क - \frac{अ'ग'}{क} = ग - \frac{अ'क'}{ग}, \dots \dots \dots (७)$

इस (७) से गुणकों की स्थिति स्पष्ट होती है।

(४) भुज और कर्ण का अन्तर अ और क्षेत्रफल फ है तो भुज, कोटि और कर्ण का बताओ।

मान लो कि भुज = य तो कर्ण = य + अ और कोटि =  $\frac{रफ}{य}$

$$यु^2 + को^2 = य^2 + \frac{४फ^2}{य^2} = \frac{य^4 + ४फ^2}{य^2} = क^2 = य^2 + २अय + अ^2$$

छेदगम और संशोधन से

$$२अय^२ + अ^२य^२ - ४फ^2 = ०$$

२अ का भाग देने से

$$य^२ + \frac{अ}{२} य^२ - \frac{२फ^2}{अ} = ० \dots \dots \dots (१)$$

मान लो कि य = व -  $\frac{अ}{६}$

तो  $य^२ = व^२ - \frac{अ}{२} व^२ + \frac{अ^२}{२२} व - \frac{अ^३}{२१६}$

$$\frac{अ}{२} य^२ = \frac{अ}{२} व^२ - \frac{अ^२}{६} व + \frac{अ^३}{७२}$$

$$\begin{aligned} \text{अ}^3 + \frac{\text{अ}}{२} \text{य}^२ - \frac{२\text{फ}^२}{\text{अ}} &= \text{व}^३ - \frac{\text{अ}^२}{१२} \text{व} + \frac{\text{अ}^३}{१०८} - \frac{२\text{फ}^२}{\text{अ}} = ० \\ &= \text{व}^३ + \text{पव} + \text{त} = ० \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ यदि } \text{प} = -\frac{\text{अ}^२}{१२}, \text{ त} = \frac{\text{अ}^३}{१०८} - \frac{२\text{फ}^२}{\text{अ}}$$

अब कार्डेन की रीति से व का मान जान कर उस पर से य का मान निकाल सकते हो।

$$(५) \text{अय}^३ + ३\text{कय}^२ + ३\text{खय} + \text{ग} = ०$$

इसमें यदि य के मान  $\text{अ}_१, \text{अ}_२$  और  $\text{अ}_३$  हों और  $\text{अ}_२ - \text{अ}_१ = \text{अ}_३ - \text{अ}_२$  हो तो अ, क, ग के रूप में क का मान निकालें।

$$\text{यहाँ } \text{अ}_२ - \text{अ}_१ = \text{अ}_३ - \text{अ}_२ \quad २\text{अ}_२ = \text{अ}_१ + \text{अ}_३$$

और  $३\text{अ}_२ = \text{अ}_१ + \text{अ}_२ + \text{अ}_३ = -\frac{३\text{क}}{\text{अ}}$  (२५वें प्रक्रम का पूर्वा प्रसिद्धार्थ)

∴  $\text{अ}_२ = -\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ । इसलिये य का एक मान  $-\frac{\text{क}}{\text{अ}}$  हुआ।

इसका उत्थापन  $\text{फ}(य) = \text{अय}^३ + ३\text{कय}^२ + ३\text{खय} + \text{ग} = ०$   
इसमें देने से

+ अ	३क	३ख	ग
- क	$-\frac{२\text{क}^२}{\text{अ}}$	$-\frac{३\text{खक}}{\text{अ}} + \frac{२\text{क}^२}{\text{अ}^२}$	
३क	$३ख - \frac{२\text{क}^२}{\text{अ}}$	$ग - \frac{३\text{खक}}{\text{अ}} + \frac{२\text{क}^२}{\text{अ}^२}$	

ग -  $\frac{३क}{२} + \frac{२क^२}{२}$  यह अवश्य शून्य समान होगा। इस-  
लिये इसे शून्य के तुल्य कर दोनों पदों को  $२$  से गुण देने से

$$गअ^२ - ३अक + २क^२ = ०$$

२ का भाग देने से

$$क^२ - \frac{३अक}{२} + \frac{गअ^२}{२} = ०$$

यहां  $n = \frac{गअ^२}{२}$ , और  $p = -\frac{३अक}{२}$  ऐसी अल्पता कर  
कार्डन की रीति से क के मान जान सकते हैं।

(६)  $य^२ + १२य = ६य^२ + ३५$  इसमें  $य$  दो मान घटाओ।

इस उदाहरण को भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित में  
लिखा है और इसके उत्तर के लिये लिखते हैं कि ऐसे उदा-  
हरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं केवल अपने बुद्धि  
बल से कुछ जोड़ घटा कर उत्तर निकालो।

उन्होंने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है

$$य^२ + १२य = ६य^२ + ३५$$

$६य^२ + २$  इसको दोनों पदों में घटा देने से

$$य^२ - ६य^२ + १२य - २ = २७$$

$$\text{वा } (य - २)^२ = २७$$

घनमूल लेने से

$$य - २ = ३ \quad य = ५।$$

बस  $य$  का यही एक मान निकाल कर रह गए हैं। आगे  
कुछ भी विशेष नहीं लिखा है।

यहां एक ही पक्ष में सब पदों को ले आने से

$$y^2 - 6y^2 + 12y - 32 = 0 = \text{फ़ (य)},$$

इसके परिच्छिन्न मूल ले आने की युक्ति से अन्त पद को निःशेष करने वाली संख्या ५ और ७ है। और फ़ (१) = १८ यह ७ - १ = ६ इससे निःशेष नहीं होता और ५ - १ = ४ इससे निःशेष होता है इसलिये परीक्षा से परिच्छिन्न मूल केवल ५ ही है।  $y - ५$  का फ़ (य) में भाग देने से

$$y^2 - y + ७ = ०। \text{ इस पर से } y \text{ के और दो मान}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{-27}}{2} \text{ ये असम्भव आते हैं।}$$

यदि यहां ३६वें प्रक्रम की रीति से दूसरा पद उड़ाने के लिये  $y = v + २$  ता ऊपर के समीकरण में तीसरे पद के भी उड़ जाने से उसका रूप

$$v^2 - २७ = ० \text{ ऐसा होता है जिससे } v = ३$$

$$\text{और } y = v + २ = ३ + २ = ५।$$

इस पर से ऊपर की युक्ति से  $y$  के और दो मान आ जायेंगे।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१।  $y^2 - ६y - ४ = ०$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

२।  $y^2 - ६y - २८ = ०$  इसके मूल बताओ।

३। नीचे लिखे हुए समीकरणों में  $y$  के मान बताओ:—

( १ )  $२y^2 + ६y - ३ = ०$

( २ )  $३y^2 - ६y^2 - ४ = ०$

$$(३) \quad y^2 - २y = -६$$

$$(४) \quad y^2 - १४y^2 - ३३y + ८४७ = ०$$

$$(५) \quad y^2 + ६अय^2 = ३६अ^2$$

$$(६) \quad y^2 + ६अय^2 + ३६अ^2 = ०$$

$$(७) \quad y^2 - ३(अ^2 + क^2) y = २अ(अ^2 - ३क^2)$$

४। यदि  $y^2 + पय + त = ०$  इस पर से  $y^2 =$   
 $(य^2 + अय + क)^2$  ऐसा समीकरण बनता हो तो प और त का  
 परस्पर क्या सम्बन्ध होगा। उ०  $(-२प)^2 = ८त$ ।

५।  $y^2 + पय + त = ०$  इस पर से एक ऐसा समीकरण  
 बनाया जाय जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों से ३ तुल्य  
 छोटे हों तो यदि  $२७तव^2 - ६प^2व^2 - प^2 = ०$  तो सिद्ध करो  
 कि नये समीकरण के मूल गुणोत्तर श्रेणी में होंगे।

६।  $y^2 + पय + त = ०$  इसमें यदि अव्यक्त के दो असंभाव्य  
 मान  $अ \pm क\sqrt{-१}$  ऐसे हों तो सिद्ध करो कि  $क^2 = ३अ^2 + प$

७। भुज, कोटि का अन्तर २ और जात्य त्रिभुज का क्षेत्र-  
 फल ६ है तो भुज, कोट और कर्ण के मान बताओ।

$$उ० भु = ३, को = ४, क = ५।$$

८।  $y^2 + प_१y^2 + प_२y + त = ०$  इसमें अव्यक्त के मान  
 यदि गुणोत्तर श्रेणी में हो तो सिद्ध करो कि  $तप_१^2 = प_२^2$ ।

९।  $y^2 - य^2 + २य - ८ = ०$  इसमें य के मान बताओ।

## चतुर्धात समीकरण

१२२—किसी पूरे चतुर्धात समीकरण में  $y$  के स्थान में एक ऐसे अव्यक्त का उत्थापन दे सकते हैं जिसके वश से नये समीकरण में दूसरा पद न रहे ( ३६वाँ प्रक्रम देखो ) जैसे

$p_0 y^4 + p_1 y^3 + p_2 y^2 + p_3 y + p_4 = 0$  इस पूरे चतुर्धात समीकरण में ( ३६वाँ प्रक्रम से ) यदि  $y = r - \frac{p_3}{4p_0}$  तो इसके उत्थापन से अब जो  $r$  का चतुर्धात समीकरण बनेगा उसमें  $r^4$  का पद उड़ जायगा । इसलिये यहां पर उस चतुर्धात समीकरण में  $y$  के मान जानने के लिये विधि लिखी जाती है जिसमें दूसरे पद का लोप हो गया है ।

कल्पना करो कि किसी पूरे चतुर्धात समीकरण को

$$अय^4 + ४कय^3 + ६खय^2 + ४गय + घ = 0 \dots \dots (१)$$

ऐसा बना लिया है । इसमें यदि  $y = \frac{r-क}{अ}$  तो नया समीकरण

$$र^4 + ६चा र^3 + ४जा र + अ^३भा - ३चा^२ = 0 \text{ ऐसा होगा} \\ \dots \dots (२)$$

जहां  $चा = अख - क^२$ ,  $जा = अ^२ग - ३अकख + २क^३$ ,

$$भा = अघ - ४कग + ३ख^२ ।$$

ऐसे द्वितीय पद रहित चतुर्धात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये ओलर ( Euler ) ने कल्पना की कि

$$r = \sqrt{प} + \sqrt{व} + \sqrt{भ}$$

वर्ग करने से

$$र^२ - प - व - भ = २ ( \sqrt{प \cdot व} + \sqrt{प \cdot भ} + \sqrt{व \cdot भ} )$$

फिर क्रम से वर्ग और लघु करने से

$$r^2 - 2(p+q+m)r^2 - 4r\sqrt{p\cdot q\cdot m} + (p+q+m)^2 \\ - 4(q\cdot m + p\cdot q + p\cdot m) = 0$$

(३) के साथ तुलना करने से

$$p+q+m = -३चा, q\cdot m + p\cdot m + p\cdot q \\ = ३चा^2 - \frac{अ^२भा}{४}, \sqrt{p\cdot q\cdot m} = -\frac{जा^२}{२}$$

इस पर से एक घन समीकरण बनाने से

$$r^3 + ३चा r^2 + \left(३चा^2 - \frac{अ^२भा}{४}\right)r - \frac{जा^२}{४} = 0 \text{ ऐसा हुआ}$$

..... (३) इसमें क्रम से जो र के मान होंगे वे क्रम से प, q और m के मान होंगे।

(३) का थोड़ा सा रूपान्तर करने से

$$r^3 + ३चा r^2 + ३चा^2 r + चा^३ - चा^३ - \frac{अ^२भा}{४} r - \frac{अ^२भा}{४} चा \\ + \frac{अ^२भा}{४} चा - \frac{जा^२}{४} \\ = (r+चा)^३ - \frac{अ^२भा}{४} (r+चा) + \frac{अ^२भा}{४} चा - चा^३ - \frac{जा^२}{४} = 0$$

इसे ४ से गुण देने से

$$४(r+चा)^३ - अ^२भा(r+चा) + अ^२भा चा - जा^२ - ४चा^३ = 0$$

इसमें यदि  $अ^२भा चा - जा^२ - ४चा^३ = अ^३का$



र के चार मान यदि  $r_1, r_2, r_3, r_4$  क्रम से ये हैं तो र के चतुर्धात समीकरण में  $r^2$  के पद के न रहने से स्पष्ट है कि

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$$

और ऊपर की युक्ति से

$$r_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \frac{\text{जा}}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$$

$$r_2 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \frac{\text{जा}}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$$

$$r_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \frac{\text{जा}}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$$

$$r_4 = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \frac{\text{जा}}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$$

इन पर से

$$r_2 + r_3 = -2\sqrt{p}, r_1 + r_4 = 2\sqrt{p}$$

$$\therefore (r_2 + r_3)^2 = (r_1 + r_4)^2 = 4p$$

$$\text{इसी प्रकार } (r_3 + r_1)^2 = (r_2 + r_4)^2 = 4q$$

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_3 + r_4)^2 = 4pq$$

इन पर से भी  $r_1, r_2, r_3, r_4$  ये  $\sqrt{p} + \sqrt{q}, \sqrt{p} - \sqrt{q}, \sqrt{p} - \sqrt{q}, \sqrt{p} + \sqrt{q}$  इनके रूप में आ जायेंगे।

यदि दिए हुए चतुर्धात समीकरण में  $y$  के मान  $a_1, a_2, a_3, a_4$  हों तो (१) समीकरण में  $r = ay + k$ । इसलिये  $y$  के चारों मानों का उत्थापन  $y$  के स्थान में और  $r$  के चारों मानों का उत्थापन  $r$  के स्थान में देने से

$$\left. \begin{aligned} \text{अअ}_1 + \text{क} &= \sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{व}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_2 + \text{क} &= -\sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{व}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_3 + \text{क} &= -\sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{व}} + \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_4 + \text{क} &= \sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{व}} + \sqrt{\text{भ}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (५)$$

इन पर से प, व, भ के मान

$$\left. \begin{aligned} \text{प} &= \frac{\text{अ}^2}{१६} \left( \text{अ}_2 + \text{अ}_3 - \text{अ}_1 - \text{अ}_4 \right)^2 \\ \text{व} &= \frac{\text{अ}^2}{१६} \left( \text{अ}_3 + \text{अ}_1 - \text{अ}_2 - \text{अ}_4 \right)^2 \\ \text{भ} &= \frac{\text{अ}^2}{१६} \left( \text{अ}_1 + \text{अ}_2 - \text{अ}_3 - \text{अ}_4 \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (६)$$

(५) में दो दो का अन्तर कर आपस में गुण देने से और प, व, भ के रूप प<sub>१</sub>, व<sub>२</sub>, भ<sub>३</sub> इनके रूप में बनाने से

$$\left. \begin{aligned} ४(\text{व} - \text{भ}) &= ४\text{अ}^2(\text{व}_2 - \text{व}_1) = -\text{अ}^2(\text{अ}_2 - \text{अ}_3)(\text{अ}_1 - \text{अ}_4) \\ ४(\text{भ} - \text{प}) &= ४\text{अ}^2(\text{व}_3 - \text{व}_1) = -\text{अ}^2(\text{अ}_3 - \text{अ}_1)(\text{अ}_2 - \text{अ}_4) \\ ४(\text{प} - \text{व}) &= ४\text{अ}^2(\text{व}_1 - \text{व}_2) = -\text{अ}^2(\text{अ}_1 - \text{अ}_2)(\text{अ}_3 - \text{अ}_4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (७)$$

(४) में दूसरे पद को न रहने से प<sub>१</sub> + प<sub>२</sub> + प<sub>३</sub> = ०  
इसलिये (७) में परस्पर घटाने से

$$\left. \begin{aligned} १२\text{व}_1 &= (\text{अ}_3 - \text{अ}_1)(\text{अ}_2 - \text{अ}_4) - (\text{अ}_1 - \text{अ}_2)(\text{अ}_3 - \text{अ}_4) \\ १२\text{व}_2 &= (\text{अ}_1 - \text{अ}_2)(\text{अ}_3 - \text{अ}_4) - (\text{अ}_2 - \text{अ}_3)(\text{अ}_1 - \text{अ}_4) \\ १२\text{व}_3 &= (\text{अ}_2 - \text{अ}_3)(\text{अ}_1 - \text{अ}_4) - (\text{अ}_3 - \text{अ}_1)(\text{अ}_2 - \text{अ}_4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (८)$$

इस प्रकार (५), (६), (७) और (८) से आपस के सब प्रकार के सम्बन्ध जान पड़ते हैं।

(३) समीकरण को ओलर का घनसमीकरण कहते हैं और (४) को अपवर्तित घनसमीकरण कहते हैं।

ऊपर के समीकरणों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

$$\text{उदाहरण—(१) } आ_0.य^४ + ६आ_२.य^२ + ४आ_३.य + आ_४ = ०$$

$$\text{और } आ_0.य^४ + ६आ_२.य^२ - ४आ_३.य + आ_४ = ०$$

इन दोनों पर से अपवर्तित घन समीकरण एक ही होगा।

यहां स्पष्ट है कि पहले समीकरण में  $जा = आ_३$  और दूसरे समीकरण में  $जा = -आ_३$  इसलिये  $जा^२$  का मान दोनों में एक ही होगा और अवर्तित घन समीकरण में व्यक्ताङ्क के मान में  $जा^२$  आता है। इसलिये दोनों समीकरणों पर से अपवर्तित घनसमीकरण एक ही होगा।

$$(२) य^४ - ६द.य^२ \pm ८य\sqrt{द^३ + म^३ + न^३ - ३दमन} + ३(४मन - द^२) = ०$$

इस पर से अपवर्तित घनसमीकरण बनाओ।

यहां दिए हुए समीकरण के रूप से

$$चा = -द, जा = \pm २\sqrt{द^३ + म^३ + न^३ - ३दमन}$$

$$\text{और } अ^२भा - ३चा^२ = ३(४मन - द^२)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{अ}^२भा &= १२मन - ३द^२ + ३चा^२ \\ &= १२मन \end{aligned}$$

इन पर से  $अ^२भा चा - जा^२ - ४चा^३$

$$= अ^३छ$$

$$\begin{aligned}
 &= -\text{अ}^2\text{आद} - ४\text{द}^2 - ४\text{म}^2 - ४\text{न}^2 + १२\text{दमन} + ४\text{द}^2 \\
 &= -१२\text{दमन} - ४\text{द}^2 - ४\text{म}^2 - ४\text{न}^2 + १२\text{दमन} + ४\text{द}^2 \\
 &= -४(\text{म}^2 + \text{न}^2), \text{ अ} = १ \text{ ऐसा मान लेने से।}
 \end{aligned}$$

इनका उत्थापन अपवर्तित घनसमीकरण में देने से और ४ का अपवर्तन देने से

$$\text{ष}^2 - ३\text{मनष} - (\text{म}^2 + \text{न}^2) = ० \text{ ऐसा हुआ।}$$

$$\begin{aligned}
 (३) \{ \text{य}^2 - ६\text{दय}^2 + ३(\text{४मन} - \text{द}^2) \}^2 \\
 = ६४(\text{द}^2 + \text{म}^2 + \text{न}^2 - ३\text{मन})\text{य}^2
 \end{aligned}$$

इसमें य के मान बताओ।

यह समीकरण अष्ट घात का है, इसलिये य के आठ मान आवेंगे। और दोनों पक्षों के मूल लेने से जो चतुर्घात समीकरण होगा उसमें य के चार मान आवेंगे। मूल लेकर सब पदों को बाईं ओर ले जाने से समीकरण का रूप

$$\begin{aligned}
 \text{य}^2 - ६\text{दय}^2 \pm ८\text{य}\sqrt{\text{द}^2 + \text{म}^2 + \text{न}^2 - ३\text{दमन} + ३(\text{४मन} - \text{द}^2)} = ० \\
 \text{ऐसा होगा।}
 \end{aligned}$$

यह ठीक (२) उदाहरण के ऐसा हो गया। इसलिये इस पर से अपवर्तित घनसमीकरण

$$\text{ष}^2 - ३\text{मनष} - (\text{म}^2 + \text{न}^2) = ०$$

कार्डन की रीति से  $\text{त} = -(\text{म}^2 + \text{न}^2)$ ,  $\text{प} = -३\text{मन}$

$$\text{इन पर से} \quad \text{र} = \left\{ -\frac{\text{त}}{२} + \sqrt{\left(\frac{\text{त}^2}{४} + \frac{\text{प}^3}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} = \text{म}$$

$$\text{और} \quad \text{ल} = \left\{ -\frac{\text{त}}{२} - \sqrt{\left(\frac{\text{त}^2}{४} + \frac{\text{प}^3}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} = \text{न}$$

इसलिये  $\varphi_1 = m + n$ ,  $\varphi_2 = \text{घाम} + \text{घा}^2 n$ ,  $\varphi_3 = \text{घा}^2 m + \text{घान}$

और  $y = \sqrt{d + m + n} + \sqrt{d + \text{घाम} + \text{घा}^2 n}$   
 $+ \sqrt{d + \text{घा}^2 m + \text{घान}}$

मूलों के घन, ऋण चिन्हों के वश से  $y$  के आठ मान आ जायेंगे।

(४)  $r^2 + ६\text{चा}r^2 + ४\text{जा}r + \text{अ}^2\text{आ} - ३\text{चा}^2 = ०$  इसमें यदि  $r$  का एक मान

$\sqrt{d + m + n} + \sqrt{d + \text{घाम} + \text{घा}^2 n} + \sqrt{d + \text{घा}^2 m + \text{घान}}$   
 यह हो तो चा, आ और छ के मान बताओ।

(३) उदाहरण की युक्ति से यहां अपवर्तित घन समीकरण

$\varphi^2 - ३m\varphi - (m^2 + n^2) = ०$  ऐसा होगा।

(२) उदाहरण की युक्ति से  $\text{अ} = १$  ऐसा मान लेने से

$\text{चा} = -d$ ,  $\text{आ} = १२mn$ ,  $\text{छ} = -४(m^2 + n^2)$ ।

(५) यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त का एक संभाव्य घन मान होगा और दो असंभाव्य मान होंगे।

६वाँ समीकरण जो पहिले लिख आए हैं उससे स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में ओलर के समीकरण में अव्यक्त का एक मान घन, संभाव्य होगा और दो असंभाव्य। विचारने में यह बात मान लो। कि चतुर्घात समीकरण के दोनों संभाव्य मूल आपस में तुल्य नहीं हैं। तुल्य मानने से व्यभिचार हो जायगा। ६वें समीकरण से इतनी बातें सिद्ध होती हैं।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब मान धन संभाव्य हों तो चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे ।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब संभाव्य मान ऋण हों तो चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे । और यदि ओलर के घन समीकरण में अव्यक्त के दो असंभाव्य मान हों तो चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे ।

### अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। यदि  $जा = ०$  और  $छ = ०$  तो चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त मान कैसे आवेंगे ।

२। यदि चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्तित घन समीकरण में भी अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे ।

३। यदि चतुर्धातु समीकरण में अव्यक्त के तीन मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्तित घन समीकरण में अव्यक्त के सब मान शून्य होंगे । इस दशा में  $का = ०$ ,  $छ = ०$  होगा ।

४। यदि चतुर्धातु समीकरण के दो दो मूल समान हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घन समीकरण के दो मूल शून्य होंगे और  $ज$  और  $१२चा^२ - अ^२का$  ये भी शून्य होंगे ।

५। सिद्ध करो कि यदि चतुर्धातु समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य हों तो अपवर्तित घनसमीकरण के

सब मूल संभाव्य होंगे । और इसका विपरीत यदि अपवर्तित घन समीकरण के सब मूल संभाव्य हों तो चतुर्घात समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य होंगे ।

६ । यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि अपवर्तित घन समीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे । और यदि अपवर्तित घनसमीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे ।

७ । यदि चा धन होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के असंभव मान अवश्य होंगे ।

८ । यदि का ऋण होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे ।

९ । यदि चा और छ दोनों धन हो तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान असंभव होंगे ।

१० । सिद्ध करो कि यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान  $a_1, a_2, a_3$  और  $a_4$  हों तो  $a^3 (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_4)^2 (a_2 - a_4)^2 (a_3 - a_4)^2 = २५६ (का^३ - २७छ^२)$  । १२२वें प्रक्रम में दिए हुए (७)वें समीकरण से और ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण के अन्त में जो समीकरण का लघुतम रूप है उससे यह प्रश्न सिद्ध हो जाता है ।

१२३— ओलर के घनसमीकरण में  $p, q$  और  $r$  के जो मान आते हैं जिनके दश से पहले  $r$  के आठ मान आ जाते हैं,

फिर विचार करने से चार मान अशुद्ध ठहरते हैं और चार ठीक उनके जानने के लिये और भी कई एक प्रकार हैं जिनसे बिना संशय के चार मान आ जाते हैं। पिछले प्रक्रम में जो प्रकार लिख आए हैं उनसे बुद्धिमान अनेक कल्पना कर सकता है, इसलिये व्यर्थ ग्रंथ बढ़ाना नहीं चाहते। अब चतुर्धातु समीकरण को दो वर्ग समीकरणों के गुण्य गुणक रूप खण्डों में कैसे ले जाना होता है इसके लिये दो प्रकार दिखला कर यह अध्याय समाप्त किया जाता है।

प्रकार—(१) कल्पना करो कि

$$\text{अय}^4 + ४कय^3 + ६खय^2 + ४गय + घ = ०$$

इसका रूपान्तर

$$(\text{अय}^2 + २कय + ख + २अघ)^2 - (२माय + ना)^2$$

पेसा होता है।

दिष्ट हुए समीकरण को अ से गुण कर इसके साथ समीकरण के रूपान्तर की तुलना करने से

$$\text{मा}^2 = क^2 - अख + अ^२घ, \text{ना}^2 = (ख + २अघ)^2 - अघ$$

$$\text{माना} = कख - अग + २अकघ$$

मा<sup>२</sup> को ना<sup>२</sup> से गुण कर उसमें माना का वर्ग घटा देने से

$$४अ^३घ^३ - (अघ - ४कग + ३ख^२)अघ + अखघ + २खगक$$

$$- अग^२ - घक^२ - ख^३ = ०$$

यह पिछले प्रक्रम का वही अपवर्तित घन समीकरण बन जाता है।

इस पर से घ के तीन मान प<sub>१</sub>, प<sub>२</sub> और प<sub>३</sub> मिलेंगे फिर उनसे मा<sup>२</sup>, माना और ना<sup>२</sup> भी व्यक्त हो जायेंगे जिनसे मा और ना के मान भी जान सकते हो।



इस युक्ति से चतुर्घात समीकरण का

$$\begin{aligned} & (अय^2 + २कय + ख + २अष)^2 - (२माय + ना)^2 \\ &= \{ अय^2 + २(क-मा)य + ख + २अष - ना \} \\ & \{ अय^2 + २(क+मा)य + ख + २अष + ना \} = 0 \end{aligned}$$

इसमें  $y$  के स्थान में  $p_1, p_2, p_3$  का उत्थापन देने से तीन जोड़े वर्गसमीकरण के गुण्य गुणक रूप खण्ड होंगे।

चतुर्घात समीकरण में  $y$  के जो मान  $अ_1, अ_2, अ_3$  और  $अ_4$  ये हैं उनमें मान लो कि पहले एक जोड़े वर्गसमीकरण संक्रम से  $अ_2, अ_3$  और  $अ_1, अ_4$  दूसरे जोड़े से  $अ_3, अ_1$  और  $अ_2, अ_4$  और तीसरे जोड़े से  $अ_1, अ_2$  और  $अ_3, अ_4$  ये मान आए तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$अ_2 + अ_3 = -\frac{2}{अ} (क - मा_1), \quad अ_3 + अ_1 = -\frac{2}{अ} (क - मा_2),$$

$$अ_1 + अ_2 = -\frac{2}{अ} (क - मा_3),$$

$$अ_1 + अ_4 = -\frac{2}{अ} (क + मा_1), \quad अ_3 + अ_4 = -\frac{2}{अ} (क + मा_2),$$

$$अ_3 + अ_4 = -\frac{2}{अ} (क + मा_3),$$

$$\text{जहाँ } मा_1 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 p_1},$$

$$मा_2 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 p_2},$$

$$मा_3 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 p_3}$$

दो दो समीकरणों को परस्पर घटाने से

$$अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४ = ४ \frac{मा_१}{अ}, अ_३ + अ_१ - अ_२ - अ_४ = ४ \frac{मा_२}{अ}.$$

$$अ_१ + अ_२ - अ_३ - अ_४ = ४ \frac{मा_३}{अ}$$

और दिए हुए चतुर्घात समीकरण पर से

$$अ_१ + अ_२ + अ_३ + अ_४ = -४ \frac{क}{अ}$$

इसलिये

$$अअ_१ + क = -मा_१ + मा_२ + मा_३$$

$$अअ_२ + क = मा_१ - मा_२ + मा_३$$

$$अअ_३ + क = मा_१ + मा_२ - मा_३$$

$$अअ_४ + क = -मा_१ - मा_२ - मा_३$$

इसकी तुलना १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से करने में स्पष्ट होता है कि ओलर के घनसमीकरण में जो प, व, भ है वे क्रम से मा<sub>१</sub><sup>२</sup>, मा<sub>२</sub><sup>२</sup>, मा<sub>३</sub><sup>२</sup> इनके समान हैं।

$४ \frac{मा_१}{अ}, ४ \frac{मा_२}{अ}$  इत्यादि को परस्पर गुण देने से

$$अ^३ (अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४) (अ_३ + अ_१ - अ_२ - अ_४) \cdot (अ_१ + अ_२ - अ_३ - अ_४) = ६४ मा_१ मा_२ मा_३ \text{ ऐसा होगा।}$$

फिर १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से

$$अअ_४ + क = \sqrt{प} + \sqrt{व} + \sqrt{भ} = -मा_१ - मा_२ - मा_३$$

$$\text{इसलिये } \sqrt{प}\sqrt{व}\sqrt{भ} = -मा_१ मा_२ मा_३ = -\frac{जा}{२}$$

$$\therefore मा_१, मा_२, मा_३ = \frac{जा}{२}$$

इस पर से मा<sub>१</sub>, मा<sub>२</sub>, मा<sub>३</sub> इनका कैसा चिन्ह ग्रहण करना चाहिए इसका भा विचार कर सकते हैं ।

$$\text{पिछले समीकरण से मा}_3 = \frac{\text{जा}}{\text{२मा}_1 \text{ मा}_2}$$

इसलिये य के मान जानने के लिये केवल

$$\text{अय} + \text{क} = \text{मा}_1 + \text{मा}_2 - \frac{\text{जा}}{\text{२मा}_1 \text{ मा}_2} \text{ ऐसा समीकरण बना सकते हैं}$$

$$\text{मा}_1 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2 \text{प}_1} \text{ और मा}_2 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2 \text{प}_2}$$

इन पर से मा<sub>१</sub> और मा<sub>२</sub> के घन और ऋण मान लेने से ऊपर अय + क में परस्पर उत्थापन देने से चतुर्धात समीकरण में य के चार मान आ जायेंगे ।

दो राशिओं के वर्गान्तर के रूप में जो चतुर्धात समीकरण ऊपर बनाया गया है वह बहुतों के मत से फेररी (Ferrari) और बहुतों के मत से सिम्पसन (Simpson) की कल्पना है ।

प्रकार—( २ ) कल्पना करो कि

$$\text{अय}^4 + ४\text{कय}^3 + ६\text{खय}^2 + ४\text{गय} + \text{घ} = ०$$

इस चतुर्धात समीकरण का रूप

अ (य<sup>२</sup> + २पय + त) (य<sup>२</sup> + २प'य + त') यदि ऐसा है तो दोनों खण्डों को गुणने से और दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$$\text{प} + \text{प}' = २\frac{\text{क}}{\text{अ}}, \text{त} + \text{त}' + ४\text{पप}' = ६\frac{\text{ख}}{\text{अ}}, \text{पत}' + \text{प}'\text{त} = २\frac{\text{ग}}{\text{अ}}$$

$$\text{तत}' = \frac{\text{घ}}{\text{अ}} \dots \dots \dots (१)$$

अब इन चारों समीकरणों से यदि पाँचवाँ समीकरण

$p p' = \text{कि}$ , वा  $t + t' = \text{कि}$  ऐसा बन जावे तो  $p, p', t$  और  $t'$  इनके मान व्यक्त हो जायँगे।

यदि  $\text{कि} = \frac{x}{a} - p p' = \frac{1}{4} \left( t + t' - \frac{2x}{a} \right)$  ऐसा मानो तो बहुत सुभीता पड़ेगा।

(१) समीकरण से यहाँ

$$p n + p' t' = \frac{4 \text{अकल} - 2 \text{अ}^2 \text{ग} + 2 \text{क कि}}{4 \text{अ}}$$

$$\text{और } (p^2 + t^2)(p'^2 + t'^2) = (p n' - p' t)^2 + (p t + p' t')^2$$

इस सरूप समीकरण से

$$4 \text{अ}^2 \text{कि}^2 - \text{अ}^2 \text{का कि} + \text{का} = 0$$

ऐसा अपवर्तित घन समीकरण बन जायगा।

इस प्रकार से कि के मान से  $p, p'$  और  $t + t'$  व्यक्त हो जायँगे। फिर (१) समीकरण से  $p, t, p', t'$  सब व्यक्त हो जायँगे।

(१) प्रकार से जो दो वर्गसमीकरण उत्पन्न हुए हैं उनसे स्पष्ट है कि

$$\text{अ}_2 \text{अ}_3 = \frac{x + 2 \text{अ} p_1 - n a}{\text{अ}}$$

$$\text{अ}_1 \text{अ}_2 = \frac{x + 2 \text{अ} p_1 + n a}{\text{अ}}$$

$$\text{अ}_2 \text{अ}_3 + \text{अ}_1 \text{अ}_2 = 4 p_1 + \frac{2x}{\text{अ}}$$

और (२) प्रकार में वर्गसमीकरण के जो खण्ड हैं उनसे

$४पप' =$  दो दो मानों के योग का घात । इसे दो दो मानों के घात  $\frac{६ख}{अ}$  में घटा देने से

$$\begin{aligned} अ_१अ_३ + अ_२अ_४ &= \frac{६ख}{अ} - ४पप' \\ &= \frac{६ख}{अ} - \frac{४ख}{अ} + ४फि \\ &= ४फि + \frac{२ख}{अ} \end{aligned}$$

इसलिये (१) प्रकार में जो  $ष$  है वही (२) प्रकार में  $फि$  है ।

इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि  $ष$  पर से जैसा अपवर्तित घन समीकरण बनता है वैसा ही  $फि$  पर से भी बनेगा ।

$$१२४—य^२ + ६चाय^२ + ४जाय + अ^२भा - ३चा^२ = ०$$

इस चतुर्घात समीकरण का यदि

$$(य^२ + २पय + त) (य^२ - २पय + त')$$

ऐसा रूपान्तर करें तो इनके घात को दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$$त + त' - ४प^२ = ६चा, २प(त' - त) = ४जा, तत' = अ^२भा - ३चा^२$$

अर्थात्

$$त + त' = ६चा + ४प^२, त' - त = \frac{४जा}{२प}, तत' = अ^२भा - ३चा^२$$

प के रूप में पहले दो समीकरणों से

$$t = \frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२}, \quad t' = \frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२}$$

$$\therefore tt' = \left( \frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२} \right) \left( \frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२} \right) \\ = अ^२भा - ३चा^२$$

इस पर से

$$६४प^३ + १६ \times १२चाप^३ + \\ ४ (१६चा^२ - ४अ^२भा + १२चा^२)प^२ - १६जा^२ = ०$$

$$चा ४प^३ + १२चाप^३ + (१२चा^२ - अ^२भा)प^२ - जा^२ = ०$$

इसमें यदि  $अ^२फि = प^२ + च = \frac{३}{४} (त + त' - २चा)$  इसका उत्थापन दो और  $अ^३$  का भाग दे दो तो वही अपवर्तित घन समीकरण

$$४अ^३फि - अभाफि + छा = ० \text{ ऐसा हो जायगा।}$$

इस पर से भी ऊपर की युक्ति से य के मान व्यक्त हो जायेंगे। यह डिकार्टिस की कल्पना है।

$$१२५—अप^३ + ४कय^३ + ६खय^३ + ४गय + च = ०$$

इसमें यदि  $य = जर + थ$  तो समीकरण का रूप

$$अज^३र^३ + ४स_१ज^३र^३ + ६स_२ज^३र^३ + ४स_३जर + स_४ = ०$$

$$\text{जहाँ } स_१ = अथ + क, स_२ = अथ^२ + ३कथ + ख, स_३ =$$

अप^३ + ३कथ^३ + ३खथ + ग। अब यदि यह हरात्मक समीकरण हो तो ७६वें प्रक्रम से

$$अज'' = स_५, स_१ज^२ = स_३ज$$

$$\text{इन पर से } \frac{स_३}{स_१} = ज^२ \text{ और } \frac{अस_३}{स_१^२} = स_५$$

$$\therefore अस_३ - स_१^२ स_५ = ०$$

$$\text{और } ज^२ = \frac{स_३}{स_१} = \frac{अथ^२ + ३कथ^२ + ३खथ + ग}{अथ + क}$$

इस पर से ज के विरुद्ध चिन्ह के दो मान आवेंगे ।

१२६—यदि किसी न घात के समोकरण को

$$स_n = अ_० य^n + न अ_१ य^{n-१} + \frac{n(n-१)}{२!} अ_२ य^{n-२} + \dots$$

$$+ न अ_{n-१} य + अ_n \quad \cdot (१)$$

इस प्रकार से लिखे और यदि न के स्थान में  $n-१$  इसका उत्थापन दें तो पूर्व संकेत से

$$स_{n-१} = अ_० य^{n-१} + (न-१) अ_१ य^{n-२} + \dots + (न-१) अ_{n-२} य + अ_{n-१}$$

$$स_३ = अ_० य^३ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३$$

$$स_२ = अ_० य^२ + २अ_१ य + अ_२$$

$$स_१ = अ_० य + अ_१$$

$$स_० = अ_० ।$$

स\_n का प्रथमोत्पन्न फल बनाओ तो

$$न \left\{ अ_० य^{n-१} + (न-१) अ_१ य^{n-२} + \frac{(न-१)(न-२)}{२!} अ_२ य^{n-३} + \dots + अ_{n-१} \right\}$$

=  $n$  सन्-१ ऐसा होता है।

यदि (१) में  $y$  के स्थान में  $r + v$  का उत्थापन दें तो

$$सन् = आ_0 r^n + n आ_1 r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} आ_2 r^{n-2} + \dots + n आ_{n-1} r + आ_n$$

जहाँ  $f(v) = आ_n$ ,  $f'(v) = n आ_{n-1}$

और  $आ_0 = अ_0$

$$आ_1 = अ_0 v + अ_1$$

$$आ_2 = अ_0 v^2 + २अ_1 v + अ_2$$

अब यदि ऊपर के सूत्रीकरण में  $r^{n-1}$  पद का लोप करना हो तो

$$आ_1 = अ_0 v + अ_1$$

$$\therefore v = -\frac{अ_1}{अ_0}$$

इसका उत्थापन  $आ_2$ ,  $आ_3$ , ... इत्यादि में देने से

$$\begin{aligned} आ_2 &= अ_0 \left( -\frac{अ_1}{अ_0} \right)^2 + २अ_1 \left( -\frac{अ_1}{अ_0} \right) + अ_2 \\ &= \frac{अ_0 अ_2 - अ_1^2}{अ_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} आ_3 &= अ_0 \left( -\frac{अ_1}{अ_0} \right)^3 + ३अ_1 \left( -\frac{अ_1}{अ_0} \right)^2 + ३अ_2 \left( -\frac{अ_1}{अ_0} \right) + अ_3 \\ &= \frac{अ_0^2 अ_3 - ३अ_0 अ_1 अ_2 + २अ_1^3}{अ_0^2} \end{aligned}$$



इस प्रकार से आ<sub>१</sub>, आ<sub>२</sub>, आ<sub>३</sub> इत्यादि के मान लाघव से जान सकते हो ।

१२७—१२५वें प्रक्रममें अस<sub>२</sub> - स<sub>२</sub>स<sub>३</sub> = ० जो यह लिखा गया है इसमें स<sub>३</sub> और स<sub>३</sub> के मान स<sub>१</sub> और व्यक्ताङ्कों के रूप में लाकर उत्थापन देने से

$$२जास<sub>१</sub> + (अ<sup>२</sup>भा - १२चा<sup>२</sup>) स<sub>२</sub> - ६जाचास<sub>१</sub> - जा<sup>२</sup> = ० \dots (१)$$

पेसा होगा क्योंकि

$$स<sub>१</sub> = अथ + क$$

$$स<sub>२</sub> = अथ<sup>२</sup> + २कथ + ख$$

$$स<sub>३</sub> = अथ<sup>३</sup> + ३कथ<sup>२</sup> + ३खअथ + ग$$

$$\therefore अ<sup>२</sup>स<sub>३</sub> = अ<sup>२</sup>थ<sup>३</sup> + ३कअ<sup>२</sup>थ<sup>२</sup> + ३खअ<sup>२</sup>थ + अ<sup>२</sup>ग$$

$$= अ<sup>२</sup>थ<sup>३</sup> + ३कअ<sup>२</sup>थ<sup>२</sup> + ३क<sup>२</sup>अथ + क<sup>३</sup> - ३क<sup>२</sup>अथ$$

$$- क<sup>३</sup> + ३खअ<sup>२</sup>थ + अ<sup>२</sup>ग$$

$$= (अथ + क)<sup>३</sup> - ३क<sup>२</sup>अथ - ३क<sup>३</sup> + ३खअ<sup>२</sup>थ + ३खअक$$

$$+ अ<sup>२</sup>ग + २क<sup>३</sup> - ३खअक$$

$$= स<sub>१</sub><sup>३</sup> - ३क<sup>२</sup>(अथ + क) + ३खअ(अथ + क) + २क<sup>३</sup>$$

$$+ अ<sup>२</sup>ग - ३खअक$$

$$= स<sub>१</sub><sup>३</sup> + ३स<sub>१</sub>(अख - क<sup>२</sup>) + २क<sup>३</sup> + अ<sup>२</sup>ग - ३खअक$$

$$= सा<sub>१</sub><sup>३</sup> + ३चास<sub>१</sub> + जा ( १२२वां प्र० देखो ) \dots \dots (१)$$

इसी प्रकार

$$स<sub>४</sub> = अथ<sup>४</sup> + ४कथ<sup>३</sup> + ६खथ<sup>२</sup> + ४गथ + घ$$

$$\therefore अ<sup>३</sup>स<sub>४</sub> = अ<sup>३</sup>थ<sup>४</sup> + ४कअ<sup>३</sup>थ<sup>३</sup> + ६खअ<sup>३</sup>थ<sup>२</sup> + ४गअ<sup>३</sup>थ + अ<sup>३</sup>घ$$

## चतुर्धातु समीकरण

२३१-

$$= अ^५थ^५ + ४कअ^३थ^३ + ६क^२अ^२थ^२ + ४क^३अथ + क^४ \\ - ६क^२अ^२थ^२ - ४क^३अथ - क^४ + ६खअ^३थ^३ \\ + ४गअ^३थ + अ^३घ$$

$$= (अथ + क)^५ - ६क^२अ^२थ^२ - १२क^३अथ - ६क^४ \\ + ८क^३अथ + ४क^४ + ६खअ^३थ^३ + ४गअ^३थ + अ^३घ$$

$$= स^५ - ६क^२ (अ^२थ^२ + २अकथ + क^२) + ८क^३अथ \\ + ८क^४ - ३क^४ + ६खअ^३थ^३ + ४गअ^३थ + अ^३घ$$

$$= स^५ - ६क^२स^२ + ६अख(अ^२थ^२ + २अकथ + क^२) \\ - १२अ^३कखथ - ६अक^२ख + ८क^३अथ + ८क^४ \\ + ४गअ^३थ + अ^३घ$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ८क^३(अथ + क) + ४अ^२ग(अथ + क) \\ - ४अ^२कग - १२(अथ + क)अख + ६अक^२ख \\ - ३क^४ + अ^३घ$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ४(अथ + क) (३क^३ + अ^२ग \\ - ३अकख) + अ^३घ + ६अक^२ख - ४अ^२कय - ३क^४$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ४जास + अ^२(अघ - ४कय + ३ख^२) \\ - ३अ^२ख^२ + ६अक^२ख - ३क^४$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ४जास + अ^२भा \\ - ३(अ^२ख^२ - २अखक^२ + क^४)$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ४जास + अ^२भा - ३(अख - क^२)^२$$

$$= स^५ + ६चास^२ + ४जास + अ^२भा - ३च^२... (३)$$

(२) का वर्ग कर  $अ^३$  का भाग देने से  $अस_२$  का मान आवेगा उसमें (३) को  $स_२$  से गुण कर  $अ^३$  का भाग देकर घटा देने से (१) उत्पन्न हो जायगा।

(१) में यदि  $स_१ = अथ + क = \frac{३जा}{अ^३व - चा}$  इसका उत्थापन दो तो

$$४अ^३व^३ - भाअव + छा = ०$$

यह वही अपवर्तित घनसमीकरण उत्पन्न होता है जो कि १२२वें प्रक्रम का (१) समीकरण है।

इस प्रकार हरात्मक समीकरण पर से चतुर्धात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये मि. एस्. एस्. ग्रीथीड (Mr S. S. Greatheed) ने कल्पना की है (see Cambridge Math. Journal, vol. I)।

यदि चतुर्धात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से  $अ_१$ ,  $अ_२$ ,  $अ_३$ ,  $अ_४$  ये हों तो इनके रूप में  $ज$  और  $थ$  के मान इस प्रकार जान सकते हैं।

$य = जर + थ$ । इसलिये यदि  $र$  के दो मान  $र_१$ ,  $र_२$  हों तो और  $र$  के मान  $\frac{१}{र_१}$ ,  $\frac{१}{र_२}$  ये होंगे। इनका उत्थापन  $य$  के मान में देने से

$$अ_१ = जर_१ + थ$$

$$अ_२ = जर_२ + थ$$

$$अ_३ = ज \frac{१}{र_२} + थ$$

$$अ_४ = ज \frac{१}{र_१} + थ$$

इसलिये-

$$(अ_१ - थ) (अ_४ - थ) = (अ_२ - थ) (अ_३ - थ) = ज^२$$

जिससे

$$थ = \frac{अ_२ अ_३ - अ_१ अ_४}{अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४}$$

और

$$-ज^२ = \frac{(अ_३ - अ_१)(अ_२ - अ_४)(अ_१ - अ_३)(अ_३ - अ_४)}{(अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४)^२}$$

इस प्रकार चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये अनेक कल्पनायें उत्पन्न होती हैं।

१२८—इस प्रक्रम में चतुर्घात समीकरण के क्रिया समेत कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१)  $य^४ + ८य^३ - ६६य^२ - ८८य + ८० = ०$  इसमें अव्यक्त के मान निकालो।

१२३वें प्रक्रम के (१) प्रकार से

$$अ = १, क = २, ख = -११, ग = -२२, घ = ८०$$

इनका उत्थापन घनसमीकरण में देने से

$$४अ^३ = ४।$$

$$अघ = ७०, ४कग = -१७६, ३ख^२ = ३६३$$

$$\therefore अघ - ४कग + ३ख^२ = ८० + १७६ + ३६३ = ४४३ + १७६ = ६१९-$$

$$अखघ = -८८०, २कखग = ६६८, अग^२ = ४८४, घक^२ = ३२०,$$

$$ख^३ = -१३३१-$$

$$\therefore \text{अख} + २\text{कख} - \text{अग}^२ - \text{घक}^२ - \text{ख}^२ = -८८० + ६६८ \\ -४८४ - ३२० + १३३१ = ६१५$$

$$\therefore ४\text{घ}^२ = ६१६४ + ६१५ = ०$$

यहां  $\text{घ} = १$  यह निकलता है, इसलिये इसका उत्थापन  
मा<sup>२</sup> और ना<sup>२</sup> में देने से

$$\text{मा}^२ = \text{क}^२ - \text{अख} + \text{अ}^२\text{घ} = ४ + ११ + १ = १६$$

$$\text{ना}^२ = (\text{ख} + २\text{अघ})^२ - \text{अघ} = (-११ + २)^२ - ८० = १$$

यहां

$$\text{माना} = \text{कख} - \text{अग} + २\text{अकघ} = -२२ + २२ + ४ = ४$$

यह धन आता है, इसलिये मा = +४, ना = +१ वा मा = -४,  
ना = -१

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

$$\text{य}^४ + ८\text{य}^२ - ६६\text{य}^२ - ८८\text{य} + ८०$$

$$= \{ \text{अय}^२ + २(\text{क} - \text{मा})\text{य} + \text{ख} + २\text{अघ} - \text{ना} \}$$

$$\{ \text{अय}^२ + २(\text{क} + \text{मा})\text{य} + \text{ख} + २\text{अघ} + \text{ना} \}$$

$$= \{ \text{य}^२ + २(२ - ४)\text{य} - ११ + २ - १ \}$$

$$\{ \text{य}^२ + २(२ + ४)\text{य} - ११ + २ + १ \}$$

$$= (\text{य}^२ - ४\text{य} - १०) (\text{य}^२ + १२\text{य} - ८) = ०$$

इन पर से  $\text{य}^२ - ४\text{य} - १० = ०$  और  $\text{य}^२ + १२\text{य} - ८ = ०$

तब  $\text{य} = २ \pm \sqrt{१४}$ , और  $\text{य} = ६ \pm \sqrt{४४}$ ।

(२)  $\text{य}^४ - १०\text{य}^२ - २०\text{य} - १६ = ०$  इसमें अव्यक्त के मान  
बताओ।

१२४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$अ = १, क = ०, ख = -\frac{१०}{६} = -\frac{५}{३}, ग = -५, घ = -१६$$

$$चा = अख - क^२ = -\frac{५}{३}, भा = अघ - ४कग + ३ख^२ = -\frac{२६}{३}$$

$$जा = अ^२ग - ३अकख + २क^३ = -५,$$

$$अ^३छा = अ^२भाचा - जा^२ - ४चा^३ = \frac{११५}{६} - २५ + \frac{५००}{२७} = \frac{१७०}{२७}$$

इनका उत्थापन कि के घनसमीकरण में देने से

$$४अ^३ फि^३ - अभा फि + छा = ४फि^३ + \frac{२६}{३} फि + \frac{१७०}{२७} = ०$$

इसमें यदि ३फि = व तो समीकरण का रूपान्तर

$$\frac{४व^३}{२७} + \frac{२६}{६} व + \frac{१७०}{२७} = \frac{४व^३ + ६६व + १७०}{२७} = ०$$

$$\therefore ४व^३ + ६६व + १७० = ०$$

यहां परिच्छिन्न मूल की युक्ति से व का एक मान - २ आता है।

$$इस पर से फि = \frac{व}{३} = -\frac{२}{३}। और अ^२फि = प^२ + चा$$

$$\text{अर्थात् } -\frac{२}{३} = प^२ - \frac{५}{३} \therefore प^२ = १ \therefore प = १ और त = २, त' = -८$$

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

$$य^४ - १०य^२ - २०य - १६$$

$$= (य^२ + २य + २)(य^२ - २य - ८) = ०$$

इन पर से य के ४, -२, -१ +  $\sqrt{-१}$ , -१ -  $\sqrt{-१}$  ये चार मान आते हैं।

(३)  $य^४ + प_१य^३ + प_२य^२ + प_३य + प_४ = ०$  इसमें जानते हैं कि

$p_1^3 - 4p_1p_2 + 2p_3 = 0$  तो  $y$  के मान बताओ ।

ऊपर के चतुर्धात समीकरण का रूपान्तर

$$\left\{ y \left( y + \frac{p_1}{2} \right) \right\}^2 + \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right)$$

$$\left\{ y \left( y + \frac{p_3}{p_2 - \frac{p_1^2}{4}} \right) \right\} + p_4 = 0 \text{ यह हुआ।}$$

परन्तु  $p_1^3 - 4p_1p_2 + 2p_3 = 0$

$$\therefore p_3 = \frac{p_1p_2}{2} - \frac{p_1^3}{4} = \frac{p_1}{2} \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right)$$

इसका उत्थापन चतुर्धात समीकरण के रूपान्तर में देने से

$$\left\{ y \left( y + \frac{p_1}{2} \right) \right\}^2 + \left( p_2 - \frac{p_1^2}{4} \right)$$

$$\left\{ y \left( y + \frac{p_1}{2} \right) \right\} + p_4 = 0$$

इसमें यदि  $y \left( y + \frac{p_1}{2} \right) = v$  तो इसके उत्थापन से  $v$  का एक वर्ग समीकरण बन जाता है जिस पर से  $y$  के मान व्यक्त हो जायँगे ।

(४)  $y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y - 2 = 0$  इसमें  $y$  के मान निकालो ।

इसमें  $4^3 - 4 \times 4 \times 3 + 2 \times (-2) = 64 - 48 - 4 = 0$   
इसलिये

$$y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y - 2 = \{y(y+2)\}^2 - \{y(y+2)\} - 2 = 0$$

अब इसमें यदि  $y(y+2)=v$  तो

$$v^2 - v - 4 = 0 \quad \therefore v = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

और  $y^2 + 2y = v$

$$\therefore y = -1 \pm \sqrt{v+1}$$

(५)  $y^4 - 4y^2 + 4y + 4\sqrt{p} = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

यहाँ समीकरण का रूपान्तर

$$y^2(y^2 - 4) + 4(y + \sqrt{p})$$

$$= y^2(y + \sqrt{p})(y - \sqrt{p}) + 4(y + \sqrt{p})$$

$$= (y + \sqrt{p})\{y^2(y - \sqrt{p}) + 4\} = 0 \text{ ऐसा हो जाता है।}$$

इस पर से  $y$  का एक मान  $-\sqrt{p}$  और और मान घन समीकरण रूप दूसरे खण्ड से आ जायेंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१।  $y^4 - 6y^3 + 3y^2 + 22y - 6 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

यहाँ कि  $= -\frac{3}{2}$  और समीकरण का रूपान्तर

$(y^2 - 4y + 1)(y^2 - 2y - 6) = 0$  (१२३वें प्र० का (२) प्रकार देखो)।

२। फि  $(y) = y^4 - 2y^3 - 12y^2 + 60y + 63 = 0$  इसमें  $y$  के मान निकालो।

(१२३वें प्रक्रम के (२) प्रकार से) यहाँ

$4\text{फि}^2 - 12\text{फि} - 404 = 0$  इस पर से फि का एक मान  $= -4$



और तब  $f(y) = (y^2 - 2y - 3)(y^2 - 6y - 21)$

३।  $f(y) = y^4 - 16y^2 - 20y - 6 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

(१२३वें प्र० के (२) प्रकार से)

$$४\text{फि}^३ - \frac{२१७}{१२}\text{फि} + \frac{३१८५}{२१६} = 0 \text{ इसमें यदि } ६\tau = \text{फि तो}$$

$$४\tau^३ - ६५१\tau + ३१८५ = 0 \text{ इसमें } \tau \text{ का एक मान} = ७$$

इसलिये  $\text{फि} = \frac{४२}{३}$  और तब

$$f(y) = (y^2 + ४y + २)(y^2 - ४y - ३)$$

४।  $f(y) = y^4 - ६y^३ - ६y^२ + ६६y - २२ = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

अपवर्तित घनसमीकरण

$$४\text{फि}^३ - \frac{३३५}{४}\text{फि} - \frac{८६७}{८} = 0 \text{ ऐसा होता है}$$

इस पर से  $\text{फि} = -\frac{३}{४}$  तब

$$f(y) = (y^2 - ११)(y^2 - ६y + २)$$

५।  $f(y) = y^4 - ८y^३ + २१y^२ - २६y + १४ = 0$  इसके मूल निकालो।

$$\text{यहाँ } f(y) = (y^2 - २y + २)(y^2 - ६y + ७)$$

६।  $y^४ + १२y + ३ = f(y) = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

$$\text{यहाँ } f(y) = (y^2 - y\sqrt{६} + ३ + \sqrt{६})(y^2 + y\sqrt{६} + ३ - \sqrt{६})$$

७।  $f(y) = y^4 - ८y^३ - १२y^२ + ८४y - ६३ = 0$  इसके मूल निकालो।

$$\text{यहां फ (य) = } \{y^3 - 2y(2 + \sqrt{7}) + 3\sqrt{7}\} \\ \{y^3 - 2y(2 - \sqrt{7}) - 3\sqrt{7}\}$$

८।  $y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 44y - 24 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

९।  $y^4 - 6y^3 - 2y - 3 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ।

१०। नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल बताओ:—

$$(क) y^4 - 12y^3 + 45y^2 - 62y + 40 = 0$$

$$(ख) y^4 - 2अय^3 + (अ^2 - २क^२)y^2 \times २अक^२y \\ - अ^२क^२ = 0 \quad (१२८वें प्र० का (३) उदाहरण देखो)$$

११।  $y^4 + त_१y^3 + त_२y^2 + त_३y + त_४ = 0$  इसमें यदि

$त_१^२ - त_२^२ - त_४ = 0$  तो सिद्ध करो कि दिए हुए चतुर्घात समीकरण के गुण्य गुणक रूप दो वर्गसमीकरण के खण्ड होंगे।

चतुर्घात समीकरण में दो राशिओं के वर्गान्तर में

$$\left(y^2 + \frac{प_१}{२}y + \sqrt{त_४}\right)^2 \\ - \left\{y\left(\frac{प_१}{४} + २\sqrt{त_४} - प_२}\right)\right\}^2 \text{ ऐसा होगा।}$$

१२।  $y^4 + त_१y^3 + त_२y^2 + त_३y + त_४ = 0$  इसमें यदि अव्यक्त के दो मान  $\pm क\sqrt{-१}$  ये हों तो सिद्ध करो कि

$$६४अ^६ + ३२त_२अ^४ + (४त_२^२ - १६त_४)अ^२ - त_२^२ = 0$$

$$\text{और } क^२ = अ^२ + \frac{त_२}{२} + \frac{त_३}{४अ}$$

## १२—समीकरण के मूलों का पृथक्करण ।

१२६—पिछले अध्यायों में समीकरण के मूलों के विषय में और धन और चतुर्घात समीकरण के मूल जानने के विषय में अनेक सिद्धान्त लिख आये हैं; अब आगे समीकरणों में स्वल्पान्तर से अव्यक्त के आसन्न मान जानने के लिये अनेक युक्तियाँ लिखी जायँगी । उनके लिये पहले यह विचार करते हैं कि दो निर्दिष्ट संख्याओं के भीतर किसी दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के कितने संभाव्य मान पड़े हैं ।

१३०—फ (य) इसमें यदि  $y = g$  ऐसा मानने से  $f(g) = 0$  हो तो १२वें प्रक्रम से  $f(y) = 0$  इस समीकरण में अव्यक्त का एक मान  $g$  होगा । अब यदि  $ch$  एक ऐसी छोटी धन संभाव्य संख्या मानी जाय कि  $g - ch$  और  $g + ch$  इन दो संख्याओं के भीतर  $g$  को छोड़ अव्यक्त का कोई और दूसरा मान न पड़ा हो तो १६वें प्रक्रम से  $f(g - ch)$  और  $f(g + ch)$  ये दोनों विरुद्ध चिन्ह के होंगे और इनके बीच अव्यक्त का एक ही मान  $g$  होगा । परन्तु ११वें प्रक्रम से

$f(g - ch)$

$$= f(g) - f'(g)ch + f''(g)\frac{ch^2}{1.2} - f'''(g)\frac{ch^3}{3!} + \dots$$

$$= -f'(g)ch + f''(g)\frac{ch^2}{1.2} - f'''(g)\frac{ch^3}{3!} + \dots$$

और  $f(g + ch)$

$$= f(g) + f'(g)ch + f''(g)\frac{ch^2}{1.2} + f'''(g)\frac{ch^3}{3!} + \dots$$

$$= f'(g) \cdot \chi + f''(g) \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + f'''(g) \frac{\chi^3}{3 \cdot 1} +$$

अब १३वें प्रक्रम से  $\chi$  का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश  $f'(g)$   $\chi$  यह और पदों के योग से चाहे जितना बड़ा हो, इसलिये  $f(g - \chi)$  यह  $-f'(g) \chi$  इस चिन्ह का, और  $f(g + \chi)$  यह  $f'(g) \chi$  इस चिन्ह का होगा। परन्तु दोनों में  $\chi$  एक ही है इसलिये  $g$  के जिस मान में  $f(y)$  यह शून्य के तुल्य होगा उससे अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में  $f(y)$  और  $f'(y)$  ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे और उससे अव्यवहितोत्तर  $y$  के मान में  $f(y)$  और  $f'(y)$  एक चिन्ह के होंगे।

१३१—कल्पना करो कि  $n$  घात का एक फल  $f_n(y)$  है और इसका प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि फल क्रम से  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(y)$  इत्यादि है (१०वां प्रक्रम देखो) इनमें  $y$  के स्थान में  $x$  को रख देने से जो

$$f_n(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$$

श्रेणी होती है। इसमें जितनी व्यत्यास संख्या होती है उसमें  $y$  के स्थान में  $k$  को रख देने से

$$f_n(k), f_1(k), f_2(k), f_3(k), \dots, f_n(k)$$

इस श्रेणी की व्यत्यास संख्या घटा देने से जो शेष बचे उससे अधिक  $f_n(y) = 0$  इसमें  $x$  और  $k$  के बीच में अव्यक्त के मान नहीं हो सकते, उसके तुल्य वा उसमें कोई कम संख्या घटा देने से जो शेष बचे उसके तुल्य अव्यक्त के मान होंगे।

$$f(y), f_1(y), \dots, f_n(y)$$

इस श्रेढी में  $y$  के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देने से किसी पद का चिन्ह नहीं बदल सकता जब तक कि  $y$  का एक मान उस पद को शून्य करने से उत्पन्न हुए समीकरण में अव्यक्त के एक मान के तुल्य होकर आगे न बढ़ेगा । ( १६वां प्रक्रम देखो )

$f(y), f_1(y), f_2(y), \dots f_n(y)$  इस श्रेढी में चार स्थिति होगी ।

१—कल्पना करो कि जब  $y=g$  तो  $f(y)=0$  और  $f_1(y)$  यह शून्य के तुल्य नहीं होता । तब १३०वें प्रक्रम से  $g$  के अव्यवहित पूर्व  $f(y)$  और  $f_1(y)$  विरुद्ध चिन्ह के और  $g$  के अव्यवहितोत्तर  $f(y)$  और  $f_1(y)$  एकचिन्ह के होंगे । इसलिये  $y$  बढ़ते बढ़ते जब  $g$  से [ जो  $f(y)=0$  इसमें बार बार न आने वाला अव्यक्त का एक मान है ] पार पहुँचेगा तब श्रेढी में एक व्यत्यास की संख्या कम हो जायगी ।

२—कल्पना करो कि  $g$  यह  $f(y)=0$  इसमें वह अव्यक्त मान है जो  $t$  बार आता है तब ५५वें प्रक्रम की युक्ति से  $y$  के स्थान में  $g$  का उत्थापन देने से

$f(y), f_1(y), f_2(y) \dots f_{t-1}(y)$  ये सब शून्य के तुल्य होंगे, इसलिये  $g$  से अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में  $f(y), f_1(y), \dots f_{t-1}(y), f_t(y)$  ये पास पास के दो विरुद्ध चिन्ह के होंगे ( देखो १३०वां प्रक्रम ) । इसलिये इस स्थिति में  $t$  व्यत्यास होंगे और  $g$  से अव्यवहितोत्तर  $y$  के मान में  $f(y), f_1(y), \dots f_{t-1}(y), f_t(y)$  ये सब एक चिन्ह के होंगे । इसलिये पहली व्यत्यास संख्या से दूसरी व्यत्यास संख्या  $t$  तुल्य कम होगी ।

३—कल्पना करो कि  $y=g$  तो एक कोई उत्पन्न फल  $f_t(y)$  यह शून्य के तुल्य होता है और  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+1}(y)$  ये शून्य के तुल्य नहीं होते। तब यदि  $f_{t-1}(g)$  और  $f_{t+1}(g)$  ये एक ही चिन्ह के हों तो १३०वें प्रक्रम से  $g$  से अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में  $f_t(y)$  यह  $f_{t-1}(y)$  इससे अथवा  $f_{t+1}(y)$  इससे विरुद्ध चिन्ह का होने से  $f_{t-1}(y)$ ,  $f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$  इसमें दो व्यत्यास और  $g$  से अव्यवहितोत्तर  $y$  के मान में  $f_{t-1}(y)$  इससे अथवा  $f_{t+1}(y)$  इससे  $f_t(y)$  यह विरुद्ध चिन्ह का न होने से  $f_{t-1}(y)$ ,  $f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$  इसमें एक भी व्यत्यास न होगा, इसलिये पहले की अपेक्षा इसमें दो व्यत्यासों की कमी हुई और यदि  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+1}(y)$  ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो  $g$  से अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में  $f_{t-1}(y)$ ,  $f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$  इसमें एक व्यत्यास और  $g$  से अव्यवहितोत्तर  $y$  के मान में भी  $f_{t-1}(y)$ ,  $f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$  इसमें एक ही व्यत्यास के होने से इसमें कोई व्यत्यास की हानि न हुई।

४—कल्पना करो कि  $y=g$  तब  $m$  उत्पन्न फल

$f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$ ,  $f_{t+2}(y)$ , ...,  $f_{t+m-1}(y)$ ,  $f_{t+m}(y)$   
इनमें

पहिले—यदि  $m$  सम संख्या और  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+m}(y)$  ये एक ही चिन्ह के हों तो  $g$  के अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में ऊपर के पदों में  $m$  व्यत्यास और  $g$  से अव्यवहितोत्तर  $y$  के मान में एक भी व्यत्यास न होगा और यदि  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+m}(y)$  ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ऊपर के पदों में  $g$  से अव्यवहित पूर्व  $y$  के मान में  $m+1$  व्यत्यास

होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में उन पदों में पहिले की अपेक्षा म व्यत्यासों की हानि हुई ।

**दूसरे**—यदि म विषम संख्या और  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+m}(y)$  ये एक ही चिन्ह के हों तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में  $m+1$  व्यत्यास होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा और यदि  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+m}(y)$  ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा, इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में क्रम से  $m+1$  और  $m-1$  व्यत्यासों की हानि हुई । अर्थात् सम संख्या तुल्य व्यत्यासों की हानि हुई ।

इसलिये  $f(y), f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)$  इस श्रेणी में य के स्थान में अ के रखने से जितने व्यत्यास होंगे उनमें अ के आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार जब य चलेगा तब एक एक व्यत्यास की हानि होती जायगी अथवा अ से आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार सम संख्या + १ इतने व्यत्यासों की हानि होगी । इस प्रकार से ऊपर कहा हुआ सिद्धान्त उत्पन्न होता है । अङ्गरेज विद्वानों के मत से इस सिद्धान्त का प्रकाशक फोरिअर (Fourier) और फरासीस के विद्वानों के मत से इसका प्रकाशक बुडन (Budan) है ।

बुडन ने इस सिद्धान्त को इस तरह से लिखा है:-

कल्पना करो कि  $f(y) = 0$  इस समीकरण पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाया जिसमें अव्यक्त मान  $f(y) = 0$

इसमें के अव्यक्त मान से अ तुल्य न्यून हों और दूसरा ऐसा समीकरण बनाया जिसमें अव्यक्त मान  $f(y) = 0$  इसमें के अव्यक्त मान से क तुल्य न्यून हों (३७वां प्र० देखो) तो पहिले नये समीकरण में जितने व्यत्यास होंगे उसमें दूसरे नये समीकरण के व्यत्यासों को घटा देने से जो शेष बचेगा उससे अधिक अ और क के बीच  $f(g) = 0$  इसके अव्यक्त मान न होंगे। जहां अ से क को बड़ा माना गया है।

३७वें प्रक्रम से दोनो नये समीकरण क्रम से

$$f(a) + f_1(a)r + f_2(a) \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \dots + f_n(a) \frac{r^n}{n!} = 0$$

$$f(k) + f_1(k)r + f_2(k) \frac{r^2}{1 \cdot 2} + \dots + f_n(k) \frac{r^n}{n!} = 0$$

ऐसे हागे और जिनमें वे ही व्यत्यास होंगे जो कि

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)$$

$$f(k), f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$$

इनमें है। इसलिये बुडन के सिद्धान्त और फोरिअर के सिद्धान्त में कुछ भी भेद नहीं केवल वाक्यों में भेद है।

इस सिद्धान्त की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं:—

(१) नीचे के समीकरण में अव्यक्त के मानों की स्थिति जानना चाहिए:—

$$f(y) = y^5 - 3y^4 - 24y^3 + 44y^2 - 46y - 101 = 0$$

$$\text{इसमें } f_1(y) = 5y^4 - 12y^3 - 72y^2 + 88y - 46$$



$$फ_2(y) = 20y^3 - 36y^2 - 144y + 160$$

$$फ_3(y) = 60y^2 - 72y - 144$$

$$फ_4(y) = 120y - 72$$

$$फ_5(y) = 120$$

इनमें  $y$  के स्थान में  $-10, -1, 0, 1, 10$  के उत्थापन से और नीचे के क्रम से केवल  $फ, फ_1, फ_2$  इत्यादि लिखने से

$फ, फ_1, फ_2, फ_3, फ_4, फ_5$

$(-10) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$

$(-1) \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad +$

$(0) \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad -$  (जैसा समीकरण है)

$(1) \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad -$

$(10) \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

इनसे ये बातें पाई जाती हैं:—

$-10$  और  $-1$  के भीतर एक संभाव्य मान है क्योंकि दोनों के व्यत्यासों का अन्तर एक है;

$-1$  और  $0$  के भीतर भी एक संभाव्य मान है क्योंकि एक व्यत्यास की हानि है;  $0$  और  $1$  के बीच कोई संभाव्य मान नहीं है क्योंकि एक भी व्यत्यास की हानि नहीं है।  $1$  और  $10$  के बीच कम से कम एक संभाव्य मान है क्योंकि तीन व्यत्यासों की हानि है। यहां फोरिअर और बुडन दोनों के सिद्धान्त से यह पता नहीं लगता कि  $1$  और  $10$  के भीतर जो और दो मान हैं वे संभाव्य वा असंभाव्य हैं। इसलिये  $1$  और  $10$  के भीतर और और संख्याओं को  $y$  के स्थान में रख कर फिर एक व्यत्यास की हानि पर से संभाव्य मानों का पता

लगाना चाहिए। परन्तु इस कर्म में बड़ा प्रयास करना पड़ेगा और जहां वे दोनों मान बहुत पास पास होंगे तहां तो य के छोटे छोटे अनेक मान मानने से बहुत ही बड़ा प्रयास करना पड़ेगा।

यदि किसी युक्ति से यह पता लगा जाय कि य के दो निर्दिष्ट मानों के भीतर अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नहीं है तो व्यत्यासों की दो दो हानि से असंभाव्य मान का पता लग सकता है। जैसे

$$(२) फ_१(y) = y^2 - ४y^2 - १y + २३ = ०$$

इसमें य के स्थान में ०, १, १० का उत्थापन देने से

	$फ_१$	$फ_२$	$फ_३$	$फ_४$	$फ_५$
(०)	+	-	०	-	+
(१)	+	०	-	-	+
(१०)	+	+	+	+	+

यहां पहले यह पता लगाना चाहिए कि  $y = ०$  में  $फ_३ = ०$  और  $y = १$  में  $फ_३ = ०$  इन दोनों शून्यों में कौन चिन्ह सम-भना चाहिए। इसके लिये ० और १ के पूर्व और अनन्तर य के स्थान में बहुत ही छोटी संख्या च का उत्थापन देने से

	$फ_१$	$फ_२$	$फ_३$	$फ_४$	$फ_५$
(०) {	-च	+	-	+	-
	+च	+	-	-	+
(१) {	१-च	+	-	-	+
	१+च	+	+	-	+
(१०)	+	+	+	+	+

इस उपाय से पता लग जाता है कि जब  $y=0$  होने से  $\phi_2 = 0$  होता है तो  $y$  के  $-च$  मान में  $\phi_3$  से विरुद्ध चिन्ह का  $\phi_2$  होगा और जब  $y=+च$  तो  $\phi_3$  और  $\phi_2$  दोनों एक ही चिन्ह के होंगे। इसी प्रकार  $y$  के  $१-च$  और  $१+च$  मान में भी  $\phi_3$  का पता लगा सकते हो।

$y$  के स्थान में  $-च$  और  $+च$  के रखने से दो व्यत्यासों की हानि हुई और  $च$  को ऐसा छोटा माना है कि इसके भीतर  $y$  का कोई संभाव्य मान नहीं है तो कहेंगे कि अव्यक्त का एक जोड़ा असंभव मान होगा।

$१+च$  और  $१०$  के भीतर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं वा एक जोड़ा असंभव मान है। यहाँ पर फिर भी संशय ही रहा कि वास्तव में मान संभाव्य वा असंभाव्य है।

(३) यदि अनेक पदों के गुणक समीकरण में शून्य हों तो नीचे लिखी हुई युक्ति से असंभव मानों का पता लग सकता है। जैसे

$$y^5 - १ = 0$$

इसमें जानना है कि  $y$  के कितने असंभव मान हैं तो

$$\phi(y) = y^5 - १$$

$$\phi_1(y) = ६y^4$$

$$\phi_2(y) = ३०y^3$$

$$\phi_3(y) = १२०y^2$$

$$\phi_4(y) = ३६०y$$

$$\phi_5(y) = ७२०$$

$$\phi_6(y) = ७२०$$

य के स्थान में -च और +च का उत्थापन देने से और = को बहुत ही छोटा मानने से

	फ <sub>०</sub>	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>	फ <sub>४</sub>	फ <sub>५</sub>	फ <sub>६</sub>
(-च) +	+	-	+	-	+	-	-
(+च) +	+	+	+	+	+	+	-

यहां चार व्यत्यासों की हानि है और जानते हैं कि च ऐसा छोटा है कि -च और +च के बीच में कोई संभाव्य मान नहीं है इसलिये चार व्यत्यास के होने से इसमें चार असंभाव्य मान हुए और २२वें प्रक्रम से दो संभाव्य मान होंगे।

इस प्रकार से किसी द्वियुक्पद समीकरण में असंभाव्य और संभाव्य मानों की संख्या जान सकते हैं।

(४)  $\text{फ}(y) = y^7 + 10y^3 + y - 4 = 0$  इसके संभाव्य और असंभाव्य मूलों की संख्या जाननी है।

$$\text{यहाँ } \text{फ}(y) = y^7 + 10y^3 + y - 4 = 0$$

$$\text{फ}_1(y) = 7y^6 + 30y^2 + 1$$

$$\text{फ}_2(y) = 42y^5 + 60y$$

$$\text{फ}_3(y) = 336y^4 + 60$$

$$\text{फ}_4(y) = 1680y^3$$

$$\text{फ}_5(y) = 6720y^2$$

$$\text{फ}_6(y) = 20160y$$

$$\text{फ}_7(y) = 40320$$

$$\text{फ}_8(y) = 40320$$

यहां  $y$  के स्थान में  $-च, ०, +च$  के उत्थापन से

	फ <sub>-</sub>	फ <sub>०</sub>	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>	फ <sub>४</sub>	फ <sub>५</sub>	फ <sub>६</sub>	फ <sub>७</sub>
(-च)	+	-	+	-	+	+	-	+	-
(०)	+	०	०	०	०	+	०	+	-
(+च)	+	+	+	+	+	+	+	+	-

यहां  $-च$  और  $+च$  के बीच में ६ व्यत्यासों की हानि हुई और  $च$  को बहुत छोटा मानने से  $-च$  और  $+च$  इनके बीच में कोई संभाव्य मूल नहीं है इसलिये यहां ६ असंभव मूल होंगे और २२वें प्रक्रम से दो संभव मूल होंगे जिनमें एक धन और दूसरा ऋण होगा ।

( ५ )  $y^5 - ३y^2 - y + १ = ०$  इसके मूलों का पूरा पूरा पता लगाना है ।

$$\text{यहां } फ(y) = y^5 - ३y^2 - y + १$$

$$फ_१(y) = ६y^4 - ६y - १$$

$$फ_२(y) = ३०y^3 - ६$$

$$फ_३(y) = १२०y^2$$

$$फ_४(y) = ३६०y$$

$$फ_५(y) = ७२०$$

$$फ_६(y) = ७२०$$

$y$  के स्थान में  $-१, ०, १, २$  का उत्थापन देने से

फ<sub>१</sub> फ<sub>२</sub> फ<sub>३</sub> फ<sub>४</sub> फ<sub>५</sub> फ<sub>६</sub> फ<sub>७</sub>

(-१)	+	-	+	-	+	०	०	[(-१) य का
(०)	+	०	०	०	-	-	+	एक मान हुआ]
(१)	+	+	+	+	+	-	-	
(२)	+	+	+	+	+	+	+	
(०) {	-च	+	-	+	-	-	+	
	+च	+	+	+	+	-	-	+
(-१) {	-१-च	+	-	+	-	+	-	+
	-१+च	+	-	+	-	+	-	-

-१ इसके उत्थापन से फ<sub>५</sub> (य) = ० इसलिये -१ यह य का एक मान हुआ। च के अत्यन्त छोटे होने से शून्य के आगे पीछे -च और +च इनके बीच संभाव्य मान नहीं है परन्तु दो व्यत्यासों की हानि है इसलिये य के दो असंभाव्य मान हैं।

+च और १ के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये +च वा शून्य और १ के बीच य का एक संभाव्य मान और है।

-१+च और -च के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये -१+च और -च के बीच में वा -१ और शून्य के बीच में य का एक संभाव्य ऋण मान और है।

१ और २ के बीच में भी एक व्यत्यास की हानि है इसलिये १ और दो के बीच में य का एक धन संभाव्य मान हुआ।

ऐस प्रकार से चार संभाव्य और दो असंभाव्य मूल फ<sub>५</sub> (य) = ० इसके आए। इस प्रकार प्रति समीकरणों में य के स्थान में ऐसी दो संख्याओं का उत्थापन देना चाहिए जिसमें

एक ही व्यत्यास की हानि हो तब निःसंशय उन दोनों संख्याओं के बीच  $y$  का एक मान रहेगा। यदि एक से अधिक व्यत्यासों की हानि होगी तो निःसंशय यह नहीं कह सकते कि उन दोनों संख्याओं के बीच अव्यक्त का एक ही अथवा अधिक मान है। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के बीच जानते हैं कि अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नहीं है उनमें व्यत्यासों की हानि से असंभाव्य मानों का भी पता लगा सकते हो।

१३२— $f(y)$ ,  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ ,  $\dots \dots f_n(y)$  इस श्रेणी में यदि  $y$  के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि  $p_1, p_2, p_3, \dots \dots p_n$  ये ही जो  $f(y)$  में क्रम से द्वितीय, तृतीय इत्यादि पदों के गुणक हैं होंगे जहां  $f(y)$  में  $y$  के सब से बड़े घात का गुणक धन रूप तुल्य है और उसी श्रेणी में यदि  $y$  के स्थान में  $+\infty$  का उत्थापन दो तो १३वें प्रक्रम से सब पद धन होंगे। इसलिये  $p_1, p_2, p_3, \dots \dots p_n$  इसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी इसलिये फोरिअर के सिद्धान्त से  $f(y) = 0$  इसमें उन व्यत्यासों की संख्या से अधिक ० और  $+\infty$  के बीच अव्यक्त के धन संभाव्य मान नहीं हो सकते। यही बात डिकार्टिस की चिन्ह रीति से भी सिद्ध होती है (४४वां प्र० देखो)। इसलिये कह सकते हो कि फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही डिकार्टिस की चिन्ह रीति है।

१३३—फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त से सहज में सर्वत्र पूरा पूरा समीकरण के संभाव्य मूलों का पता नहीं लगता जैसा कि १३१वें प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट है इसलिये अब

स्टर्म (Sturm) साहब का एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जिसके बल से निःसंशय संभाव्य मूल इत्यादि का पता लग जाता है।

१३४— $f(y)$  का प्रथमोत्पन्न फल  $f_1(y)$  मान लो और कल्पना करो कि  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त का कोई समान मान नहीं है। इसलिये पूर्व प्रक्रम से  $f(y)$  और  $f_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक कोई न होगा। इसलिये वीजगणित की युक्ति से यदि  $f(y)$  और  $f_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन निकाला जाय तो क्रिया करने से अन्त में व्यक्ताङ्क शेष बचेगा।

$f(y)$  और  $f_1(y)$  में अव्यक्त के एकापचित घात क्रम से पदों को रख लो। जो पद न हों उनमें शून्य गुणक लगा कर १ प्रक्रम की युक्ति से पूरा कर लो।

$f(y)$  में जो सब से बड़ा  $y$  का न घात है उससे एक कम अर्थात्  $n-1$  यह  $y$  का सब से बड़ा घात  $f_1(y)$  में होगा।

$f(y)$  को भाज्य,  $f_1(y)$  को हर मान कर महत्तमापवर्त्तन निकालने की युक्ति से लब्धि और शेष को निकालो। शेष के धन, ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर फिर इसे हार और पहिले हार को भाज्य मान कर भाग देकर दूसरा शेष निकालो फिर धन ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर इस शेष को हार मानो और पहिले हार को भाज्य, यों धन ऋण का व्यत्यय कर प्रति शेष को हार मान और उसके पहिले हार को भाज्य मान कर क्रिया करते जाओ जब अन्त में व्यक्ताङ्क शेष हो तब छोड़ दो। इस अन्तिम व्यक्ताङ्क शेष के भी चिन्ह का व्यत्यय कर अन्तिम शेष समझो।



महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से इनसे नीचे लिखे हुए समी-  
ण बनते हैं:—

$$\left. \begin{aligned} \text{गु. फ. (य)} &= \text{ल. फ. (य)} - \text{म. फ. (य)} \\ \text{गु. फ. (य)} &= \text{ल. फ. (य)} - \text{म. फ. (य)} \\ \dots\dots\dots \\ \text{गु. फ. (य)} &= \text{ल. फ. (य)} - \text{म. फ. (य)} \\ \dots\dots\dots \\ \text{गु. फ. (य)} &= \text{ल. फ. (य)} - \text{म. फ. (य)} \end{aligned} \right\} \cdot (१)$$

जहाँ गु, गु<sub>१</sub>, गु<sub>२</sub>..... गु<sub>n-२</sub>, म<sub>१</sub>, म<sub>२</sub>,... म<sub>t+१</sub> ये धनात्मक व्यक्त संख्या हैं और ल<sub>१</sub>, ल<sub>२</sub>, ल<sub>३</sub>... ल<sub>n-१</sub> ये य के एक घात के खण्ड आ-य + का इस रूप के हैं।

( १ ) समीकरण से स्पष्ट है कि  $y$  के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु  $y$  के पास पास के दो फल एक ही काल में शून्य के तुल्य नहीं हो सकते क्योंकि ऐसा मानने से आगे सब शून्य होते होते फल (य) जो व्यक्ताङ्क और  $y$  से स्वतन्त्र है शून्य के समान होगा जो कि असंभव है ।

य के स्थान में किसी ग संख्या के उत्थापन से यदि  $f_t(y) = 0$  तो  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+1}(y)$  ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के स्थान में  $g - c$  और  $g + c$  के उत्थापन से (जहां  $c$  ऐसा छोटा है कि  $g - c$  और  $g + c$  के बीच बीच  $f_{t-1}(y) = 0$  और  $f_{t+1}(y) = 0$  इसके कोई मूल नहीं है)  $f_{t+1}(y)$  और  $f_{t-1}(y)$  अपने अपने चिन्ह को नहीं बदल सकते। इसलिये  $f_{t-1}(y)$  और  $f_{t+1}(y)$  यदि  $g$  से अव्यव-

हित पूर्व और उत्तर  $y$  के मान में  $+$  और  $-$  चिन्ह के होंगे तो  $f_t(y)$  यह चाहे पूर्व में  $+$  और उत्तर में  $-$  वा पूर्व में  $-$ , उत्तर में  $+$  हो,  $f_{t-1}(y)$ ,  $f_t(y)$ ,  $f_{t+1}(y)$  इन तीनों पदों के आगे पीछे व्यत्यास की संख्या न घटेगी, न बढ़ेगी, क्योंकि ल्यों रहेगी।

यदि  $y = g$  और  $f_t(y) = 0$  तो  $g$  से अव्यवहित पूर्व और उत्तर  $y$  के मान में  $f_t(y)$  और  $f_{t+1}(y)$  क्रम से भिन्न चिन्ह और एक चिन्ह के होंगे। (१३० वां प्र०) इसलिये  $y$  के स्थान में अधिक अधिक संख्या का उत्थापन देने से जब  $y$  के एक मान से आगे संख्या चलेगी तब

$$f_t(y), f_{t+1}(y), f_{t+2}(y), \dots, f_{t+n}(y)$$

इस श्रेणी में एक व्यत्यास की हानि होगी। इस प्रकार  $y$  के प्रति एक एक मान में एक एक व्यत्यास की हानि होती चली जायगी। इसलिये  $y$  के स्थान से  $z$  का उत्थापन देने से जो

$$f_t(z), f_{t+1}(z), f_{t+2}(z), \dots, f_{t+n}(z)$$

इस श्रेणी में व्यत्यास संख्या होगी और  $y$  के स्थान में  $z$  से अधिक  $k$  का उत्थापन देने से जो

$$f_t(k), f_{t+1}(k), f_{t+2}(k), \dots, f_{t+n}(k)$$

इस श्रेणी में व्यत्यास संख्या होगी वह पहिली व्यत्यास संख्या से जितनी न्यून होगी अर्थात् इस पिछली श्रेणी में जितनी व्यत्यास हानि होगी उतने ही  $z$  और  $k$  के बीच  $f_t(y) = 0$  इससे संभाव्य मूल होंगे।

१३५—व्यत्यास की संख्या के गणना करने में  $y$  के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ , ... .. इत्यादि में कोई शून्य हो जाय तो उसके पूर्व धन वा ऋण चिन्ह लगा देने से कोई भेद न पड़ेगा क्योंकि जो फल शून्य होगा उसके पूर्व और आगे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये शून्य के साथ चाहे धन वा ऋण चिन्ह हो व्यत्यास की संख्या में भेद नहीं पड़ेगा।

१३६—ऊपर सिद्ध हो चुका है कि  $y$  के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु पास के दो फल एक ही काल में शून्य नहीं हो सकते। इसलिये  $y$  के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि पास के दो छोड़ अन्य फल शून्य के तुल्य हों तो उनमें यदि  $f(y) = 0$  तो स्पष्ट ही है कि वह सच्चा  $f(y) = 0$  इसका एक मूल ही है। इसलिये इसके आगे  $f(y)$ ,  $f_1(y)$ , ...  $f_n(y)$  इस श्रेणी में एक व्यत्यास की हानि होगी। और यदि  $f(y)$  को छोड़ और फल शून्य होंगे तो ऊपर की युक्ति से उनके आगे और पीछे के फलों में विरुद्ध चिन्ह होने से व्यत्यास की संख्या में कुछ भेद ही न पड़ेगा।

१३७—यदि  $f(y)$ ,  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ , ...  $f_n(y)$  इनमें प्रथम पद के गुणक सब धन वा सब ऋण हों तो  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे।

१३४वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि  $f(y) = 0$  यह यदि न घात का समीकरण होगा तो स्टर्म के फल भी  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ ...

ये न होंगे।  $f(y) = 0$  इसमें सर्वदा समझो कि  $y$  के सब से बड़े घात का गुणक धन संख्या है।

यदि  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के समग्र संभाव्य मान कितने हैं यह जानना हो तो स्पष्ट है कि  $y$  के स्थान में पहले  $-\infty$  इसका उत्थापन देने से स्टेर्म की रीति से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे और  $+\infty$  इसका उत्थापन देने से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे उनके अन्तर तुल्य अर्थात्  $y$  के स्थान में  $+\infty$  इसका उत्थापन देने से जितने व्यत्यास की हानि होगी उतने ही  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान होंगे। इसलिये यदि स्टेर्म के सब फलों के आदि पद के गुणक धन वा सब ऋण आवें तो  $-\infty$  इसके उत्थापन से श्रेणी में एक धन एक ऋण वा एक ऋण एक धन इस क्रम से पदों के होने से न व्यत्यास होंगे और  $+\infty$  इसके उत्थापन से एक भी व्यत्यास न होने से न व्यत्यासों की हानि होगी। इसलिये  $f(y) = 0$  इस न घात समीकरण में अव्यक्त के न संभाव्य मान अर्थात् सब मान संभाव्य होंगे।

१३८—यदि  $f(y), f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)$  इस श्रेणी में प्रत्येक फल के प्रथम पद के गुणक सब धन न हों तो उनको धन ऋण के क्रम से लिखने से जितने व्यत्यास होंगे उतने जोड़े  $f(y) = 0$  इसके मूल असंभाव्य होंगे।

कल्पना करो कि  $f(y), f_1(y), f_2(y) \dots f_n(y)$  इनके आदि पद को लेने से न व्यत्यास हुए तो स्पष्ट है कि उनकी संख्या  $n+1$  होने से  $n-1$  इतने सर होंगे। इसलिये

य के स्थान में + इसके उत्थापन से म व्यत्यास और  $n-m$  सर होंगे (४३वां प्र० देखो)। इसलिये  $+ \infty$  इसके उत्थापन में व्यत्यासों की हानि  $n-m-m=n-2m$  इतनी होने से अव्यक्त के संभाव्य मान  $n-2m$  और असंभव मान  $n-(n-2m)=2m$  होंगे, इसलिये  $f(y)=0$  इसके म जोड़े असंभव मूल हुए।

१३६—यदि स्टर्म के सिद्धान्त में  $f_t(y)$  यह एक फल ऐसा आवे कि य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या का उत्थापन देने से अपने चिन्ह को न बदले तो स्टर्म के सिद्धान्त में  $f_{t-1}(y), f_{t+2}(y), \dots, f_n(y)$  इन पदों को छोड़ कर लाघव से  $f(y), f_1(y), f_2(y), \dots, f_t(y)$  इतने ही पदों को लेकर विचार करो क्योंकि  $f_t(y)$  इसमें य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या के उत्थापन से एक ही चिन्ह होने से  $f_t(y), f_{t+1}(y), \dots, f_n(y)$  इसमें सर्वत्र एक ही व्यत्यास की संख्या होने से किसी संख्या के उत्थापन से श्रेढी में उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी जितने व्यत्यासों की हानि  $f(y), f_1(y), \dots, f_t(y)$  इतने ही पदों के वश से होती है। इसलिये और पदों को व्यर्थ रख परिश्रम बढ़ाना अचित नही।

१४०—यदि  $f_a(y)$  यह ऐसा फल हो कि  $f(y)=0$  इसमें जितने अव्यक्त के संभाव्य मान हों य के स्थान में सभी के उत्थापन से  $f_1(y)$  और  $f_a(y)$  ये दोनों एक ही चिन्ह के हों तो  $f_1(y)$  को छोड़ यदि कुछ लाघव जान पड़े तो उसके स्थान में  $f_a(y)$  को लेकर पूर्व युक्ति से  $f(y)$  और  $f_a(y)$  को ले स्टर्म के सब फलों को बना सकते हो।

१४१—स्टर्म के सिद्धान्त में अभी तक तो यह माना गया था कि  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के समान मान नहीं हैं। अब कल्पना करो कि  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त का एक मान अ, त बार और दूसरा मान क, थ बार है तो

$$f(y) = (y-a)^t (y-k)^y (y-x)(y-g) \dots\dots\dots$$

$$\text{और } f_1(y) = (y-a)^{t-1} (y-k)^{y-1} \{t(y-k)(y-x)(y-g) \dots\dots + y(y-a)(y-x) + \dots\dots\dots\}$$

इसलिये  $f(y)$  और  $f_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन  $(y-a)^{t-1} (y-k)^{y-1}$  होगा। स्टर्म की क्रिया में यहां जितने  $f(y)$ ,  $f_1(y)$ .....इत्यादि पद होंगे सब को पृथक् पृथक्  $(y-a)^{t-1} (y-k)^{y-1}$  यह निःशेष करेगा।

$$\text{अब मान लो कि } f_1(y) = (y-a)(y-k)(y-x)(y-g) \dots$$

$$\text{और } f_2(y) = t(y-k)(y-x)(y-g) \dots\dots\dots$$

$$+ y(y-a)(y-x)(y-g) \dots \dots \dots$$

$$+ \dots \dots \dots$$

तो यहां स्पष्ट है कि  $f_1(y)$  का प्रथमोत्पन्न फल  $f_2(y)$  नहीं है परन्तु यदि  $t = 1 = y$  तो  $f_2(y)$  यह अवश्य  $f_1(y)$  इसका प्रथमोत्पन्न फल होता। यदि  $y = अ, क, ख, ग, \dots \dots$  तो  $f_1(y)$  के प्रथमोत्पन्न फल का जो चिन्ह होगा वही  $f_2(y)$  का भी होगा। इसलिये १४०वें प्रक्रम से  $f_1(y)$  इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान जानने के लिये  $f_1(y)$  के प्रथमोत्पन्न फल के स्थान में  $f_2(y)$  को रख कर स्टर्म की क्रिया कर सकते हैं।

परन्तु  $f(y)$  और  $f_1(y)$  से स्टर्म के फलों से जो श्रेणी बनेगी वह वही श्रेणी होगी जो  $f_1(y)$  और  $f_2(y)$

के वश से उत्पन्न स्टर्म के प्रत्येक को फल महत्तमापवर्त्तन  $(य-अ)^{त-१} (य-क)^{थ-१}$  इससे गुण देने से होगी। इसलिये फि (य), और फा (य) से जो श्रेणी बनेगी उसमें के प्रत्येक पद के जो चिन्ह होंगे वही वा उनसे उलटे  $(य-अ)^{त-१} (य-क)^{थ-१}$  इससे गुण देने से चिन्ह होंगे। इसलिये दोनों श्रेणियों में व्यत्यास की संख्या एक ही आवेगी। इसलिये फ (य) = ० इसके समान मूल हैं वा नहीं इसका बिना विचार किए फ (य) और फ<sub>१</sub> (य) से फि (य) और फा (य) को जान कर स्टर्म की युक्ति से श्रेणी बनाओ और उससे फि (य) = ० इसके जो संभाव्य मूल होंगे वही फ (य) = ० इसके भी होंगे। इस प्रकार बनाई हुई श्रेणी में अन्त का पद शून्य हो तो समझ लेना चाहिए कि फ (य) = ० इसके तुल्य मूल आवेंगे।

इस प्रकार अ और क इन दो संख्याओं के भीतर फ (य) = ० इसमें य के कितने संभाव्य मान पड़े हैं इनका पता स्टर्म के सिद्धान्त से लग जायगा। फिर अ और क के भीतर की अनेक संख्याओं के उत्थापन से यह भी जान सकते हो कि किस संख्या के बहुत ही पास कौन संभाव्य मान है। जैसे

उदाहरण—(१) फ (य) =  $य^३ - ३य - ५ = ०$  इसमें अव्यक्त के संभाव्य मानों की संख्या और स्थिति को बताओ।

यहां महत्तमापवर्त्तन और १३४वें प्रक्रम की युक्तियों से

$$फ_१(य) = ३य^२ - ३$$

$$फ_२(य) = ४य + १५$$

$$फ_३(य) = -६४३$$

य के स्थान में  $-\infty, ०, +\infty$  इनका उत्थापन देने से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>
$(-\infty)$	-	+	-	-
$(०)$	-	-	+	-
$(+\infty)$	+	+	+	-

$-\infty$  इसकी अपेक्षा  $+\infty$  इसमें एक व्यत्यास की हानि हुई और ० की अपेक्षा भी  $+\infty$  इसमें एक ही व्यत्यास की हानि है इसलिये अव्यक्त का एक ही धन संभाव्य मान होगा।

फिर य के स्थान में क्रम से १, २, ३ का उत्थापन देने से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>
(१)	-	+	+	-
(२)	-	+	+	-
(३)	+	+	+	-

इसलिये अव्यक्त का धन संभाव्य मान २ और १ के बीच में है।

( २ )  $y^3 - ७y + ७ = ०$  इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ।

$$\text{यहां फ (य) = } y^3 - ७y + ७$$

$$\text{फ}_१(\text{य}) = ३y^२ - ७$$

$$\text{फ}_२(\text{य}) = २y - ३$$

$$\text{फ}_३(\text{य}) = १$$

यहां प्रत्येक फल के आदि पद के गुणक १, २, २ और २ धन है इसलिये १३७वें प्रक्रम से इसके सब मूल संभाव्य होंगे।



य के स्थान में  $-४, -३, -२, -१, १$  और २ के उत्थापन से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>
(-४)	-	+	-	+
(-३)	+	+	-	+
(-२)	+	+	-	+
(-१)	+	-	-	+
(१)	+	-	-	+
(२)	+	+	+	+

यहां  $-४$  और  $-१$  के बीच एक ऋण मूल है और १ और २ के बीच दो धन मूल हैं।

इस उदाहरण में यदि फोरिअर के सिद्धान्त को लगाओ तो उसका फ(य), फ<sub>१</sub>(य) इत्यादि लेने से और य के स्थान में १ और २ का उत्थापन देने से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>	फ <sub>३</sub>
(१)	+	-	+	+
(२)	+	+	+	+

यहाँ दो व्यत्यासों की हानि से फोरिअर के सिद्धान्त से यह सिद्ध होता है कि १ और २ के बीच दो से अधिक संभाव्य मूल नहीं हैं परन्तु स्टर्म के सिद्धान्त से निश्चय हो गया कि १ और २ के बीच निःसंशय अव्यक्त के दो ही मान हैं। य के स्थान में १ और २ के बीच के अनेक भिन्नो का उत्थापन देने से स्वल्पान्तर से उन दो मूलों की संख्या भी ज्ञात सकते हो।

( ३ )  $f(y) = y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 10y - 4 = 0$  इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ ।

$f_1(y)$  में २ का भाग देने से

$$f_1(y) = 2y^3 - 3y^2 - 3y + 4$$

$$f_2(y) = 4y^2 - 20y + 11$$

$$f_3(y) = -2y - 3$$

$$f_4(y) = -1833$$

यहां सब फलों के आदि पद के गुणकों के चिन्हों को ले लेने से

$++--$  इसमें एक व्यत्यास है इसलिये १३वें प्रक्रम से  $f(y) = 0$  इसका एक जोड़ा असंभाव्य मूल होगा । स्टर्म की युक्ति से  $y$  के स्थान में  $-\infty, 0, +\infty$  इनका उत्थापन देने से वा २२वें प्रक्रम से यहां  $y$  का एक संभाव्य मान धन और एक ऋण होगा । इसलिये यहां केवल  $f_1(y)$  में धन और ऋण अभिन्न संख्या का उत्थापन देने से पता लगा सकते हो कि ऋण मूल  $-3$  और  $-2$  के भीतर और धन मूल  $0$  और  $1$  के भीतर है ।

( ४ )  $y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 2 = 0$  इसके मूलों की क्या दशा है ।

$$\text{यहाँ } f_1(y) = 4y^3 - 12y^2 + 12y - 6$$

$$f_2(y) = y^2 - 2y + 1$$

$f_1(y)$  में  $f_2(y)$  का पूरा पूरा भाग लग जाता है इसलिये अब यहां पर स्टर्म की श्रेढी को रोक दो और  $f_2(y)$  से समझ लो कि  $f(y) = 0$  इसके तुल्य मूल हैं ।

य के स्थान में  $-\infty$  और  $+\infty$  इनका उत्थापन देने से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>
$(-\infty)$	+	-	+
$(+\infty)$	+	+	+

दो व्यात्यासों की हानि से जान पड़ा कि  $फ(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के अतुल्य दो मान हैं जिनमें से एक तीन बार आया है।

( ५ )  $फ(y) = २५^४ - १३५^३ + १०५ - १६ = 0$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहाँ  $फ_१(y) = ४५^३ - १३५ + ५$  ( २ के अपवर्तन से )

$फ_२(y) = १३५^२ - १५५ + ३८$

यहाँ  $फ_२(y) = 0$  इसके असंभव मूल होने से  $फ_२(y)$  यह य के किसी संभाव्य मान में सर्वदा धन ही रहेगा। इसलिये आगे स्टर्म की श्रेणी को रोक देने से ( १३६वें प्रक्रम से ) और य के स्थान में  $-\infty, 0$  और  $+\infty$  इनका उत्थापन देने से

	फ	फ <sub>१</sub>	फ <sub>२</sub>
$(-\infty)$	+	-	+
$(0)$	-	+	+
$(+\infty)$	+	+	+

यहाँ पर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं जिनमें एक ऋण और दूसरा धन है।

१४२—किसी धन अभिन्न संख्या से  $फ(y)$  को गुण कर यदि  $फ_१(y)$  का भाग दें तो अव्यक्तात्मक

लब्धि अभिन्न आती है और शेष भी अभिन्न बच जाता है।

कल्पना करो कि  $f(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n$

और इसका प्रथमोत्पन्न फल संभव रहते कोई व्यक्त धन संख्या से पूरा पूरा भाग दे देने पर  $f_1(y) = v_0 y^{n-1} + v_1 y^{n-2} + \dots$  ऐसा है।  $f(y)$  और  $f_1(y)$  का महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये कल्पना करो कि एक ऐसी छोटी धन अभिन्न संख्या  $h$  है जिससे  $f(y)$  को गुण कर यदि  $f_1(y)$  का भाग दें तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न रहते हैं।

इ  $f(y)$  में  $f_1(y)$  का भाग देने से मान लो कि  $h$   $f(y)$  के प्रथम पद के गुणक में  $f_1(y)$  के प्रथम पद के गुणक से भाग देने से अभिन्न व्यक्ताङ्क ल आया तो

इ  $p_0 = v_0 h$ ,  $p_1$  और  $v_1$  का महत्तमापवर्त्तन  $m$  से भाग देनेसे

$$h p'_0 = v'_0 h \dots \dots \dots (१)$$

जहाँ  $h p'_0 = p_0$  और  $h v'_0 = v_0$ ।

बीजगणित की साधारण रीति से  $h f(y)$  में लम  $f_1(y)$  को घटा देने से शेष में  $y$  के बड़े घात का गुणक  $h p_1 - l v_1$  यह होगा। इसमें भी  $f_1(y)$  के प्रथम पद के गुणक का पूरा भाग लग जाय तब लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे ऐसा कह सकते हैं।

कल्पना करो कि  $h p_1 - l v_1$  में  $v_0$  का भाग देने से लब्धि  $l'$  तो

$$h p_1 - l v_1 = v_0 l'$$

दोनों पक्षों को  $p$  इससे गुण देने से

$$इप' \cdot p_1 - लप' \cdot व_1 = प' \cdot व' \cdot ल'$$

$$वा \quad इप' \cdot p_1 - लप' \cdot व_1 = प' \cdot व' \cdot ल'$$

वा (१) समीकरण से

$$लव' \cdot p_1 - लप' \cdot व_1 = प' \cdot व' \cdot ल'$$

$$\therefore ल' = \frac{ल(व' \cdot p_1 - प' \cdot व_1)}{प' \cdot व_1} = \frac{ल भा}{हा}$$

$$यदि व' \cdot p_1 - प' \cdot व_1 = भा, प' \cdot व_1 = हा।$$

फिर यदि भा = म, भा' और हा = म, हा' जहाँ म, यह भा और हा का महत्तमापवर्त्तन है तब

$$ल' = ल \frac{भा'}{हा'}$$

हर का भाग देने से

$$ल' = ल \left( \frac{प_1}{प_0} - \frac{व_1}{व_0} \right) \dots \dots \dots (२)$$

अब यहां यदि  $\frac{प_1}{प_0}, \frac{व_1}{व_0}$  भिन्नो के हरों के ६ गुणित लघुत्तमापवर्त्त्य तुल्य ल कल्पना करें तो ल' अभिन्न आता है। इसका स्थापन (१) में देने से

$$इप'_0 = व'_0 \cdot ल \quad \therefore इ = \frac{व'_0}{प'_0} ल \cdot इ_1$$

अब इस में  $\frac{व'_0}{प'_0}$  जो दृढ़ हर हो उसके तुल्य इ<sub>१</sub> को मानने से इ का मान व्यक्त हो जायगा।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है ।

फ (य) और फ<sub>१</sub>(य) के आदि दो पदों को क्रम से हार और अंश कल्पना कर  $\frac{प_१}{प_०}, \frac{व_१}{व_०}$  ऐसे दो भिन्नो को बना कर

अपवर्त्तन की युक्ति से उनका लघुतम रूप कर लो तब उनके हारों का जो लघुतमापवर्त्य आवे उससे फ<sub>१</sub>(य) के प्रथम पद के गुणक को गुण कर अंश और फ (य) के प्रथम पद के गुणक को हर कल्पना कर अपवर्त्तन की युक्ति से इस भिन्न का भी लघुतम रूप कर लो । इसमें जो अंश का मान आवे वही इष्टाङ्क का मान आवेगा जिससे फ (य) को गुण कर यदि फ<sub>१</sub>(य) का भाग दिया जाय तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे । किया करने में सर्वत्र गुणकों का संख्यात्मक धन मान ग्रहण करना चाहिए ।

जैसे यदि फ (र) = र<sup>३</sup> + ३चार + जा = ०

तो फ<sub>१</sub>(र) = र<sup>२</sup> + चा ( ३ का भाग दे देने से )

अब फ (र) में फ<sub>१</sub>(र) का भाग देने से अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष अभिन्न होते ही है तो भी ऊपर की युक्ति से

$$प_० = १, प_१ = ०, व_० = १, व_१ = ०$$

$$\frac{प_१}{प_०} = \frac{०}{१}, \frac{व_१}{व_०} = \frac{०}{१} \text{ इनका लघुतम रूप भी } \frac{०}{१}, \frac{०}{१} \text{ यही हुआ}$$

और हरों का लघुतमापवर्त्य भी १ हुआ । इसे  $\frac{व_०}{प_०} = \frac{१}{१}$  इससे गुण कर लघुतम रूप करने से अंश १ हुआ । इसलिये १ से फ (र) को गुणने से लब्धि और शेष दोनों अभिन्न आते हैं ।

फिर  $\phi_1(r)$  से  $\phi(r)$  में भाग देने से शेष

२चार + जा

इसलिये स्टर्म का  $\phi_2(r) = - २चार - जा$  ।

फिर यहां ऊपर की युक्ति से

$$- \phi_1(r) = r^2 + २चा और \phi_2(r) = - २चार - जा में प_० = १.$$

$$प_१ = ० व_० = २चा, व_१ = जा ।$$

इसलिये  $\frac{प_१}{प_०} = \frac{०}{१}, \frac{व_१}{व_०} = \frac{जा}{२चा}$ , दोनों लघुतम भिन्नो के हारों

का लघुतमापवर्त्य = २चा इसे  $\frac{व_०}{प_०} = \frac{२चा}{१}$  इससे गुण कर लघु-

तम रूप करने से आश ४चा<sup>२</sup> यह इष्ट का मान आया ।

इससे  $\phi_1(r)$  को गुण कर  $\phi_2(r)$  का भाग देने से, चिन्ह को उलट देने से  $\phi_3(r) = -(जा^२ + ४चा^२)$  ।

यहां यदि  $\phi(r) = ०$  इसमें यह विचार करना हो कि य के तीनों मान कब संभाव्य होंगे तो १३७वे प्रक्रम से

$$\phi(r) = r^३ + २चार + जा$$

$$\phi_1(r) = r^२ + २चा$$

$$\phi_2(r) = - २चार - जा$$

$$\phi_3(r) = -(जा^२ + ४चा^२)$$

इनमें प्रत्येक आदि पद के गुणकों को धनात्मक होना चाहिए इसलिये यदि चा और जा<sup>२</sup> + ४चा<sup>२</sup> ये दोनों ऋण संख्या हों तो  $\phi(r) = ०$  इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य

होगे। यदि चा और जा को ११२वें प्रक्रम के घनसमीकरण के साथ तुलना करो तो यही बात ११३वें प्रक्रम से भी सिद्ध होती है। इसी प्रकार

$$फ_1(r) = r^4 + ६चार^२ + ४जार + अ^२भा - ३चा^२ = ०$$

इसके प्रथमोत्पन्न फल में ४ का भाग दे देने से

$$फ_1 = r^२ + ३चार + जा$$

$$\begin{array}{r} r^२ + ३चार + जा \quad | \quad r^४ + ६चार^२ + ४जार + अ^२भा - ३चा^२ \\ \hline - r^४ \pm ३चार^२ \pm ४जार \\ \hline ३चार^२ + ३जार + अ^२भा - ३चा^२ \end{array}$$

चिन्ह बदल देने से

$$फ_2(r) = -३चार^२ - ३जार - (अ^२भा - ३चा^२)$$

१४२वें प्रक्रम की युक्ति से

$$फ_1(r) \text{ में } प_० = १, प_१ = ०, फ_2(r) \text{ में } व_० = ३चा, व_१ = ३जा$$

इसलिये  $\frac{प_१}{प_०} = ०, \frac{व_१}{व_०} = \frac{३जा}{३चा} = \frac{जा}{चा}$ । इन भिन्नों के हरों का

लघुतमापवर्त्य चा हुआ। इसे  $\frac{व_०}{प_०} = \frac{३चा}{१}$  इससे गुण देने से

$\frac{३चा^२}{१}$  यह हुआ। इसका लघुतम रूप भी यही है इसलिये

इसका अंश ३चा<sup>२</sup> यह इष्ट का मान हुआ। इससे  $फ_1(r)$  को गुण कर  $फ_2(r)$  का भाग देने से



$$\frac{-३चार^२ - ३जार}{-(अ^२भा - ३चा^२)} \left( ३चा^२र^२ + ६चा^२र + ३चा^२जा \right) \left( -चार + जा \right) \\ ३चा^२र^२ + ३चाजार^२ + र(अ^२चाभा - ३चा^२)$$

$$- ३चाजार^२ + (६चा^२ + ३चा^२ - अ^२चाभा)र + ३चा^२जा$$

$$- ३चाजार^२ - ३जा^२र - अ^२जाभा + ३चा^२जा$$

$$\text{शेष} = (१२चा^२ + ३जा^२ - अ^२चाभा)र + अ^२जाभा$$

$$\text{शे} = \{३(४चा^२ + जा^२ - अ^२चाभा) + २अ^२चाभा\}र + अ^२जाभा \\ = (-३अ^२छा + २अ^२चाभा)र + अ^२जाभा \quad (१२२वें प्रक्रम से)$$

इसमें + अ^२ का भाग देकर चिन्ह उलट देने से

$फ_३(र) = -(२चाभा - ३अछा)र - जाभा$  (१४२वें प्रक्रम की युक्ति से)  $फ_२(र)$  में  $प_० = ३चा$ ,  $प_१ = ३जा$ ;  $फ_३(र)$  में  $व_० =$

$$२चाभा - ३अछा, व_१ = जाभा, \frac{प_१}{प_०} = \frac{जा}{चा}, \frac{व_१}{व_०} = \frac{जाभा}{२चाभा - ३अछा}$$

इनके लघुत्तम रूप के हरों का लघुतमापवर्त्य चा(२चाभा

$$- ३अछा) इसे  $\frac{व_०}{प_०} = \frac{२चाभा - ३अछा}{३चा}$  इससे गुण देने से$$

$$\text{भिन्न } \frac{(२चाभा - ३अछा)^२}{३} \text{ इसका लघुत्तम रूप भी यही}$$

हुआ। इसलिये इसका अंश  $(२चाभा - ३अछा)^२$  यही दृष्ट का मान हुआ।

इससे  $फ_२(र)$  को गुणा कर  $फ_३(र)$  का भाग देने से

$$\text{शेष} = ३\text{जा}^२\text{चाभा}^२ + ३\text{जा}^२\text{भा}(२\text{चाभा} - ३\text{अछा})$$

$$- (\text{अ}^२\text{भा} - ३\text{चा}^२)(२\text{चाभा} - ३\text{अछा})(२\text{चाभा} - ३\text{अछा})$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + (२\text{चाभा} - ३\text{अछा})(३\text{जा}^२\text{भा} - २\text{अ}^२\text{चाभा}^२ \\ + ३\text{अ}^२\text{छाभा} + ६\text{चा}^२\text{भा} - ६\text{अचा}^२\text{छा})$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + (२\text{चाभा} - ३\text{अछा})\{३\text{भा}(\text{जा}^२ + \text{अ}^२\text{छा}) \\ - २\text{अ}^२\text{चाभा}^२ + ६\text{चा}^२\text{भा} - ६\text{अचा}^२\text{छा}\}$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + (२\text{चाभा} - ३\text{अछा})\{३\text{भा}(\text{अ}^२\text{चाभा} - ४\text{चा}^२)\} \\ - २\text{अ}^२\text{चाभा}^२ + ६\text{चा}^२\text{भा} - ६\text{अचा}^२\text{छा}\}$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + (२\text{चाभा} - ३\text{अछा})(३\text{अ}^२\text{चाभा}^२ \\ - १२\text{चा}^२\text{भा} - २\text{अ}^२\text{चाभा}^२ + ६\text{चा}^२\text{भा} - ६\text{अचा}^२\text{छा})$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + (२\text{चाभा} - ३\text{अछा})(\text{अ}^२\text{चाभा}^२ \\ - ६\text{चा}^२\text{भा} - ६\text{अचा}^२\text{छा})$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ - १२\text{चा}^२\text{भा}^२ \\ - १८\text{अचा}^२\text{छाभा} - ३\text{अ}^२\text{चाछाभा}^२ + १८\text{अचा}^२\text{छाभा} \\ + १७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

$$= -३\text{चाजा}^२\text{भा}^२ + २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ - १२\text{चा}^२\text{भा}^२ \\ - ३\text{अ}^२\text{चाछाभा}^२ + १७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

$$= २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ - ३\text{चाभा}^२(\text{जा}^२ + ४\text{चा}^२ + \text{अ}^२\text{छा}) \\ + १७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

$$= २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ - ३\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ + १७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

$$= -\text{अ}^२\text{चा}^२\text{भा}^२ + १७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

इसमें अ<sup>२</sup>चा<sup>२</sup> का भाग देने से और चिन्ह को बदल देने से

$$\text{फ}_४(\text{र}) = \text{भा}^२ - १७\text{छा}^२ \quad (१२२ \text{ वां प्र० देखो})$$

अब यदि चतुष्टयसमीकरण में अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे तो

$$फ_1(r) = र^४ + ६चार^२ + ४जार + अ^२भा - ३चार^२ ।$$

$$फ_१(r) = र^३ + ३चार + जा ।$$

$$फ_२(r) = -३चार^२ - ३जार - (अ^२भा - ३चार^२) ।$$

$$फ_३(r) = -(२चाभा - ३अछा)र - जाभा ।$$

$$फ_४(r) = भा^३ - २७छा^२$$

इनमें के आदि पद १३७वें प्रक्रम से धन होंगे। इसलिये यदि चा, २चाभा - ३अछा ऋण और भा^३ - २७छा^२ धन हो तो सब मान संभाव्य होंगे।

१४३— $फ_१(y)$  और इसके प्रथमोत्पन्न फल  $फ_१'(y)$  से महत्तमापवर्तन की युक्ति से रटर्म साहस के फलों के निकालने में बहुत प्रयास करना पड़ता है, इसलिये लाघव से फलों को निकालने के लिये एक युक्ति दिखलाते हैं:—

कल्पना करो कि  $फ_१(y) = प_०y^n + प_१y^{n-१} + प_२y^{n-२} + \dots + प_{n-१}y^१ + प_n$  और इसका प्रथमोत्पन्न फल  $फ_१'(y) = व_१y^{n-१} + व_२y^{n-२} + \dots + व_{n-१}y^१ + व_n$

$फ_१(y)$  को  $व_२$  से गुण कर  $फ_१'(y)$  का भाग देने से

$$\begin{aligned} \text{शेष} = & \{ व_२(-व_१प_१ + प_०व_२) + व_२^२प_२ - व_१प_०व_३ \} y^{n-२} \\ & + \{ व_२(-व_१प_१ + प_०व_२) + व_२^२प_३ - व_१प_०व_४ \} y^{n-३} \\ & + \{ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \} \dots \dots \dots \\ & + \{ व_{n-१}(-व_१प_१ + प_०व_२) + व_{n-१}^२प_{n-१} - व_१प_०व_{n-१} \} y^{१-n} \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$



के तृतीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को तीसरे स्थिर गुणक से गुण कर रखो। इस प्रकार ऊर्ध्वाधर पंक्ति में जो जो संख्या होंगी उनको जोड़ लेने से और संभव रहते किसी समान धन संख्या का अपवर्त्तन दे देने से ये सब क्रम से  $F_2(y)$  के सब पदों के गुणक आ जायँगे। इनमें  $y^{n-2}$ ,  $y^{n-1}$  इत्यादि लगा देने से  $F_2(y)$  का मान निकल आवेगा।  $F(y)$  और  $F_1(y)$  इनके स्थान में  $F_1(y)$  और  $F_2(y)$  को लेने से ऊपर ही की युक्ति से  $F_1(y)$  निकल आवेगा फिर  $F_2(y)$  और  $F_1(y)$  को लेने से  $F_1(y)$  आवेगा। इस प्रकार सब आ जायँगे। जैसे

$$\text{उदाहरण—(१) } F(y) = y^5 - 7y^4 + 12y^3 - 80y^2 + 85y - 16$$

$$\text{इसमें } F_1(y) = 5y^4 - 28y^3 + 60y^2 - 50y + 8$$

$F(y)$  और  $F_1(y)$  को पूरा करने से क्रम से दोनों के गुणक

$$+ 1, - 7, + 12, 0, - 80, + 85, - 16$$

$$+ 5, - 28 + 60, 0, - 50 + 8$$

$$\text{पहिली संख्या} = 5 \times - 7 - 1 \times - 28 = - 7$$

$$\text{दूसरी " } = 1 \times 5 = 5$$

$$\text{तीसरी " } = 5 \times 5 = 25$$

इन तीनों में किसी धन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से प्रथम स्थिर गुणक  $= - 7$ , दूसरा  $= 5$ , तीसरा  $= - 25$ ।

क्रम से स्थिर गुणकों से गुणित  $F_1(y)$  के द्वितीय पदादि, तथा तृतीय पदादि गुणक और  $F(y)$  के तृतीय पदादि गुणक क्रम से

$$\begin{aligned}
 -७ \times &= +२४५, -४२०, ०, +५६०, -२३६ \\
 ६ \times &= +३६०, ०, -४८०, +२८८ \\
 -३६ \times &= -५४०, ०, +१४४०, -१७२८, +५७६ \\
 \text{योग} &= +६५, -४२० + ६६०, -८८० + २४० \\
 & १३, -८४, +१६२, +१७६, +४८, \\
 & \quad \quad \quad \times \text{ के अपवर्त्तन से}
 \end{aligned}$$

इसलिये  $f_2(y) =$

$$१३y^2 - ८४y^2 + १६२y^2 - १७६y + ४८$$

इसी प्रकार  $f_1(y)$  और  $f_2(y)$  को लेने से

$$\text{प्रथम संख्या} = १३ \times -३५ - ६ \times -८४ = ४६$$

$$\text{दूसरी " } = १३ \times ६ = ७८$$

$$\text{तीसरी " } = १३ \times १३ = १६९$$

अपवर्त्तन न लगाने से प्रथम गुणक = ४६, दूसरा = ७८, तीसरा = १६९।

$$४६ \times = -४११६, +६४०८, -८६२४, +२३५२$$

$$७८ \times = +१४६७६, -१३७२८, +३७४४$$

$$-१६९ \times = -१०१४०, ०, +१३५२०, -८११२$$

$$\text{योग} = +७२०, -४३२०, +८६४०, -५७६०$$

७२० के अपवर्त्तन से और  $y$  के घातों को लगा देने से

$$f_3(y) = y^3 - ६y^2 + १२y - ८ = (y-२)^3$$

इसी प्रकार आगे भी सब निकाल सकते हो।

$$(२) f_1(y) = y^3 - ६y^2 + ४y^2 + १४y - ४ = ०$$

यहां  $f_1(y)$  का प्रथमोत्पन्न फल

$$f_{1,1}(y) = ४y^३ - १८y^२ + १०y + १४$$

२ के अपवर्त्तन से

$$f_{1,2}(y) = २y^३ - ६y^२ + ५y + ७$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{प्रथम संख्या} = २ \times -६ - १ \times -६ = -३ \\ \text{दूसरी} \quad \quad = २ \times १ \quad \quad \quad = २ \\ \text{तीसरी} \quad \quad = १ \times २ \quad \quad \quad = ४ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{प्र. गु} = -३ \\ \text{द्वि. गु} = २ \\ \text{तृ. गु} = -४ \end{array}$$

$$-३ \times = +२७, -१५, -२१$$

$$२ \times = +१०, +१४$$

$$-४ \times = -२०, -५६ + १६$$

$$\text{योग} = +१७, -५७, -५$$

किसी घन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से और य के घात लगा देने से

$$f_{1,2}(y) = १७y^३ - ५७y - ५$$

फिर  $f_{1,1}(y)$  और  $f_{1,2}(y)$  को लेने से

$$\left. \begin{array}{l} \text{प्र. सं.} = १७ \times -६ - २ \times -५७ = -३६ \\ \text{द्वि. सं.} = २ \times १७ \quad \quad \quad = ३४ \\ \text{तृ. सं.} = १७ \times १७ \quad \quad \quad = २८९ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{प्र. गु} = - ३६ \\ \text{द्वि. गु} = ३४ \\ \text{तृ. गु} = - २८९ \end{array}$$

$$-३६ \times = +२२२३, १६५$$

$$३४ \times = -१७०$$

$$-२८९ \times = -१४४५, -२०२३$$

$$\text{योग} = +६०८, -१८२८$$

४ का अपवर्त्तन दे देने से और  $y$  का घात लगा देने से

$$F_1(y) = 122y - 820$$

फिर  $F_2(y)$  और  $F_3(y)$  को लेने से

$$F_2(y) = 10y^2 - 26y - 2$$

$$F_3(y) = 122y - 820$$

$$\text{प्र. सं.} = 122 \times -20 - 20 \times -820 = -262$$

$F_3(y)$  में तीसरे इत्यादि पदों को न होने से दूसरी संख्या का कुछ प्रयोजन नहीं और

$$\text{तीसरी संख्या} = 122 \times 122$$

$$\text{इसलिये प्र. गु.} = -262$$

$$\text{त. गु.} = -122 \times 122$$

दोनों गुणक ऋण हुए इसलिये

$$\begin{aligned} F_3(y) &= -262 \times -820 + (-122 \times 122 \times -2) \\ &= 262 \times 820 + 122 \times 122 \times 2 \end{aligned}$$

अर्थात्  $F_3(y)$  का मान धन हुआ।

ऐसे स्थानों में गुणन करने का परिश्रम बचाने के लिये केवल गुणन के सांकेतिकचिन्ह से इतना समझ लेना चाहिए कि अन्त में जो फल  $y$  से स्वतन्त्र आता है अर्थात् व्यक्त संख्यात्मक है वह धन है वा ऋण।

यहाँ प्रथम संख्या का भी संख्यात्मक मान निकालने का कुछ प्रयोजन नहीं केवल अटकल से मालूम पड़ जाता है कि वह प्रथम संख्या ऋण होगी इसलिये प्रथम गुणक भी ऋण



होगा। इसलिये  $F_1(y)$  का प्रथम खण्ड धन और दूसरा भी धन होने से  $F_1(y)$  का मान धन व्यक्त संख्या होगी। इस प्रकार से स्टर्म के शेषों के निकालने में बहुत ही लाघव है। मेरी समझ में जितने परिश्रम से महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से स्टर्म के शेष निकलेंगे उसके आधे परिश्रम में मेरी युक्ति से निकलेंगे और महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से क्रिया जितने स्थान को व्याप्त करेगी उससे आधे ही स्थान में मेरी युक्ति से क्रिया पूरी हो जायगी। बुद्धिमानों को चाहिए कि इस पर विशेष ध्यान दें।

### अभ्यास के लिये प्रश्न।

१।  $y^4 + 3y^3 + 6y^2 + 10y + 1 = 0$  स्टर्म की युक्ति से इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मूल  $(-2, -1)$  और  $(-1, 0)$  इनके बीच में हैं और दो असंभाव्य मूल होंगे।

२।  $y^4 - 4y^3 - 3y + 23 = 0$  इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य और दो असंभाव्य मूल होंगे। एक संभाव्य २,३ और दूसरा ३,४ के बीच में होगा।

३।  $y^4 + 2y^3 + y^2 - 4y^2 - 3y - 4 = 0$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

इसमें अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान होगा।

४।  $y^4 - 2y^3 - 6y^2 + 10y + 10 = 0$  इसके मूलों की विवेचना करो।

इसके सब मूल संभाव्य हैं और  $-2$  और  $3$  के बीच में हैं।

५।  $y^2 + ३y^2 + २y^2 - ३y^2 - २y - २ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां एक ही संभाव्य मान है जो १ और २ के बीच में है।

६।  $y^2 + ११y^2 - १०२y + १८१ = ०$  इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां तीनों मूल संभाव्य हैं। दो मूल ३.२ और ३.३ के बीच होने से बहुत ही पास पास हैं। इसलिये उनके सीमाओं को अलगाने में बहुत प्रयास करने की आवश्यकता है।

७।  $y^2 + y^2 + y^2 - २y^2 + २y - १ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां एक ही संभाव्य मान ० और १ के बीच में है।

८।  $y^2 - ६y^2 + ५y^2 + १४y - ४ = ०$  इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां सब मूल संभाव्य हैं। एक -२ और -१ के बीच, एक ० और १ के बीच, दो ३ और ४ के बीच हैं।

९। सिद्ध करो कि न्यूटन की प्रधान धन सीमा जानने की युक्ति फोरिअर के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही है (६३वां प्रक्रम देखो)

१०।  $y^2 - ६y^2 - ३०y^2 + १२y - ६ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से -२ और -१, और ६ और ७ के बीच में हैं।

११।  $२y^2 - १८y^2 + ६०y^2 - १२०y^2 - ३०y^2 + १८y - ५ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से—१ और ०, और ५ और ६ के बीच में हैं।

१२।  $२य^१ + १५य^२ - ८४य - १६० = ०$  इसके मूलों की परीक्षा करो।

यहां सब संभाव्य मूल हैं। एक—० और—७ के बीच और दो—७ और ६ के बीच हैं।

१३।  $३य^२ - ६य^२ - ८य - ३ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से—१ और ०, और १ और २ के बीच में हैं। यहां  $फ_२(य) = (य+१)^२$  ऐसा होगा, इसलिये स्टर्म की युक्ति से  $फ_२(य)$  ही तक फलों को लेकर मानों की विवेचना करो। (१३६ वां प्र० देखो)।

१४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में स्टर्म के सिद्धान्त से दिखलाओ कि अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान है:—

$$(१) य^१ + ६य^२ + १०य - १ = ०$$

$$(२) य^२ - ६य^२ + ८य + ४० = ०$$

$$(३) य^१ - ४य + ४० = ०$$

$$(४) य^१ + २य^२ - ३य - १० = ०$$

१५। सिद्ध करो कि “को राशिर्द्विशतीक्षुण्णो राशिर्वर्गयुतो हतः” इत्यादि भास्कराचार्य के चतुर्धात समीकरण में जो

$फ(य) = य^४ - २य^२ - ४००य - ६६६६ = ०$  यह सिद्ध होता है इसमें अव्यक्त के दो ही संभाव्य मान होते हैं जिनके क्रम से मान ११ और—६ है।

१६।  $y^2 - ११y^1 + ६६y^0 - ७७y - ४२ = ०$  इसके मूलों को बुडन की रीति से अलग-अलग।

उ० मूल,  $(-१, ०), (२, ३), (४, ५)$  और  $(६, १०)$

इनके बीच में सब संभाव्य हैं।

१७। स्टर्म की रीति से किसी चतुर्घात समीकरण के उत्पन्न सब फलों के आदि पदों के चिन्ह  $++--$  ऐसा नहीं हो सकते यह सिद्ध करो।

१८। यदि किसी चतुर्घात समीकरण में  $a$  और  $b$  दोनों धन हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे (१४२वें प्रक्रम के चतुर्घात समीकरण के उदाहरण से और १२२वें प्रक्रम से  $a$ ,  $b$  इत्यादि के मानों से सिद्ध होगा कि स्टर्म के फलों के आदि चिन्ह  $++--++--$  वा  $++--++$  ऐसे होंगे)।

## १३-आसन्नमानानयन

१४४— $f(y) = ०$  इसमें स्वल्पान्तर से  $y$  का जो मान आता है उसे अव्यक्त का आसन्न मान कहते हैं। ये आसन्न मान संभाव्य सख्यात्मक ही जाने जा सकते हैं।

भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञों ने  $y^2 = ax$  इस समीकरण में  $y$  का आसन्न मान इस प्रकार से निकाला है:—

कल्पना करो कि  $ax$  का मूल  $m$  से बड़ा और  $m+१$  से छोटा है तो स्पष्ट है कि  $y$  का मान  $m$  से बड़ा और  $m+१$  से छोटा होगा। मान लो कि  $y = m+r$  जहाँ  $r$  का से अंश है तो

$$य^2 = (म + र)^2 = म^2 + २म.र + र^2 = अ$$

$$\therefore २म.र + र^2 = अ - म^2 = शे$$

दोनों पक्षों में  $र^2$  के जाड़ने से

$$२म.र + र^2 = शे + र^2$$

$$\therefore र = \frac{शे + र^2}{२म + २र} = \frac{शे + १ + र^2 - १}{२म + २ + २र - २} = \frac{शे + १ - (१ - र^2)}{२म + २ - २(१ - र)}$$

$$= \frac{शे + १}{२म + २} + \frac{शे + १ - (१ - र^2)}{२म + २ - २(१ - र)} - \frac{शे + १}{२म + २}$$

$$= \frac{शे + १}{२म + २} + \frac{(१ - र) \left\{ \frac{शे - म}{(म + १)^2} - \frac{र}{म + १} \right\}}{२ \left( \frac{म + १}{म + १} \right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(म + १)} + \frac{(१ - र) \left\{ \frac{अ + म^2 - म}{(म + १)^2} - \frac{र}{म + १} \right\}}{२ \left( \frac{म + १}{म + १} \right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(म + १)} + \frac{(१ - र) \left\{ \frac{अ}{(म + १)^2} - \frac{म + र}{म + १} \right\}}{२ \left( \frac{म + १}{म + १} \right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(म + १)} + \frac{(१ - र)}{२} \left\{ \frac{अ}{(म + १)(म + १)} - १ \right\}$$

दूसरे खण्ड का मान सब से अधिक होगा जब  $र = ०$

$$\begin{aligned} \text{तब दूसरा खण्ड} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{अ}}{m^2 + m} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{अ} - m^2 - m}{m^2 + m} \right) \\ &= \frac{\text{शे} - m}{2m(m+1)} \end{aligned}$$

इसमें यदि शेष का महत्तम मान जो कि  $2m$  तुल्य होता है मान लो तो दूसरे खण्ड का महत्तम मान  $= \frac{1}{2(m+1)}$  यह कपाल्य होता है। इसे प्राचीनों ने छोड़ दिया है। इसलिये स्वल्पान्तर से  $r$  का मान  $\frac{\text{शे} + 1}{2(m+1)}$  यह हुआ और तब  $y = \sqrt{\text{अ}} = m + \frac{\text{शे} + 1}{2m + 2}$ । दूसरे खण्ड को नीची जाति बनाने के लिये ६० से गुण देने से  $y = m + \frac{60(\text{शे} + 1)}{2m + 2}$ ।

इस पर प्राचीनों का यह सूत्र है:—

‘मूलावशेषकं सैकं षष्टिघ्नं विकलान्वितम्।

द्विगुणेन द्वियुक्तेन मूलेनासं स्फुटं भवेत् ॥’

यह सूत्र परम्परा से सब करणग्रन्थों में प्रसिद्ध है।

जिस संख्या का निरवयव मूल नहीं मिलता उसके सूक्ष्म मूलानयन के लिये कमलाकर इत्यादिकों ने पहले उस संख्या को साठ के वर्ग से गुण कर तब ऊपर की युक्ति से मूल लेकर मूल में साठ का भाग दे दिया है। उन लोगों का यह सूत्र है—

‘षष्टिवर्गगुणादङ्गान्मूलं ग्राह्यं यादगतम्।

सैकशेषं षष्टिगुणं द्वियुक्-द्विघ्नपदोद्धृतम् ॥’

कमलाकर ने अपने स्पष्टाधिकर में ज्या पर से पञ्चमांश ज्या के साधन के लिये यह विधि लिखा है कि समीकरण में अव्यक्त के एक घात को एक तरफ और और अव्यक्त के घात और व्यक्ताङ्क को दूसरी तरफ ले जाकर अव्यक्त के एक घात के गुणक से दूसरे पक्ष में भाग देकर अव्यक्त का अव्यक्तात्मक मान जान लो। अब इस मान में अटकल से जो व्यक्त, अव्यक्त का आसन्न मान आवे उसका उत्थापन देकर दूसरा आसन्न मान निकालो फिर इसके उत्थापन से तीसरा मान निकालो; यों बार बार किया करने से एक ही मान आने लगे तब उसी को अव्यक्त का सूक्ष्म आसन्न मान कहो। जैसे

उदाहरण—(१)  $y^2 - २y - ५ = ०$  इसमें अव्यक्त का मान जानना है।

ऊपर की क्रिया से अव्यक्त के एक घात को एक ओर ले जाने से

$$२y = y^2 - ५ \quad \therefore y = \frac{y^2 - ५}{२}$$

इसमें पहले  $y = २$  ऐसा मानने से  $y$  का दूसरा आसन्न मान

$$y = \frac{y^2 - ५}{२} = \frac{८ - ५}{२} = \frac{३}{२}। y के स्थान में फिर इसका$$

उत्थापन देने से

$$y = \frac{\left(\frac{३}{२}\right)^2 - ५}{२} = \frac{२७ - ४०}{८} = -\frac{१३}{८}$$

इस प्रकार से आसन्न मान आते जाँयँगे परन्तु यहां यह कुछ नियम नहीं कि उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्न मान ही आता जायगा, हां यदि  $y$  के वास्तव मान के बहुत ही पास वाली

संख्या का उत्थापन  $y$  के स्थान में दिया जाव तो इनके मत से आसन्न मान आ सकता है।

इसी उदाहरण में ऊपर मूलानयन की युक्ति से पहिले यह समझ लिया कि

$$f(y) = y^3 - 2y - 2 = -1 \text{ यदि } y = 2, \text{ और } f(y) = +18$$

बदि  $y = 1$ । इसलिये बिन्ह के व्यत्यास से जान पड़ा कि 1 और 2 के भीतर  $y$  का एक मान है। कल्पता करो कि  $1 = 2 + v$  तो

$$f(2+v) = f(2) + f'(2)v + f''(2)\frac{v^2}{1 \cdot 2} + f'''(2)\frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\text{परन्तु } f(y) = y^3 - 2y - 2 \quad \therefore f(2) = -1$$

$$f'(y) = 3y^2 - 2 \quad \therefore f'(2) = 10$$

$$f''(y) = 6y \quad \therefore f''(2) = 12$$

$$f'''(y) = 6 \quad \therefore f'''(2) = 6$$

इसलिये

$$f(2+v) = -1 + 10v + \frac{12v^2}{2} + \frac{6v^3}{6}$$

$$= v^3 + 6v^2 + 10v - 1 = 0$$

अब कमलाकर की युक्ति से

$$v = \frac{1 - 6v^2 - v^3}{10}$$

अब इसमें स्पष्ट है कि  $v$  सर्वदा रूपाल्प है, इसलिये पहिले  $v$  के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से  $v = \frac{1}{10}$ । अब  $v$  के स्थान में  $\frac{1}{10}$  के उत्थापन से तीसरा  $v$  का असन्न मान



$$= \frac{1 - \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000}}{10} = \frac{1000 - 10 - 1}{10000} = \frac{989}{10000}$$

फिर इसके उत्थापन से उत्तरोत्तर च के अनेक मान आवेंगे। इनसे य के आसन्न मान  $= 2 + च$

$$2 + 0, 2\frac{1}{10}, 2\frac{989}{10000}, \dots \dots \dots \text{हत्यादि आवेंगे।}$$

इससे सिद्ध होता है कि जहाँ अव्यक्त का मान रूपाल्प होगा वहाँ कमलाकर की युक्ति से उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

ऊपर २ के स्थान में यदि ग रखें तो

$$फ(ग + च) = फ(ग) + फ'(ग)च + फ''(ग)\frac{च^2}{१.२} + \dots \dots \dots = 0$$

$$\text{इसलिये च} = \frac{-फ(ग) - फ''(ग)\frac{च^2}{२} - \dots \dots \dots}{फ'(ग)}$$

इसमें यदि पहिले च के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो

$$च = -\frac{फ(ग)}{फ'(ग)} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{इसलिये य} = ग + च = ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}।$$

ग के स्थान में  $ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = ग$ , इसके उत्थापन से (१)

समीकरण से च का दूसरा मान निकलेगा जिसे

१ -  $\frac{फ'(y)}{फ''(y)} = १$ , इसमें जोड़ देने से  $y$  का दूसरा आसन्न मान आवेगा। यों बार बार क्रिया करने से (१) से  $y$  का बहुत ही सूक्ष्म मान आ जायगा।

(१) समीकरण से जो आसन्नमान ले आने की युक्ति उत्पन्न होती है उसे न्यूटन सहाय ने निकाला है इसलिये इसे आसन्नमान जानने के लिये न्यूटन की रीति कहते हैं।

ऊपर जो  $y^2 - २y - ५ = ०$  यह उदाहरण दिखाया है इसी उदाहरण को न्यूटन ने भी ग्रहण कर अपनी रीति को दिखलाया है।

यदि ध्यान से देखो तो कमलाकर ही की रीति का विशद रूपान्तर न्यूटन की रीति है।

१४५—न्यूटन की रीति से जो बार बार आसन्नमान आता वह उत्तरोत्तर सूक्ष्म होता है वा नहीं यह उनकी रीति से स्पष्ट नहीं होता। इसके लिये फोरिशर ने यह रीति निकाली है—

कल्पना करो कि  $फ'(y) = ०$  इस समीकरण में  $अ$  और  $क$  के बीच एक ही अव्यक्त का मान पड़ा है और  $फ''(y) = ०$ ,  $फ'''(y) = ०$  इनके  $अ$  और  $क$  के बीच कोई अव्यक्त मान नहीं है तो न्यूटन की रीति से उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्नमान आते जायेंगे यदि क्रिया का आरम्भ  $अ$  और  $क$  की भीतर की संख्या से की जायगी जिन दोनों संख्याओं के भीतर  $y$  के स्थान में किसी संख्या का उत्पादन देने से  $फ'(y)$  और  $फ'''(y)$  दोनों एक चिन्ह के होंगे।

ऊपर की कल्पना से स्पष्ट है कि अ और क के बीच य के मान में फ(य) एक बेर चिन्ह बदलेगा परन्तु फ'(य) और फ''(य) दोनों एक ही चिन्ह के रहेंगे। यहां यह समझ लेना चाहिए कि क-अ यह कोई धन संख्या है।

१४६—ऊपर की युक्ति से सिद्धि के लिये पहिले कल्पना

करो कि  $फा(य) = फ(य) - फ(अ) - \frac{य-अ}{क-अ} \{फ(क) - फ(अ)\}$

यह एक समीकरण है। इसमें यदि य = अ वा य = क तो स्पष्ट है कि फा(य) = ० होता है इसलिये ६८वें प्रक्रम की युक्ति से फा(य) = ० इसमें एक अव्यक्त मान अ और क के बीच अवश्य होगा। मान लो कि यह मान आ के तुल्य है तो (१०वें प्रक्रम से)

$फा'(य) = फ'(य) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ}$  इसमें य के स्थान में

आ के उत्थापन से

$$फ'(आ) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ} = ०$$

$$\therefore फ(क) - फ(अ) = (क - अ) फ'(आ)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि अ और क के बीच में एक आ ऐसी संख्या अवश्य होगी जिससे

$फ(क) - फ(अ) = (क - अ) फ'(आ)$  ऐसा एक समीकरण बनेगा।

१४७—कल्पना करो कि अ से क बड़ा है तो यदि फ'(अ) यह धन होगा तो फ(क), फ(अ) से बड़ा होगा। और यदि फ'(आ) यह ऋण होगा तो फ(क) से फ(अ) बड़ा होगा। यदि

अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में फ' (य) हो तो स्पष्ट है कि फ' (आ) भी धन होगा और अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में यदि फ' (य) ऋण हो तो फ' (आ) भी ऋण होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि किसी दो संख्याओं के बीच प्रत्येक य के मान में फ' (य) धन हो तो उन दोनों संख्याओं के बीच य के मान में फ' (य) बढ़ता जायगा और यदि फ' (य) ऋण हो तो फ' (य) घटता जायगा। अर्थात् उन दो संख्याओं के भीतर यदि फ' (य) एक ही चिन्ह का रहेगा और फ' (य) और फ' (य) एक ही चिन्ह के होंगे तो उन दोनों संख्याओं के भीतर य जैसा जैसा बढ़ता जायगा तैसा तैसा फ' (य) का संख्यात्मक मान बढ़ता जायगा। और यदि फ' (य) और फ' (य) विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो फ' (य) का संख्यात्मक मान घटता जायगा।

१४८—अब फोरियर की रीति की उत्पत्ति ऐसे करो—

पहले—कल्पना करो कि  $y = a$  तो  $f(y)$  और  $f''(y)$  एक ही चिन्ह के हैं। मान लो कि पहिला आसन्न मान  $a_1$  है तो न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान  $a_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

कल्पना करो कि  $y$  का वास्तव मान  $= a + c$  तो  $f(a+c) = 0$

अब १४६वें प्रक्रम से  $f(a+c) - f(a) = c f'(a)$   
(जहाँ अ और  $a+c$  के बीच में कोई संख्या आ है।)

इसलिये  $c = -\frac{f(a)}{f'(a)}$  और  $y$  का वास्तव मान  
 $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$  हुआ और न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान

अ -  $\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$  यह हुआ जिसको सिद्ध करना है कि अ की अपेक्षा

वास्तव मान के निकट है। च के धन होनेसे  $\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$  इसमें भाज्य और भाजक विरुद्ध चिन्ह के होंगे और कल्पना से  $फ(अ)$  और  $फ''(अ)$  एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये  $फ'(अ)$  और  $फ''(अ)$  भी विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के अ और क के बीच के मानों में  $फ'(य)$ , जैसा जैसा य बढ़ेगा, तैसा तैसा घटता जायगा (१४७वां प्रक्रम देखो) इसलिये  $फ'(अ)$  के संख्यात्मक मान से  $फ'(अ)$  का संख्यात्मक मान अल्प होगा; इसलिये

-  $\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$  यह धनात्मक संख्या -  $\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$  इस धनात्मक संख्या

से कम होगी; इसलिये न्यूटन का दूसरा आसन्न मान पहिले की अपेक्षा वास्तव मान के पास वास्तव मान से अल्प है। अब दूसरे आसन्न मान को अ<sub>२</sub> कहो तो ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध हो जायगा कि अ<sub>१</sub> -  $\frac{फ(अ_१)}{फ'(अ_१)}$  = अ<sub>२</sub> यह तीसरा आसन्न मान दूसरे आसन्न मान की अपेक्षा वास्तव मान से कुछ अल्प वास्तव के पास है। इस तरह से सब आसन्न मान एक से दूसरा सूक्ष्म होता जायगा।

दूसरे—कल्पना करो कि  $फ(य)$  और  $फ''(य)$  एक ही चिन्ह के हैं। और पहिले य को क के तुल्य मान लिया जो कि अ से और वास्तव य के मान से भी बड़ा है तो न्यूटन का

दूसरा आसन्न मान क -  $\frac{फ(क)}{फ'(क)}$  यह होगा। मान लो कि

य का वास्तव मान  $= क + च$  है जहाँ च ऋणात्मक संख्या है तो  $फ(क + च) = ०$  और १४६वें प्रक्रम से  $फ(क + च) - फ(क) = च फ'(का)$  जहाँ का,  $क + च$  और  $क$  के बीच में है।

इसलिये  $च = - \frac{फ(क)}{फ'(का)}$  यहाँ च के ऋण होने से  $फ(क)$

और  $फ'(का)$  एक ही चिन्ह के होंगे और कल्पना से  $फ(क)$  और  $फ''(क)$  भी एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये  $फा''(का)$  और  $फ''(क)$  एक ही चिन्ह के होंगे; इसलिये अ और क के बीच जैसा जैसा य बढ़ता जायगा तैसा तैसा  $फ'(य)$  भी बढ़ता जायगा। (१४७वां प्रक्रम देखो)। इसलिये  $फ'(क)$  का संख्यात्मक मान  $फ''(का)$  के संख्यात्मक मान से बड़ा होगा; इसलिये

$\frac{फ(क)}{फ'(क)}$  यह धनात्मक संख्या  $\frac{फ(क)}{फ'(का)}$  इससे छोटी होगी।

इसलिये पहिले आसन्नमान की अपेक्षा न्यूटन का दूसरा आसन्न मान वास्तवमान के पास है। इसी युक्ति से दूसरे की अपेक्षा तीसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास होगा। इस तरह से एक की अपेक्षा दूसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास पास होता जायगा। इसलिये फोरियर का विशेष इस स्थान में बड़ा ही उपयोगी है। अर्थात् जिन दो संख्याओं के बीच य के बढ़ने वा घटने से जब  $फ(य)$  और  $फ''(य)$  एक ही चिन्ह के होंगे तब उन दोनों संख्याओं में से चाहे जिसको प्रथम आसन्न मान यदि न्यूटन की क्रिया करागे तो आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म आते जायेंगे और यदि यह स्थिति न होगी तो न्यूटन की रीति से निश्चय नहीं कि उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

१४६—कल्पना करो कि न्यूटन की रीति से किसी बार का आसन्न मान ग है तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से वास्तव मान  $= ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$  यह होगा; इसलिये न्यूटन के आसन्न मान ग और वास्तव मान में अन्तर  $\frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = त$  यह होगा। और न्यूटन का ग से आगे का आसन्न मान  $ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$  यह होगा, इसलिये इसका और वास्तव मान का अन्तर  $= \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$   $-\frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = त \frac{फ'(ग) - फ''(ग)}{फ'(ग)}$  परन्तु १४६ वें प्रक्रम से

$फ'(ग) - फ''(ग) = (ग - गा)फ''(घ)$  जहां ग और गा के बीच में कोई संख्या घा है। इसलिये इसके उत्थापन से अन्तर  $= \frac{त(ग - गा)फ''(घ)}{फ'(ग)}$  परन्तु ग और ग + च = वास्तव मान के बीच में कोई संख्या गा है। इसलिये ग - गा यह त से अल्प होगा; इसलिये यह अन्तर  $\frac{त^२ फ''(घ)}{फ'(ग)}$  इससे अल्प होगा। यदि

उन दोनों संख्याओं के बीच य को बढ़ाने वा घटाने से  $फ''(य)$  का महत्तम मान  $फ''(य)$  के न्यूनतम मान से विभक्त किया जाय और लब्धि को ल कही तो अन्तर सर्वदा लत<sup>२</sup> इससे अल्प रहेगा। जैसे १४४वें प्रक्रम के य<sup>३</sup> - २य - ५ = ० इस उदाहरण में सिद्ध है कि वास्तव मान २ और २.१ के बीच में है तो

$फ(य) = य^३ - २य - ५$ ,  $फ'(य) = ३य^२ - २$ ,  $फ''(य) = ६य$ , इसमें य के स्थान में २.१ का उत्थापन देने से २ और २.१ के

बीच  $f''(y) = ६y$  का महत्तम मान  $= १२ \cdot ६$  और  $f(y) = ३y^२ - २$  का न्यूनतम मान  $y$  के स्थान में  $२$  के उत्थापन से  $१०$  इसका भाग  $f''(y)$  के महत्तम मान में देने से  $ल = १२६$  इसमें यदि स्वल्पान्तर से दशमलव को छोड़ दें तो  $ल = १$ ; इस लिये स्वल्पान्तर से पहिले अन्तर  $त$  से दूसरे अन्तर  $लत^२ = त^२$  इसमें दूना दशमलव स्थान होगा।

### १५०—ल्याग्रेंज (Lagrange) की रीति—

आसन्न मान जानने के लिये ल्याग्रेंज ने यह रीति निकाली है। कल्पना करो कि अटकल से यह जान लिया कि  $f(y) = ०$  इसमें  $y$  का एक मान  $अ$  और  $अ+१$  के बीच में पड़ा है। स्टर्म के सिद्धान्त से यह भी पक्का कर लिया है कि अव्यक्त का एक ही मान  $अ$  और  $अ+१$  के बीच में है। मान लो कि  $y = अ + \frac{१}{r}$ , इसका उत्थापन  $f(y)$  में देने से दिए हुए समीकरण का रूप  $f\left(अ + \frac{१}{r}\right) = ०$  ऐसा होगा, इसमें छेदगम से स्पष्ट है कि  $f(r) = ०$  ऐसा एक समीकरण होगा जिसमें  $r$  का धनात्मक मान एक ही होगा क्योंकि दिए हुए समीकरण में  $y$  का एक ही मान  $अ$  और  $अ+१$  के बीच में है।

इस  $f(r) = ०$  में अब  $r$  के स्थान में  $१, २, ३ \dots$  के उत्थापन से समझ लो कि कौन दौ पास की अभिन्न संख्याओं के बीच में  $r$  का मान पड़ा है।

कल्पना करो कि  $क$  और  $क+१$  के बीच में जान पड़ा कि  $r$  का मान पड़ा है। मान लो कि  $r = क + \frac{१}{ल}$ , इसका उत्थापन  $f(r)$  में देने से और छेदगम से  $f(ल) = ०$  एक ऐसा समी-



करण होगा जिसमें ऊपर की युक्ति से ल का एक ही धनात्मक मान होगा। फिर इस फि(ल) में ल के स्थान में १, २, ३..... के उत्थापन से जान सकते हो कि किन दो पास की संख्याओं के भीतर ल का मान है।

कल्पना करो कि ग और  $ग + १$  के भीतर ल का मान है।

फिर  $ल = ग + \frac{१}{व}$  कल्पना कर व इत्यादि के मान जानने से लगा-

तार क्रिया करने से य का मान  $= अ + \frac{१}{क + \frac{१}{ग + \frac{१}{.....}}}$  इस वि-

तत भिन्न के रूप में जान सकते हो जिसे य के अनेक आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म बनेंगे।

उदाहरण—(१)  $य^२ - २य - ५ = ०$  इसमें य का आसन्न मान जानना है।

यहां ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि संभाव्य मान एक ही है वह भी २१वें प्रक्रम से धन होगा।

परीक्षा से जान पड़ा कि वह धनात्मक मान २ और ३ के बीच में है। मानो  $य = २ + \frac{१}{२}$  तो

$$फ(२) = २^२ - २ \cdot २ - ५ = -१$$

$$फ'(२) = २ \cdot २ - २ = १०$$

$${}^{\frac{१}{२}}फ''(२) = २ \cdot २ = -६$$

$$इसलिये २ के रूप में  $-२^३ + १०२^२ + ६२ + १ = ०$$$

चिन्हों के बदलने से  $r^2 - 10r^2 - 6r - 1 = 0$  ऐसा समीकरण हुआ जिसे  $\text{फा}(r)$  कहो।

यदि  $r=10$  तो  $\text{फा}(r)$  ऋण और  $r=11$  तो  $\text{फा}(r)$  धन होता है; इसलिये 10 और 11 के बीच में  $r$  हुआ।

मानो कि  $r=10 + \frac{1}{l}$  तो

$$\text{फा}(10) = 10^2 - 10 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 1 = -61$$

$$\text{फा}'(10) = 2 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10 - 6 = -6$$

$$\text{इफा}''(10) = 2 \cdot 10 - 10 = 10$$

इसलिये  $l$  के रूप में समीकरण  $-61l^2 + 6l^2 + 20l + 1 = 0$ , चिन्हों के बदलने से  $61l^2 - 6l^2 - 20l - 1 = 0$  =  $\text{फि}(l)$

यहां यदि  $l=2$  तो  $\text{फि}(l)$  धन और  $l=1$  तो  $\text{फि}(l)$  ऋण; इसलिये  $l$  का मान 1 और 2 के बीच में हुआ।

मानो कि  $l=1 + \frac{1}{v}$  तो

$$\text{फि}(1) = 61 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 - 1 = -24$$

$$\text{फि}'(1) = 122 \cdot 1^2 - 122 \cdot 1 - 20 = -20$$

$$\text{इफि}''(1) = 122 \cdot 1 - 64 = 58$$

इसलिये  $v$  के रूप में समीकरण

$-24v^2 - 20v^2 + 58v + 61 = 0$  ऐसा हुआ, चिन्हों के बदलने से  $24v^2 + 20v^2 - 58v - 61 = 0$  =  $\text{फि}(v)$ , इसमें भी परीक्षा से जानेंगे कि  $v$  का मान 1 और 2 के बीच में है। इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$y = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

इस पर से आसन्नमान ( हमारी शोधी भास्करीय बीज-गणित की टिप्पणी ४३-५२ पृष्ठ तक देखो )

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21} \dots \dots \dots$$

य का वास्तव मान और  $\frac{44}{21}$  का अन्तर  $\frac{1}{21(21+11)}$   
 $= \frac{1}{672}$  इससे कम होगा ।

$f(2)$ ,  $f'(2)$ ,  $\frac{1}{2}f''(2)$  इत्यादि के मान लाघव से जानने के लिये हानेर साहेब की क्रिया करनी चाहिए ( ३७वें प्रक्रम का विशेष देखो )

१५१—यदि  $\alpha$  और  $\alpha+1$  इनके बीच  $f(\alpha) = 0$  इसका एक से अधिक अव्यक्त मान हो तो स्टर्म के सिद्धान्त से वा किसी युक्ति से समझ लो कि  $\alpha$  और  $\alpha+1$  के बीच कितने अव्यक्त के मान हैं और  $\alpha$  से आगे किन किन भिन्नाङ्कों का एक एक मान पड़ा है ।  $f(\alpha) = 0$  इस पर से ३६वें प्रक्रम से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान, दिए हुए समीकरण के अव्यक्त मान से उस भिन्नाङ्क के हरगुणित तुल्य हो जिस भिन्न और  $\alpha$  के बीच में  $\alpha$  का एक मान हो । यदि दो भिन्नो के बीच में एक  $\alpha$  का मान पड़ा हो तो उन भिन्नो के

हरों के लघुतमापवर्त्य गुणित  $y$  के मान तुल्य जिसमें अव्यक्त के मान हों ऐसा नया समीकरण बनालो ।

अब इस नये समीकरण में स्पष्ट है कि एक एक अव्यक्त का मान अवश्य दो पास की अभिन्न संख्याओं के भीतर होगा । अब १५०वें प्रक्रम से इस नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्न मान निकालो । पहिले समीकरण के अव्यक्त मान से जै गुणित नये समीकरण के अव्यक्त मान हों उससे नये समीकरण के आसन्न मान में भाग दे देने से पहिले समीकरण में अव्यक्त के आसन्न मान आवेंगे । जैसे

उदाहरण—(१)  $y^3 - ७y + ७ = ०$  इसमें ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि सब मान संभाव्य है और स्टर्म के सिद्धान्त से जान पड़ेगा कि एक मान १ और  $\frac{1}{2}$  के बीच, दूसरा मान  $\frac{1}{2}$  और १ के बीच में है; इसलिये ३६ वें प्रक्रम से  $y = \frac{y'}{2}$  ऐसा

मानने से नया समीकरण  $\left(\frac{y'}{2}\right)^3 - \frac{7y'}{2} + 7 = 0$  छेद्गम से  $y'^3 - २८y' + ५६ = 0$  ऐसा होगा, इसमें अब एक मान २ और ३ के बीच, दूसरा ३ और ४ के बीच होगा ।

दो और तीन के बीच जो मान पड़ा है उसके जानने के लिये मान लो कि  $y = २ + \frac{1}{2}$  तो

$$f(y') = y'^3 - २८y' + ५६, \quad f'(y')$$

$$= ३y'^2 - २८, \quad f''(y') = ६y'$$

$$\therefore f(२) = २^3 - २८ \cdot २ + ५६ = ८$$

$$फ'(२) = ३ \cdot २^२ - २८ = -१६$$

$$\therefore फ''(२) = ३ \cdot २ = ६$$

इसलिये  $r$  के रूप में समीकरण  $८r^३ - १६r^२ + ६r + १ = ० = फा(r)$ , यहां यदि  $r = १$  तो  $फा(r)$  ऋण और  $r = २$  तो  $फा(r)$  धन होता है; इसलिये  $r$ ,  $१$  और  $२$  के बीच में पड़ा।

मान लो कि  $r = १ + \frac{१}{ल}$  तो

$$फा(r) = ८r^३ - १६r^२ + ६r + १$$

$$फा'(r) = २४r^२ - ३२r + ६$$

$$\therefore फा''(r) = ४८ - ३२$$

$$\therefore फा'''(r) = ८$$

इसलिये

$$फा(१) = ८ \cdot १^३ - १६ \cdot १^२ + ६ \cdot १ + १ = -१$$

$$फा'(१) = २४ \cdot १^२ - ३२ \cdot १ + ६ = -२$$

$$\therefore फा''(१) = ४८ - ३२ = ८$$

$$\therefore फा'''(१) = ८ = ८$$

इसलिये  $r$  के रूप में समीकरण

$$-ल^३ - २ल^२ + ८ल + ८ = ०$$

चिन्हों के बदलने से  $ल^३ + २ल^२ - ८ल - ८ = ० = फि(ल)$  यहां यदि  $ल = २$  तो  $फि(ल)$  ऋण और  $ल = ३$  तो  $फि(ल)$  धन होता है; इसलिये दो और तीन के बीच में  $ल$  हुआ। मान लो कि

$$ल = २ + \frac{१}{व} \text{ तो}$$

$$\text{फि}(ल) = ल^३ + २ल^२ - ८ल - ८$$

$$\text{फि}'(ल) = ३ल^२ + ४ल - ८$$

$$\text{३। फि}''(ल) = ६ल + ४$$

$$\text{४। फि}'''(ल) = ६$$

इसलिये

$$\text{फि}(२) = २^३ + २ \cdot २ - ८ \cdot २ - ८ = -८$$

$$\text{फि}'(२) = ३ \cdot २^२ + ४ \cdot २ - ८ = १२$$

$$\text{३। फि}''(२) = ६ \cdot २ + ४ = १६$$

$$\text{४। फि}'''(२) = ६ = ६$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$-८व^३ + १२व^२ + १६व + ६$ , चिन्हों के बदल देने से

$$८व^३ - १२व^२ - १६व - ६ = \text{फी}(व)।$$

यहां यदि  $व = २$  तो फी (व) ऋण और  $व = ३$  तो फी (व) धन होता है; इसलिये २ और ३ के बीच में व हुआ। इस प्रकार लगातार करने से

$$व = २ + \frac{१}{२ + \frac{१}{२ + \frac{१}{२ + \dots}}}$$

इससे आसन्न मान

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{16}{7} \dots$$

इनमें २ का भाग देने से य के आसन्न मान

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{16}{14}$$

यहां वास्तव मान और  $\frac{16}{14}$  इसका अन्तर  $\frac{1}{14(7+3)} = \frac{1}{140}$  इससे अल्प होगा।

३ और ४ के बीच में जो य' का मान है उसके जानने के लिये मान लो कि  $y = 3 + \frac{1}{r}$  तो

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 + 26 = -1$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 = -1$$

$$\frac{1}{2} f''(3) = 3 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{1}{6} f'''(3) = 1 = 1$$

इसलिये  $r$  के रूप में समीकरण

$$-r^3 - r^2 + 6r + 1 = 0, \text{ चिन्हों के बदलनेसे}$$

$$r^3 + r^2 - 6r - 1 = 0 = f_a(r)$$

यहां  $r = 2$  तो  $f_a(r)$  ऋण और  $r = 3$  तो  $f_a(r)$  धन होता है; इसलिये  $r$ , २ और ३ के बीच में हुआ।

मान लो कि  $r = 2 + \frac{1}{l}$  तो

$$\text{फा} (r) = r^3 + r^2 - ६r - १$$

$$\text{फा}' (r) = ३r^2 + २r - ६$$

$$\frac{१}{३} \text{फा}'' (r) = २r + १$$

$$\frac{१}{६} \text{फा}''' (r) = १$$

इसलिये

$$\text{फा} (२) = २^3 + २^2 - ६ \cdot २ - १ = -७$$

$$\text{फा}' (२) = ३ \cdot २^2 + २ \cdot २ - ६ = ७$$

$$\frac{१}{३} \text{फा}'' (२) = २ \cdot २ + १ = ७$$

इसलिये ल के रूप में समीकरण

$$-७ल^3 + ७ल^2 + ७ल + १ = ०, \text{ चिन्हों के बदल देने से}$$

$$७ल^3 - ७ल^2 - ७ल - १ = ० = \text{फि} (ल), \text{ यहाँ ल} = १$$

तो फि (ल) ऋण और ल = २ तो फि (ल) धन होता है  
इसलिये ल, १ और २ के बीच में हुआ।

मानो कि ल =  $१ + \frac{१}{ल}$  तो

$$\text{फि} (ल) = ७ल^3 - ७ल^2 - ७ल - १$$

$$\text{फि}' (ल) = २१ल^2 - १४ल - ७$$

$$\frac{१}{३} \text{फि}'' (ल) = २१ल - ७$$

$$\frac{१}{६} \text{फि}''' (ल) = ७$$

इसलिये

$$\text{फि} (१) = ७ \cdot १^3 - ७ \cdot १^2 - ७ \cdot १ - १ = -८$$

$$\text{फि}' (१) = २१ \cdot १^2 - १४ \cdot १ - ७ = ०$$

$$\frac{१}{३} \text{फि}'' (१) = २१ \cdot १ - ७ = १४$$



इसलिये व के रूप में समीकरण-

$$-व^2 + १४व + ७ = ०। \text{ चिन्हों के बदलने से}$$

$$व^2 - १४व - ७ = ० = \text{फी (व)}$$

यहां व = १ तो फी (व) ऋण और व = २ तो फी (व) धन होता है; इसलिये १ और २ के बीच में व हुआ।

इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$य' = ३ + \frac{१}{२ + \frac{१}{१ + \frac{१}{१ + \dots}}}$$

इस पर से आसन्न मान  $\frac{१}{१}, \frac{१}{२}, \frac{१}{३}, \frac{१}{४} \dots$  इनमें २ का भाग देने से

य के आसन्न मान

$$\frac{३}{२}, \frac{७}{४}, \frac{५}{३}, \frac{१७}{१०}।$$

$$\text{यहां वास्तव मान और } \frac{१७}{१०} \text{ का अन्तर } \frac{१}{१०(५+३)} = \frac{१}{८०}$$

इससे अल्प होगा।

$य^2 - ७य - ७ = ०$  इस समीकरण में ७३वें प्रक्रम से सिद्ध है कि एक अव्यक्त मान ऋण होगा। इसलिये य के स्थान में -य के उत्थापन से जो नया समीकरण बनेगा उसमें धन अव्यक्त मान के जो आसन्न मान त्याग्रांज की क्रिया से आवेंगे वे आदि समीकरण य के ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे।

अथवा यहां द्वितीय पद  $य^2$  के गुणक के शून्य होने से स्पष्ट है कि तीनों मानों का योग शून्य है; इसलिये ऊपर के दो

धनात्मक आसन्न मानों के योग को शून्य में घटा देने से शेष ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे । इस प्रकार यदि पहिले धनात्मक मान के आसन्न मान मा<sub>१</sub> और दूसरे धनात्मक मान के आसन्न मान मा<sub>२</sub> तुल्य बनाए गए हों तो इन पर से श्रद्ध-पाश की युक्ति से ऋणात्मक मान के आसन्न मान मा<sub>१</sub> मा<sub>२</sub> इतने बनेंगे ।

१५२—ल्याग्रांज की क्रिया को लगातार करने से कभी ऐसा भी होगा कि कहीं पर बने हुए समीकरण का अव्यक्त मान कोई अभिन्न धनात्मक संख्या हो । ऐसी स्थिति में उसी स्थान पर क्रिया रुक जायगी और अव्यक्त का मान एक भिन्न परिच्छिन्न मान के तुल्य होगा । परन्तु पहिले ही परिच्छिन्न मानानयन की युक्ति से यदि परिच्छिन्न मान जान कर दिए हुए समीकरण में उस मान सम्बन्धी जो अव्यक्त खण्ड का गुण्य गुणक रूप अवयव हो उसे अलग कर ऐसा समीकरण बना लिया जाय जिसमें परिच्छिन्न मान न हो तब इस समीकरण में आसन्न मान के लिये ल्याग्रांज की क्रिया में ऐसा कोई समीकरण न बनेगा जिसमें कोई परिच्छिन्न मान आवे ।

१५३—ल्याग्रांज की क्रिया करने में ऐसा भी संभव है कि क्रिया करते करते कहीं पर एक ऐसा समीकरण बन जाय जो कि पीछे बने हुए समीकरणों में से किसी एक के स्वरूप के तुल्य हो जाय, केवल अव्यक्त का कोई भेद हो तब स्पष्ट है कि वितत भिन्न को लब्धि फिर फिर वही आवेगी और आसन्न मान करणी रूप होगा । ऐसे वितत भिन्न का मान एक वर्ग समीकरण से द्विविध वर्गात्मक करणी के रूप में आवेगा ।

और ये द्विविध मान दिए हुए समीकरण में भी अव्यक्त के मान होंगे । ( मेरी शोधी भास्करीय बीजगणित के ६०—६५ पृष्ठों को देखो )

१५४—आसन्न मान जानने के लिए हार्नर साहेब की युक्ति—कल्पना करो कि  $f(x) = 0$  यह एक समीकरण है तो  $f(x+y) = 0$  यह एक ऐसा समीकरण होगा जिसमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे पहिले समीकरण के अव्यक्त मानों से अतुल्य संख्या में न्यून होंगे । और  $f(x+y) = 0$  का रूप ३७वें प्रक्रम से

$$f(x) + y f'(x) + y^2 \frac{f''(x)}{2!} + y^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \dots \dots$$

$$+ y^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0 \text{ ऐसा होगा ।}$$

इस पर से हार्नर ने यह रीति निकाली है कि पहिले दिए हुए समीकरण में जान लो कि किन दो संख्याओं के बीच में अव्यक्त का एक धनात्मक मान है, जैसे मान लो कि  $x$  से अधिक अव्यक्त का मान जान पड़ा तब  $x$  और दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान पहिले के अव्यक्त मान से अतुल्य न्यून हो फिर इस समीकरण में जान लो कि किस संख्या से अधिक अव्यक्त का धनात्मक मान है । फिर इस संख्या का और नये बने समीकरण पर से दूसरा एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें के अव्यक्त मान पिछले समीकरणों के अव्यक्त मानों से तुल्य न्यून हों

फिर इस दूसरे समीकरण में भी पूर्वतः वास्तव अव्यक्तमान का पता लगाओ फिर उस मान से तीसरा नया समीकरण बनाओ इस तरह अन्त में सब संख्याओं के तुल्य  $\phi(y) = 0$  इसमें  $y$  का धनात्मक मान होगा ।

इस क्रिया में लाघव से  $\phi(a)$ ,  $\phi'(a)$ ,  $\frac{\phi''}{2!}(a)$ ,  $\frac{\phi'''}{3!}(a)$  इत्यादि के मान जानने ही के लिये हार्नर ने सुगम रीति निकाली है जो ३७ प्रक्रम में विशेष लिख आये हैं ।

$\phi(y) = 0$  इसमें पहिले यदि इसका पता लगाओ कि  $10^m (a+1) 10^m$  के बीच में मान है तो वास्तव मान के अन्तिम स्थानीय अङ्क का मान  $a$  होगा । और पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का मान  $0$  और  $10^m$  होगा । मान लो कि  $10^{m-1}$  और  $10^m$  के भीतर इसका अव्यक्त मान है तो मुख्य समीकरण में वास्तव अव्यक्तमान की उपान्तिम स्थानीय संख्या  $k$  हुई और दूसरे नये समीकरण में अव्यक्त मान  $0$  और  $10^m - k 10^{m-1} = 10^{m-1} (10 - k)$  के बीच में होगा फिर इसमें जानो कि अव्यक्तमान  $10^{m-2}$  और  $10^{m-1} (10 - k)$  के बीच में है । इस तरह से लगातार क्रिया करने से वर्गमूल वा धनमूल के आनयन के ऐसा अन्त स्थान से वास्तव अव्यक्त मान के सब अंक विदित होते जायेंगे । जैसे

$$\text{उदाहरण—}(1) \ 2y^2 - 58y^2 + 284y + 266 = 0$$

इसमें परीक्षा से जान पड़ा कि अव्यक्त का एक मान  $40$  और  $40$  के बीच में है तो हार्नर की रीति से  $\phi(a)$ ,  $\phi'(a)$  इत्यादि के मान लो कि नये समीकरण में पदों के गुणक होंगे ।

२.	—८६	२५४	१६६	(४१.५)
	८०	—३६०	—४६००	
	—८	—११५	—४४३४	
	८०	२८४०	२८७८	
	७१	२७२५	—१५५६	
	८०	१५३	१५५६	
	१५१	२८७८	०	
	—	१५५		
	१५३	३०३३		
	२	७८		
	१५७	३११२		
	१			
	१५८			

सीढ़ी के ऐसी जो जो रेखायें हैं उनके नीचे प्रत्येक नये समीकरण के द्वितीयादि पदों के गुणक हैं। प्रथम पद का गुणक प्रत्येक समीकरण में वही होता है जो मुख्य समीकरण में प्रथम पद का गुणक है। जैसे यहां पहिला नया समीकरण  $२य^३ + १५१य^२ + २७२५य - १५५६ = ०$  यह होगा जिसमें १ और २ के बीच में अव्यक्तमान है फिर इससे दूसरा नया समीकरण  $२य^३ + १५७य^२ + ३०३३य - १५५६$  यह होगा जिसमें ठोक ठोक  $य = .५$  है।

यदि यहां दूसरे नये समीकरण में  $य$  का मान ठोक ठोक  $.५$  न होता तो फिर  $.५$  पर से और इस दूसरे नये समीकरण से तीसरा नया समीकरण बनाया जाता है और फिर इसमें पता लगाना होता कि किन किन दो दशमलवों के बीच में इसका अव्यक्तमान पड़ा है।

(२)  $२०य^३ - ६७य^२ - १५४य - ३२१ = ०$  इसमें अव्यक्त के धन मान को बताओ।

इसमें परीक्षा से जान पड़ता है कि धन अव्यक्तमान ५ और ६ के बीच में है। इसलिये हार्नर की रीति से।

-६७	-१५४	-३२१	(५-३५)
१००	१६५	- ५५	
५३	११	- २६६	
१००	६६५	२२४३१	
१३३	६७६	- ४१६६	
१००	७१७	४१६६	
२३३	७४७७	०	
६	७३५		
२३६	८२१२		
६	११६		
२४५	८३३८		
६			
२५१			
१			
२५२			

यहां पर पहिला नया समीकरण  $२०य^३ + २३३य^२ + ६७६य - २६६ = ०$  जिसमें अव्यक्तमान ३ और ४ के बीच में है फिर दूसरा नया समीकरण  $२०य^३ + २५१य^२ + ८३३८य - ४१६६ = ०$  जिसमें ठीक ठीक य = ०.५ ;

ऊपर के कर्म में दशमलव को यदि हटाना हो तो जिस नये समीकरण में दशमलव का संभव हो उसके अव्यक्त मानों को दशगुणित कर कर्म करना आरंभ करो अर्थात् ऊर्ध्वाधर

पंक्तिओं में जो नये समीकरण के पदों के गुणक आते हैं उनमें प्रथम पंक्ति वालों को १०, दूसरी पंक्ति वालों को १००, तीसरी पंक्ति वालों को १००० इत्यादि से गुण कर कर्म करना चाहिए। जैसे

(३)  $४य^१ - १३य^२ - ३१य - २७५ = ०$  इसमें ऊपर की युक्ति से यदि क्रिया की जाय और पहिले जान लिया जाय कि य का वास्तव मान ६ और ७ के बीच में है तो हार्नर की रीति से फ (अ), फ' (अ) इत्यादि के मानानयन के लिये और नये समीकरण के बनाने के लिये ३७ प्रक्रम की युक्ति से पहिले दशमलव लेकर कर्म

- १३	- ३१	- २७५	
२४	६६	२१०	
११	३५	- ६५	(६ २५
२४	२१०	५१ ३६२	
३५	२४५	- १३ ६०८	
२४	११ ६६	१३ ६०८	
५६	२५६ ६६	०	
०८	१० १०		
५६ ०८	२६६ ०८		
०८	३ ०८		
६० ०६	२७२ १६		
०८			
६१ ४			
०२			
६१ ६			

यह हुआ

और दशमलव हटाने की युक्ति से

—१३	—३१	—२७५ . (६.२५)
२४	६६	२१०
११	३५	—६५०००
२४	२१०	५१६६२
३५	२४५००	—१३६०००००
२४	११६६	१३६०००००
५६०	२५६६६	०
५	१२१२	
५६५	२६६००००	
५	३००००	
६०६	२७२१६००	
५		
६१४०		
२०		
६१६०		

यह लाघव से कर्म हुआ ।

१५५—हार्नर की रीति से जो  $f(a)$ ,  $f'(a)$  इत्यादि के मान आते हैं वे ही प्रत्येक सीढ़ी वाली रेखा की अन्त वाली सीढ़ी के उल्टे क्रम से संख्यायें हैं । इसलिये अन्त वाली सीढ़ी के नीचे की संख्या  $f(a)$  और इसके पीछे वाली सीढ़ी के अन्त की संख्या  $f'(a)$  होगी । इसलिये जहाँ पर कर्म करते करते  $f(a)$  यह  $f'(a)$  से संख्यात्मक मान से छोटा हो



तहां न्यूटन की रति से  $-\frac{f(a)}{f'(a)}$  यह बड़े लाघव से आगे के, समीकरणों में अव्यक्त का आसन्नमान वा मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का और अवयव आ जायेंगे; जैसे पिछले प्रक्रम के (३) उदाहरण में पहिले बार कर्म करने से  $f(a) = -६५$  और  $f'(a) = २४५$  इसलिये  $-\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{६५}{२४५} = २$  स्वल्पान्तर

से यह पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्नमान और मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का दूसरा अवयव आ जाता है। इसी प्रकार दूसरी बार क्रिया करने में जो  $f(a) = -१३६०८$  और  $f'(a) = २६६०८$  ये आते हैं इनसे  $-\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{१३६०८}{२६६०८} = ०५$  स्वल्पान्तर से यह दूसरे नये

समीकरण के अव्यक्त के आसन्नमान और मुख्य समीकरण के अव्यक्तमान का तीसरा अवयव आता है। इस प्रकार से दो तीन बार कर्म करने के अनन्तर (कभी कभी एक ही बार के अनन्तर) न्यूटन की रीति से सहज में नये समीकरणों के अव्यक्त के आसन्नमान का पता लग जायगा, व्यर्थ ढूढने में समय नष्ट होगा।

१५६—यदि अव्यक्त का मान किसी नियत दशमलव स्थान तक अपेक्षित हो तो आधे दशमलव स्थान से एकाधिक स्थान तक तो हार्नर की क्रिया पूरी करो फिर प्रत्येक नये

समीकरण के पदों के जो सीढ़ी के नीचे गुणक है उनमें उपान्तिम सीढ़ी के नीचे जो गुणक है उसकी एक स्थानीय संख्या काट कर अवशिष्ट संख्या को गुणक समझो। उसके पीछे वाले गुणक में एक और दश स्थानीय दोनों संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। इसके पीछे वाले गुणक में एक, दश और शत स्थानवाली तीन संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। ऐसे ही एक एक अधिक स्थानवाली संख्याओं को काट काट कर गुणकों को बनाकर क्रिया करो। क्रिया करने में इसके अनन्तर जो दूसरे समीकरण के गुणक हों उनमें भी ऊपर की युक्ति से संख्याओं को काट काट कर छोटे गुणक बना कर क्रिया करते जाओ। क्रिया करने में जहां गुणना हो तहां अन्तिम काटी हुई संख्या को भी अभिष्ट संख्या से गुण कर दशमलव के संक्षेप गुणन की युक्ति से केवल हाथ लेकर उसे एक स्थानीय सन्नधि गुणनफल में मिला कर आगे पूर्ववत् गुणन करते जाओ। जैसे—

उदाहरण—( १ )  $y^2 + 3y^2 - 2y - 4 = 0$  इसमें आठ दशमलव स्थान तक अव्यक्त का आसन्नमान जानना है तो पहिले पांच दशमलव तक हार्नर की पूरी क्रिया करने से

१	३	—२	—५	(१.३३००३)
१	४	४	२	
४	२			— ३०००
१	५			२६६७
५	७००			— २४३०००
१	१८८			३३२३५७
६०	८८८			— ६६३०००००००००
३	१८८			५६४५५२४७५१२५
६३	१०८७००			— १८८४७५२४८७५
३	२०७८			
६६	११०७७८			
३	२०८८			
६८०	११२८६७०००००००			
३	३४८५०२५			
६८३	११२८७०४८५०२५			
३	३४८५०५०			
६८६	११२८७३८८००७५			
३				
६८८०००				
५				
६८८००५				
५				
६८८०१०				
५				
६८८०१५				

यहां तक तो शून्य बढ़ाते क्रिया करने से अन्त के गुणकों से—

$y^2 + ६६६०१५ y^2 + ११२८७३६६००७५ y - ६८३४७५२४८७५$   
 $= ०$  ऐसा समीकरण होगा। इसमें स्पष्ट है कि  $y$  के स्थान  
 में कोई एक स्थानीय दशमलव  $k$  के उत्थापन से और दश-  
 मलव को भिन्न बनाने से

$$\frac{१}{१०००} k^2 + \frac{६६६०१५}{१००} k^2 + \frac{११२८७३६६००७५}{१०} k - ६८३४७५२४८७५$$

ऐसा होगा जहाँ हरों के भाग दे देने से स्वल्पान्तर से

$$६६६० k^2 + ११२८७३६६००७ k - ६८३४७५२४८७५$$

ऐसा होगा इस पर से गुणको में स्थानीय अङ्क काटने की  
 युक्ति उपपन्न हो जाती है। अब गुणकों के स्थानीय अंकों को  
 नियमानुसार काट काट कर क्रिया करने से।

११२८७३६६००७५ - ६८३४७५२४८७५	( १ ३३००५८७३
५४६०१	६०२६६६३६४३२
११२८७४५४६२६	- ८३४७८८५४४३
५४६२१	७६०१२६१०१८
११२८७५१०८५ ०	- ४४६६२४४०५
४८६	३३८६०५६२४
११२८७५१५७४	- १०७६६८८०१
४८६	
११२८७५२०६ ३	
२	
११२८७५२०८	
२	
११२८७५२१०	

अब यहाँ अन्त का समीकरण  $११२८७५२१० y - १०७६६८८०१$   
 $= ०$  यह हुआ जिसमें  $y = \frac{१०७६६८८०१}{११२८७५२१०}$

यहां दशमलव के संक्षेप भागाहार की विधि से लब्धि -६५६७८२५ आती है । इसे ऊपर के मान के आगे रख देने से मुख्य समीकरण में अव्यक्त का एक धन मान १ ३३००५८७३६५६७८८२५ यह आता है ।

इस प्रकार हार्नर की रीति से बड़े लाघव से बहुत दशमलव स्थानों तक आसन्नमान आता है ।

### अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१।  $y^2 - ४y - १० = ०$  इसमें जो धन अव्यक्तमान २ और ३ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन वा कमलाकर की रीति से निकालो ।

२।  $y^2 - ४y^2 - ७y + २५ = ०$  इसका २ और ३ के बीच का आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो ।

३।  $y^2 - ८y^2 + १२y^2 + ८y - ३ = ०$  इसमें जो धन मान ० और १ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो ।

४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में न्यूटन की रीति से एक धन अव्यक्तमान का आसन्नमान निकालो ।

$$(१) y^2 + ३y - ४ = ० ।$$

$$(२) y^2 + ३y^2 - ३y + १६ = ० ।$$

५। नीचे लिखे हुए समीकरणों में ल्यांगराज की रीति से अव्यक्त का आसन्नमान निकालो

$$(१) ३y^2 - २y^2 - ३y - २ = ० ।$$

$$(२) y^2 - १५y - ५ = ० ।$$

$$(३) \quad y^4 - ६y - १३ = ०, \text{ यहाँ } y = ३ + \frac{१}{५ + \frac{१}{१ + \frac{१}{१ + \dots}}}$$

६। हार्नर की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के मान निकालो।

$$(१) \quad २y^4 - ६५०८७y^2 + ५y - १६२७ = ०, \quad y = ३२५४।$$

$$(२) \quad y^4 - १२y^2 + १२y - ३ = ०, \quad y = ०.८५८०८३।$$

$$(३) \quad ४y^4 - १८०y^2 + १८६६y - ४५७ = ०, \quad y = ०.८५२१२७७३८।$$

$$(४) \quad y^4 - ८६y^2 + ६५८y - १३७६ = ०, \quad y = २.५५७२५१।$$

$$(५) \quad y^4 + २७y^2 - २३y - ७० = ०, \quad y = ५.११४५७८७२५२८।$$

$$(६) \quad y^4 + y^2 - २y - १ = ०, \quad y = -१.८०१६४ वा  
-०.४४५०४ वा  
१.२४६६८$$

७। हार्नर की रीति से ६७३३७३०६७१२५ इसका घनमूल निकालो।  
उ० ८७६५।

८। हार्नर की रीति से ५३७८२४ इसका पञ्चघात मूल निकालो।  
उ० १४।

९।  $y^4 + y^2 - ४y^2 - ३y^2 + ३y + १ = ०$ , इसमें जो मान  $-१$  और  $०$  के बीच में है उसका आसन्नमान पांच दशमलव स्थान तक निकालो।  
उ०  $-०.२८४६३।$

१०।  $y^2 - ११७०७y + ४०३८५ = ०$  इसमें दो संभाव्यमान निकालो।  
उ० ३४५५६२, २१४३०६७।

११।  $१४y^2 + १२y^2 - ६y - १० = ०$  इसमें धन अव्यक्त मान का आसन्नमान बताओ।  
उ० ०.८५६०६।

१२।  $७y^2 + २०y^2 + ३y^2 - १६y - ८ = ०$  इसमें धन अव्यक्तमान क्या है।  
उ० ०.६१३३६।

१३।  $y^2 + १२y^2 + ५६y^2 + १५०y^2 + २०१y - २०७ = ०$   
इसमें दश दशमलव स्थान तक धनाव्यक्त का आसन्नमान निकालो।  
उ० ६३८६०५८०३३।

१४।  $y^2 + ३०y^2 - ४००y + १००० = ०$  इसमें धनाव्यक्त के आसन्नमान बताओ।  
उ० ३५६८६५८४, ६६२०२१४७।

## १४-मानों के तद्रूपफल

१५७—दो वा अधिक वर्णों का फल यदि ऐसा हो कि किसी दो वर्णों के परस्पर बदल देने से भी फल के मान में विकार न हो तो ऐसे फल को उन वर्णों का तद्रूपफल कहते हैं।

जैसे यदि  $f(y, r) = y^m + r^m$  तो यहां  $y$  के स्थान में  $r$  और  $r$  के स्थान में  $y$  के बदलने से भी  $f(y, r) = r^m + y^m = y^m + r^m$  ऐसा होता है; इसलिये ऐसे  $y$  और  $r$  के फल को उनका तद्रूपफल कहते हैं। इसी प्रकार  $f(y, r, l) = y^m + r^m + l^m$  इसमें किसी दो को परस्पर बदलने से फल के मान में विकार

नहीं होता। इसलिये इसे और  $फ (य, र, ल) = य + र + ल$  इसमें भी किसी दो वर्णों को परस्पर बदलने से फल में विकार नहीं होता। इसलिये इसे भी उन वर्णों के तद्रूपफल कहते हैं। इस प्रकार और भी तद्रूपफलों का उदाहरण जान लेना चाहिए।

१५८—किसी समीकरण के पदों के गुणक अव्यक्तमानों के तद्रूपफल होते हैं।

क्योंकि २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$य^n + प_1 य^{n-1} + प_2 य^{n-2} + \dots + प_n = 0 \text{ इसमें}$$

$-प_1 =$  सब मानों का योग।

$प_2 =$  दो दो मानों के घात का योग।

$-प_3 =$  तीन तीन मानों के घात का योग।

.....

इनमें किसी दो मानों को परस्पर बदलने से भी स्पष्ट है कि फलों के मान में भी विकार नहीं होगा। इसलिये ये सब गुणक मानों के तद्रूपफल हैं।

इस अध्याय में यह दिखाया जायगा कि समीकरण में जो अव्यक्त के मान हैं उनके किसी करणीगत तद्रूपफल को समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं। इसके पहिले नीचे लिखे हुए संकेतों से परिचय करना आवश्यक है।

१५९— $फ (य) = य^n + प_1 य^{n-1} + प_2 य^{n-2} + \dots + प_n = 0$  इसमें यदि अव्यक्त के मान अ, क, ख, ग, ... इत्यादि हों तो



$$\left. \begin{aligned}
 (१) \quad s_1 &= अ + क + ख + ग \dots\dots\dots \\
 s_2 &= अ^2 + क^2 + ख^2 + ग^2 \dots\dots\dots \\
 s_3 &= अ^3 + क^3 + ख^3 + ग^3 \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 s_m &= अ^m + क^m + ख^m + ग^m \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\}$$

( २ ) यदि  $f(अ, क, ख, ग, \dots\dots) = अ^m + क^m + ख^m + ग^m + \dots\dots$  तो ( जिनमें प्रत्येक पद में एक ही अवयव का घात है ) ऐसे फल को प्रथम क्रम का फल कहते हैं ।

( ३ ) यदि प्रत्येक पद में दो दो मान के घातों के गुणनफल हों तो उसे दूसरे क्रम का फल कहते हैं । जैसे

$f(अ, क, ख, ग, \dots\dots) = अ^m क^p + अ^m ख^p + क^m ख^p + \dots\dots$   
 इसे दूसरे या द्वितीय क्रम का फल कहते हैं । इसे लाघव से यौ  $अ^m क^p$  ऐसा लिखते हैं । इसका यह अर्थ है कि अ, क, ख, . . मानों से दो दो मानों के लेने से एक का म घात और दूसरे का प घात कर परस्पर गुण देने से भिन्न भिन्न जितनी संख्यायें होंगी उनका योग = यौ  $अ^m क^p$

( ४ ) तृतीय क्रम का फल वह है जिसमें प्रत्येक पद में तीन मानों के घातों का गुणनफल हो । जैसे

$f(अ, क, ख, ग, \dots\dots) = अ^m क^p ख^q + अ^m ख^p ग^q + अ^m क^p ग^q + \dots\dots$   
 इसे तृतीय क्रम का फल कहते हैं और लाघव से इसे यौ  $अ^m क^p ख^q$  ऐसा लिखते हैं । इसका भी (३) के ऐसा यह अर्थ है कि मानों से  $अ^m क^p ख^q$  ऐसे जितने पद बने हैं उनका योग = यौ  $अ^m क^p ख^q$  । इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि फल और उनके लाघव से संकेतों को समझो ।

द्वितीय क्रम, तृतीय क्रम इत्यादि के फलों में यह भी जानना चाहिए कि प्रत्येक पद में मानों के घात संख्याओं का योग स्थिर है। जैसे द्वितीय क्रम के फल में सर्वत्र हेर फेर से म और प के होने से  $m + p$  स्थिर है और तृतीय क्रम के फलों में सर्वत्र हेर फेर से म, प और व के होने से  $m + p + v$  स्थिर है। इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि के फलों में भी जानो।

१६०—५वें प्रक्रम में त, थ, द... को एक के समान मान लेने से

$$f'(y) = \frac{f(y)}{y-a} + \frac{f(y)}{y-b} + \frac{f(y)}{y-c} + \dots \quad \text{प्रत्येक हर से } f(y) \text{ में } n \text{ प्रक्रम से भाग लेने पर लब्धि (जहां } p_0 = 1 \text{ मान लेना चाहिए) अर्थात् } \frac{f(y)}{y-a} = y^{n-1} + (a+p_1)y^{n-2} + (a^2+p_1a+p_2)y^{n-3} + \dots + (a^m+p_1a^{m-1}+p_2a^{m-2}+\dots+p_m)y^{n-m-1} + \dots$$

इसी चाल की लब्धि  $f'(y)$  में  $y-b, y-c, \dots$  इत्यादि के भाग देने से आवेगी। इसलिये सब लब्धियों के जोड़ने से

$$f'(y) = ny^{n-1} + (s_1 + np_1)y^{n-2} + (s_2 + p_1s_1 + np_2)y^{n-3} + \dots + (s_m + p_1s_{m-1} + p_2s_{m-2} + \dots + np_m)y^{n-m-1} + \dots$$

परन्तु  $f'(y) = ny^{n-1} + (n-1)p_1y^{n-2} + (n-2)p_2y^{n-3} + \dots + (n-m)p_my^{n-m-1} + \dots$

दोनों समीकरणों में  $y$  के समान घातों के गुणक समान करने से

$$s_1 + n, p_1 + = (n-1)p_1 \text{ वा } s_1 + p_1 = 0$$

$$s_2 + p_1 s_1 + n p_2 = (n-2)p_2 \text{ वा } s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0$$

साधारण से—

$$s_m + p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} + \dots + n p_m = (n-m)p_m$$

$$\text{वा } s_m + p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} + \dots + n p_m = 0$$

इसमें यह मान लिया गया है कि  $m < n$  ।

इसमें पिछले का उत्थापन देने से  $s_2, s_3, \dots$  इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायगे । जैसे

$s_1 + p_1 = 0 \therefore s_1 = -p_1$  यह २५वें प्रक्रम के ५ वें प्र० सि० से भी सिद्ध है ।

$s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = s_2 - p_1^2 + 2p_2 = 0 \therefore s_2 = p_1^2 - 2p_2$  यह ३३वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है ।

$$s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = s_3 + p_1^3 - 2p_1 p_2$$

$$- p_1 p_2 + 3p_3$$

$$= s_3 + p_1^3 - 2p_1 p_2 + 3p_3 = 0$$

$\therefore s_3 = 2p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3$ , यही दूसरे अध्याय के अभ्यास के लिये जो प्रश्न हैं उनमें ८वें प्रश्न का उत्तर है । इस प्रकार आगे के समीकरण में पिछले  $s_1, s_2$  इत्यादि के उत्थापन से स्पष्ट है कि  $s_1, s_2, s_3$  इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आवेंगे ।

यदि  $m > n$  तो  $f_m(y) = 0$  इसे  $y^{m-n}$  इससे गुण देने से

$$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_n y^{m-n} = 0 \text{ ऐसा}$$

होगा इसमें  $y$  के स्थान में क्रम से  $y$  के मान  $a, k, x$  इत्यादि के उत्थापन से

$$अ^म + प_1 अ^{म-१} + प_2 अ^{म-२} + \dots + प_n अ^{म-n} = ०$$

$$क^म + प_1 क^{म-१} + प_2 क^{म-२} + \dots + प_n क^{म-n} = ०$$

.....

सब को जोड़ देने से

$$स^म + प_1 स^{म-१} + प_2 स^{म-२} + \dots + प_n स^{म-n} = ०$$

अब इस पर से म के स्थान में  $n+1$ ,  $n+2$ , इत्यादि के स्थापन से और  $s_n$ ,  $s_{n-1}$  इत्यादि के मानों से  $s_{n+1}$ ,  $s_{n+2}$  इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायँगे, ऊपर जो रीति मानों के घातयोग जानने के लिये दिखाई गई है उसे न्यूटन ने निकाला है इसलिये इसे न्यूटन की रीति कहते हैं।

व्यवहार में नीचे की युक्ति से सुभीता पड़ेगा।

यह सिद्ध है कि

$$फ'(य) = \frac{फ(य)}{य-अ} + \frac{फ(य)}{य-क} + \frac{फ(य)}{य-ख} + \dots$$

इसलिये

$$\begin{aligned} \frac{य फ'(य)}{फ(य)} &= \frac{य}{य-अ} + \frac{य}{य-क} + \frac{य}{य-ख} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{अ}{य}\right)^{-१} + \left(1 - \frac{क}{य}\right)^{-१} + \left(1 - \frac{ख}{य}\right)^{-१} + \dots \\ &= १ + \frac{अ}{य} + \frac{अ^२}{य^२} + \frac{अ^३}{य^३} + \dots \end{aligned}$$

इसलिये  $य फ'(य)$  इसमें बीजगणित की साधारण रीति से  $फ(य)$  का भाग देने से लब्धि में जो  $\frac{१}{य}$ ,  $\frac{१}{य^२}$ , इत्यादि के गुणक होंगे वे  $s_1, s_2$  इत्यादि के मान आ जायँगे।

१६१— $f(y) = 0$  इसमें मानों के ऋणात्मक घातों का योग जानना हो तो  $f(y)$  में  $y = \frac{1}{r}$  ऐसा मानने से जो  $r$  के रूप में समीकरण बनेगा उसमें  $r$  के मानों के वही धनात्मक घातों के योग का जो मान होगा वही  $y$  के मानों के ऋणात्मक घातों का योग होगा क्योंकि  $y = \frac{1}{r} \therefore r = \frac{1}{y}$  और  $r^m = \frac{1}{y^m} = y^{-m}$  । अथवा ऊपर के प्रक्रम में जो

$s_m + p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} + \dots + p_n s_{m-n} = 0$   
यह सिद्ध हुआ है इसमें  $m$  के स्थान में  $n-1, n-2, n-3, \dots$  इत्यादि के उत्थापन से पूर्वयुक्ति से  $s_{-1}, s_{-2}$  इत्यादि के मान आ जायेंगे ।

१६२—यौ  $अ^म क^प$  इसका मान जानने के लिये उपाय पूर्वसिद्ध है कि

$$s_m = अ^म + क^म + ख^म + \dots$$

$$s_p = अ^प + क^प + ख^प + \dots$$

दोनों के गुणन से

$$\begin{aligned} s_m s_p &= अ^{म+प} + क^{म+प} + ख^{म+प} + \dots \\ &\quad + अ^म क^प + अ^म ख^प + क^म अ^प + \dots \\ &= s_{म+प} + यौ अ^म क^प \end{aligned}$$

$$\text{इसलिये यौ अ^म क^प} = s_m s_p - s_{म+प} \dots \dots (१)$$

इसमें यह मान लिया गया है कि  $m$  और  $p$  परस्पर अतुल्य हैं । यदि  $m = p$  तो यौ अ^म क^प इसमें दो दो तुल्य होंगे । इसलिये

यौ अमकप = २ यौ (अक)<sup>म</sup> और तव (१) से २यौ (अक)<sup>म</sup>  
= स<sub>म</sub><sup>२</sup> - स<sub>२म</sub> ।

१६३—इसी प्रकार तृतीय क्रम फल यौ अमकपख<sup>व</sup> इसका मान जानना हो तो

$$\text{यौ अमकप} = \text{अमकप} + \text{कमखप} + \text{अमखप} + \dots$$

$$\text{स<sub>व</sub>} = \text{अ<sup>व</sup>} + \text{क<sup>व</sup>} + \text{ख<sup>व</sup>} + \dots$$

दोनों के गुणन से

$$\begin{aligned} \text{स<sub>व</sub> यौ अमकप} &= \text{अम<sup>म+व</sup>कप} + \text{कम<sup>म-व</sup>खप} + \text{खम<sup>म+व</sup>अप} + \dots \\ &+ \text{अमकप<sup>म+व</sup>} + \text{कमखप<sup>म-व</sup>} + \text{खमअप<sup>म+व</sup>} + \dots \\ &+ \text{अमकपख<sup>व</sup>} + \dots \end{aligned}$$

दक्षिण पक्ष में तीन प्रकार के समूह हैं जिन्हें १५६वें प्रक्रम की संकेत युक्ति से क्रम से यौ अम<sup>म+व</sup>कप, यौ अमकप<sup>म+व</sup> और यौ अमकपख<sup>व</sup> इन संकेतों से प्रकाश कर सकते हैं। इसलिये स<sub>व</sub> यौ अमकप = यौ अम<sup>म+व</sup>कप + यौ अमकप<sup>म+व</sup> + यौ अमकपख<sup>व</sup> १६२वें प्रक्रम के (१) से यौ अमकप, यौ अम<sup>म-व</sup>कप और यौ अमकप<sup>म+व</sup> = यौ अप<sup>म+व</sup>कम के मान रखने से और समशोधन से

$$\begin{aligned} \text{यौ अमकपख<sup>व</sup>} &= \text{स<sub>म</sub>स<sub>प</sub>स<sub>व</sub>} - \text{स<sub>व</sub>स<sub>म+प</sub>} - \text{स<sub>म+व</sub>स<sub>प</sub>} + \text{स<sub>म-प+व</sub>} \\ &- \text{स<sub>म</sub>स<sub>प+व</sub>} + \text{स<sub>म+प+व</sub>} \\ &= \text{स<sub>म</sub>स<sub>प</sub>स<sub>व</sub>} - \text{स<sub>व</sub>स<sub>म+प</sub>} - \text{स<sub>म+व</sub>स<sub>प</sub>} - \text{स<sub>म</sub>स<sub>प+व</sub>} + २\text{स<sub>म+प+व</sub>} \cdot (१) \end{aligned}$$

यहां भी यह मान लिया है कि म, प और व अतुल्य हैं।

यदि म = प तो १६२वें प्रक्रम से

$$\begin{aligned} २ \text{ यौ (अक)<sup>म</sup>ख<sup>प</sup>} &= \text{स<sub>म</sub>स<sub>व</sub>} - \text{स<sub>२म</sub>स<sub>व</sub>} - \text{स<sub>म+व</sub>स<sub>म</sub>} - \text{स<sub>म+व</sub>स<sub>म</sub>} \\ &+ २\text{स<sub>२म+व</sub>} \\ &= \text{स<sub>म</sub>स<sub>व</sub>} - \text{स<sub>२म</sub>स<sub>व</sub>} - २\text{स<sub>म+व</sub>स<sub>म</sub>} + २\text{स<sub>२म+व</sub>} \cdot (२) \end{aligned}$$

यदि  $m = p = v$  तो यौ  $अ^m क^p ख^v$  इसमें ६, ६ पद समान होंगे, इसलिये यौ  $अ^m क^p ख^v = १.२.३$  यौ  $(अ क ख)^m$

तब ६ यौ  $(अ क ख)^m = स_म^3 - ३स_२मस_म + २स_३म \dots (३)$

इसी प्रकार यौ  $अ^m क^p ख^v$  के मान से ऊपर ही की युक्ति से यौ  $अ^m क^p ख^q ग^m$  इत्यादि के मान भी जान सकते हो ।

यदि  $m = p = v = ३, \dots \dots$  इत्यादि त संख्यायें परस्पर समान हों तो अङ्कपाश की युक्ति से  $१.२.३ \dots \dots$  त, इतने पदों में सम्मान ही होंगे । इसलिये तब यौ  $अ^m क^p ख^q ग^m \dots = १.२.३ \dots \dots$  त यौ  $(अ क ख ग \dots)^m$  ऐसा होगा ।

इस प्रकार से सिद्ध हो गया कि मानों के द्वितीय, तृतीय इत्यादि क्रम के फलों के मानों का योग समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आता है ।

१६४—१६०वें प्रक्रम में मानों के वर्णादि योग के लिये जो न्यूटन की रीति दिखलाई गई है उसमें पिछले योगों के वश से तब अगले योग का मान निकलता है; इस प्रक्रम में बिना पिछले योगों के जाने इष्टयात संबन्धि योग जानने के लिये रीति दिखलाते हैं ।

मान लो कि  $फ (य) = ०$  इसमें  $य$  के मान  $अ, क, ख, ग$ , हैं । और समीकरण न घात का है तो

$फ (य) = (य - अ) (य - क) (य - ख) (य - ग) \dots \dots$   
दोनों में  $य^n$  का भाग देने से

$$\frac{फ (य)}{य^n} = \left(1 - \frac{अ}{य}\right) \left(1 - \frac{क}{य}\right) \left(1 - \frac{ख}{य}\right) \left(1 - \frac{ग}{य}\right) \dots \dots$$

दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से

$$\begin{aligned} \text{ला } \frac{f(y)}{y^n} &= -\frac{1}{y} (a + k + l + \dots) \\ &= -\frac{1}{2y^2} (a^2 + k^2 + l^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{3y^3} (a^3 + k^3 + l^3 + \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ &= -\frac{s_1}{y} - \frac{s_2}{2y^2} - \frac{s_3}{3y^3} - \dots - \frac{s_m}{my^m} \end{aligned}$$

इसलिये ला  $\frac{f(y)}{y^n}$  इसमें  $y$  के  $m$  घात का जो गुणक गुप्त

हो तो  $-g_m = \frac{s_m}{m} \therefore s_m = -mg_m$  ।

जैसे उदाहरण—(१)  $y^2 - py + v = 0$  इसमें

$$\begin{aligned} \frac{f(y)}{y^n} &= \frac{f(y)}{y^2} = 1 - \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right) \text{ इसलिये} \\ -\text{ला } \frac{f(y)}{y^n} &= -\text{ला } \left\{ 1 - \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right) \right\} \\ &= \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{m} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^m \end{aligned}$$

सब पदों में से चुन लेने से  $\frac{1}{y^m}$  का गुणक अब जान सकते हैं। ऊपर के मान को उलटे क्रम से लिखने से



$$\frac{1}{m} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^m + \frac{1}{m-1} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^{m-1} \\ + \frac{1}{m-2} \left( \frac{p}{y} - \frac{v}{y^2} \right)^{m-2} + \dots \dots$$

इसमें  $\frac{1}{y^m}$  गुणकों को इकट्ठा करने से  $\frac{1}{y^m}$  का गुणक

$$g_m = \frac{1}{m} p^m - \frac{1}{m-1} p^{m-2} v \\ + \frac{1}{m-2} \frac{(m-2)(m-3)}{2!} p^{m-4} v^2 \dots \dots \text{इसलिये}$$

$$s_m = p^m - m p^{m-2} v + \frac{m(m-3)}{2!} p^{m-4} v^2 - \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{t(-1)^m (m-m-t-1) \dots (m-2t-1)}{t!} p^{m-2t} v^t + \dots$$

$$\text{१६५—} f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + p_3 y^{n-3} \\ + \dots \dots \dots + p_n$$

$$\equiv (y-a)(y-b)(y-c) \dots \dots \dots$$

जहाँ  $f(y) = 0$  इसमें अव्यक्त के मान  $a, b, c, \dots$  हैं।

ऊपर के सरूप समीकरण में  $y$  के स्थान में  $\frac{1}{r}$  का अस्थापन देने

$$\text{से } 1 + p_1 r + p_2 r^2 + p_3 r^3 + \dots \dots \dots + p_n r^n$$

$$\equiv (1-ar)(1-br)(1-cr) \dots \dots \dots (\text{सरूप समीकरणों की}$$

समता दिखाने के लिये  $\equiv$  चिन्ह लिखते हैं। जिन दो अव्यक्त-  
राशिओं के बीच ऐसा चिन्ह देखो समझो कि सरूप समीकरण  
हैं जहाँ दोनों पक्षों के अव्यक्त के स्थान में चाहे जिस संख्या का

दो सर्वदा दोनों पक्ष सम रहेंगे । ) ऊपर के सरूपसमीकरण में उत्थापन दोनों पक्षों का लघुरिक्त्य लेने से और

$$(च + छ + ज + \dots)r = \overset{च}{+छ} र \text{ ऐसे संकेत से लिखने से } +ज$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} p_1 r + p_2 & r^2 + p_3 & r^2 + p_4 & r^3 + p_5 & r^4 + \dots + पात र^n \\ - \frac{1}{2} p_1 r^2 & - p_1 p_3 & - p_1 p_4 & - p_2 p_3 & + \dots \\ + \frac{1}{2} p_1 r^2 & & - \frac{1}{2} p_1 r^2 & + p_1 p_2 & \\ & & + p_2 p_3 & + p_2 p_4 & \\ & & - \frac{1}{2} p_1 r^2 & - p_1 p_4 & \\ & & & - p_2 p_3 & \\ & & & + \frac{1}{2} p_1 r^2 & \end{array}$$

$$\equiv -स_1 र - \frac{1}{2} स_2 र^2 - \frac{1}{2} स_3 र^3 - \dots - \frac{1}{2} स_न र^n - \dots$$

दोनों पक्षों के र^n का गुणक समान करने से

सत = -तपात जहां पात, लारन  $\left(\frac{1}{r}\right)$  इसमें र^n का गुणक है । न के स्थान में म को रख देने से इस युक्ति से भी सम का मान जान सकते हो ।

१६६—समीकरण में पदों के गुणकों के मान अव्यक्त-मानों के एक द्विधादि घातों के रूप में ले आने के लिये युक्ति । ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध है कि ला  $(1 + p_1 r + p_2 r^2 + p_3 r^3 + \dots + पन र^n) \equiv -स_1 र - \frac{1}{2} स_2 र^2 - \frac{1}{2} स_3 र^3 - \dots$  इसलिये

$$1 + p_1 r + p_2 r^2 + p_3 r^3 + \dots + पन र^n =$$

$$\frac{1}{-स_1 र - \frac{1}{2} स_2 र^2 - \frac{1}{2} स_3 र^3 - \dots}$$

जिसका विस्तृत रूप दीर्घवृत्त लक्षण से

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 1 - s_1, r - \frac{1}{2}s_2 & r^2 - \frac{1}{2}s_3 & r^3 - \frac{1}{2}s_4 & r^4 - \dots \\
 + \frac{1}{2!} s_2^2 & + \frac{s_1 s_2}{2!} & + \frac{1}{3!} s_1 s_3 & \\
 & - \frac{s_2^3}{3!} & - \frac{1}{4!} s_1^2 s_2 & \\
 & & + \frac{1}{2 \cdot 4} s_2^2 & \\
 & & + \frac{s_1^4}{4!} & 
 \end{array}$$

अब दोनों पक्षों में  $r$  के समान घातों के गुणक समान करने से  $p_1, p_2$  इत्यादि के मान  $s_1, s_2$  इत्यादि के रूप में आजायंगे।

१६७—इस प्रक्रम में इस अध्याय में दिखाए हुए प्रकारों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण किया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण—( १ )  $\phi_1(x_1) + \phi_2(x_2) + \phi_3(x_3) + \dots + \phi_n(x_n)$  इसका मान निकालो। जहाँ  $\phi_0(y) = 0$  इस न घात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  हैं।

सिद्ध है कि

$$\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} = \frac{1}{y-x_1} + \frac{1}{y-x_2} + \frac{1}{y-x_3} + \dots + \frac{1}{y-x_n}$$

और  $\frac{\phi'(y)\phi(y)}{\phi(y)} = \frac{\phi_1(y)}{y-x_1} + \frac{\phi_2(y)}{y-x_2} + \frac{\phi_3(y)}{y-x_3} + \dots + \frac{\phi_n(y)}{y-x_n}$

हरों से तष्ट कर देने से

$$\frac{ता_0 य^{n-1} + ता_1 य^{n-2} + \dots + ता_{n-1}}{फ(य)} = \frac{फा(अ_1)}{य-अ_1} + \frac{फा(अ_2)}{य-अ_2} + \dots + \frac{फा(अ_n)}{य-अ_n}$$

छेदगम से

$-ता_0 य^{n-1} + ता_1 य^{n-2} + \dots + ता_{n-1} =$   
यौ फा (अ<sub>१</sub>)(य-अ<sub>२</sub>)(य-अ<sub>३</sub>) ... (य-अ<sub>न</sub>) य<sup>n-१</sup> के  
गुणक को दोनों पक्षों में समान करने से

$$-ता_0 = फा(अ_1) + फा(अ_2) + \dots + फा(अ_n) = यौ फा(अ_1)$$

(२) सिद्ध करो कि त = न यौ  $\frac{फा(अ_n)}{फ'(अ_n)} = ०$  यदि त यौ = न इससे  
त = १ यौ  $\frac{फा(अ_n)}{फ'(अ_n)} = ०$  त यौ = १

यह समझा जाय कि त के स्थान में, १, २, ३, ... न उत्था-  
पन देने से जितने पद होंगे सब का योग है। और फा (य)  
ऊपर के उदा० में अकरणी गत अभिन्न य का फल है जिसमें  
य का सब से बड़ा घात < न है।

यहां चत्तराशिकलन के १५वें प्रक्रम-से

$$\begin{aligned} \frac{फा(य)}{फ(य)} &= \frac{अ_1}{य-अ_1} + \frac{अ_2}{य-अ_2} + \dots + \frac{अ_n}{य-अ_n} \\ &= \frac{फा(अ_1)}{फ'(अ_1)} \frac{१}{य-अ_1} + \frac{फा(अ_2)}{फ'(अ_2)} \frac{१}{य-अ_2} + \dots \\ &\quad + \frac{फा(अ_n)}{फ'(अ_n)} \frac{१}{य-अ_n} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{y \text{ फा}(y)}{\text{फा}(y)} = \frac{तयौ = न}{तयौ = १ \text{ फा}(अत)} \left( १ + \frac{अत}{y} + \frac{अत^२}{y^२} + \dots \dots \dots \right)$$

जब फा (य) में य का सब से बड़ा घात  $n-२$  होगा तो य से गुणने से य फा (य) इसमें सबसे बड़ा घात  $n-१$

होगा; इसलिये  $\frac{y \text{ फा}(y)}{\text{फा}(y)} = \frac{का_१}{y} + \frac{का_२}{y^२} + \dots \dots \dots$  इस रूप

का होगा और यदि सब से बड़ा घात  $< n-२$  तो  $\frac{y \text{ फा}(y)}{\text{फा}(y)}$

इसका विस्तृत रूप जो  $\frac{१}{y}$  इसके घात वृद्धि में होगा उसमें

$\frac{१}{y}$  इसके वर्गादि रहेंगे। व्यक्ताङ्क वा  $\frac{१}{y}$  नहीं रहेंगे।  $\therefore$  दहिने

पक्ष में जो व्यक्ताङ्क  $\frac{तयौ = न \text{ फा}(अत)}{तयौ = १ \text{ फा}(अत)}$  यह है; वह अवश्य सर्वदा शून्य के तुल्य होगा।

फा, यह अकरणी गत अभिन्न,  $n-२$  घात से अल्प य का फल है; इसलिये  $\text{फा}(अ_१) = अ_१^{n-२}, अ_१^{n-३}, अ_१^{n-४}, \dots \dots अ_१^०$  मानने से ऊपर की युक्ति से

$$यौ \frac{अ_१^{n-२}}{\text{फा}(अ_१)} = ०, यौ \frac{अ_१^{n-३}}{\text{फा}(अ_१)} = ० \dots \dots, यौ \frac{अ_१}{\text{फा}(अ_१)} = ०,$$

$$यौ \frac{१}{\text{फा}(अ_१)} = ०।$$

(३) जिन वर्णों के घातों के गुणनफल में घात संख्याओं का योग स्थिर रहता है ऐसे गुणनफल को ध्रुवशक्तिक कहते हैं। और इनसे बने हुए समीकरण को ध्रुवशक्तिक समीकरण

कहते हैं। जैसे,  $y^4, y^4r, y^4r^2, y^4r^3, r^4$  इन सब को दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक गुणनफल कहते हैं। और  $y^4 + y^4r + y^4r^2 + y^4r^3 + r^4 + क = ०$  इसे दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक समीकरण कहते हैं जहाँ ध्रुवशक्ति का प्रमाण ४ है।

$फ(y) = ०$  इसमें जितने अव्यक्तमान हैं उनके ध्रुवशक्तिक गुणनफलों के योग शून्य को बताओ जहाँ त ध्रुवशक्ति का प्रमाण है अर्थात् घात संख्याओं का योग है। मान लो कि  $अ_1,$

$अ_2 \dots अ_n$  अव्यक्तमान हैं तो  $r = \frac{1}{y}$  मानने से

$$\begin{aligned} \frac{य^n}{फ(y)} &= \frac{1}{(1-अ_1r)(1-अ_2r) \dots (1-अ_nr)} \\ &= (1+अ_1r+अ_1^2r^2+\dots)(1+अ_2r+अ_2^2r^2+\dots) \\ &\quad \dots\dots (1+अ_nr+अ_n^2r^2+\dots\dots) \\ &= 1+अ_1r+अ_2r^2+अ_3r^3+\dots + अ_n r^n + \dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{और } \frac{य^{n-1}}{फ(y)} = यौ \frac{अ_1^{n-1}}{फ'(अ_1)} \cdot \frac{1}{y-अ_1} \quad (२) \text{ उदाहरण से;}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये } \frac{य^n}{फ(y)} &= यौ \frac{अ_1^{n-1}}{फ'(अ_1)} \cdot \frac{y}{y-अ_1} \\ &= यौ \frac{अ_1^{n-1}}{फ'(अ_1)} \cdot \frac{1}{1-अ_1r} \\ &= यौ \frac{अ_1^{n-1}}{फ'(अ_1)} (1+अ_1r+अ_1^2r^2+\dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots + अ_1^{n-1}r^{n-1}+\dots\dots\dots) \\ &= यौ \frac{अ_1^{n-1}}{फ'(अ_1)} r^n \end{aligned}$$

दोनों सरूप समीकरणों में  $r^n$  का गुणक समान करने से

$$r^n = y^{\frac{a_n + t - 1}{p_1(a_1)}} \quad ।$$

(४) मानों के भ्रुवशक्तिक गुणनफल के रूप में समीकरण के पदों का गुणक बतावो। और इसका विपरीत गुणकों के रूप में मानों के भ्रुवशक्तिक गुणनफलों को बतावो। पिछले उदाहरण से

$$(1 - a_1 r)(1 - a_2 r) \dots (1 - a_n r) = 1 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n$$

$$\text{और } \frac{1}{(1 - a_1 r)(1 - a_2 r)} = 1 + sh_1 r + sh_2 r^2 + \dots$$

$$\therefore 1 = (1 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n)(1 + sh_1 r + sh_2 r^2 + \dots)$$

गुणन करने से सरूप समीकरण की युक्ति से

$$p_1 + sh_1 = 0$$

$$p_2 + sh_2 + p_1 sh_1 = 0$$

$$p_3 + sh_3 + p_1 sh_2 + p_2 sh_1 = 0 \quad \text{इत्यादि}$$

इनसे  $sh_1, sh_2$  इत्यादि के रूप में  $p_1, p_2$ , इत्यादि और  $p_1, p_2$ , इत्यादि के रूप में  $sh_1, sh_2$  इत्यादि आवेंगे। इनमें यदि  $t < n$  तो  $p_1, p_2, \dots$  और  $sh_1, sh_2$  इत्यादि को परस्पर बदल देने से भी समीकरण ज्यों के त्यों बने रहेंगे। इससे और पिछले उदाहरण से समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में

यौ  $\frac{अ_1-1}{फ'(अ_1)}$ , यौ  $\frac{अ_2}{फ'(अ_2)}$ , यौ  $\frac{अ_3-1}{फ'(अ_3)}$ , ..... इन तद्रूपफलों के मान निकल आवेंगे।

(५) शत को अव्यक्तमानों के वर्गादिकों के योग के रूप में ले आवो।

$$\text{यदि } (1-अ_1, र)(1-अ_2, र) \dots (1-अ_n, र) = \frac{1}{स}$$

दोनों का लघुस्विकथ लेने से

ला  $(1-अ_1, र) + ला (1-अ_2, र) + \dots + ला (1-अ_n, र) = ला स$   
चलनकलन से र के वश से तात्कालिक संबन्ध निकालने से

$$\frac{अ_1}{1-अ_1, र} + \frac{अ_2}{1-अ_2, र} + \dots = यौ \frac{अ_1}{1-अ_1, र} = स_1 + स_2, र + स_3, र^2 + \dots = \frac{1}{स} ता स$$

और पिछले उदाहरण से  $स = 1 + श_1, र + श_2, र^2 + \dots$

इसलिये  $\frac{ता स}{तार} = श_1 + २श_2, र + ३श_3, र^2 + \dots$  इनके उत्थापन से  $(स_1 + स_2, र + स_3, र^2 + \dots)(1 + श_1, र + श_2, र^2 + \dots) = श_1 + २श_2, र + ३श_3, र^2 + \dots$  अब र के समान-घातों के गुणकों को सम करने से  $स_1, स_2, \dots$  के रूप में  $श_1, श_2, \dots$  आ जायेंगे। इस प्रकार अनेक चमत्कार उत्पन्न होते हैं।

१-६—इस प्रक्रम में कुछ और सहज युक्तिआं उदाहरण करने के लिये दिखलाते हैं।



उदाहरण—( १ )  $f(y) = 0 = y^0 + p_1 y^{-1} + \dots + p_n$  इसमें जो अव्यक्त के मान  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  माने जायें तो यौ  $a_1 a_2 a_3$  इसका मान निकालो ।

$$\text{यहाँ यौ } a_1 = -p_1$$

$$\text{यौ } a_1 a_2 a_3 = -p_2$$

इनके गुणनफल में  $a_1 a_2 a_3$  यह तो एक बेर आवेगा ।  $a_1 a_2 a_3 a_4$  यह चार बार आवेगा । एक बार  $a_1 a_2 a_3 a_4$ , दूसरे बार  $a_2 a_1 a_3 a_4$ , तीसरे बार  $a_3 a_1 a_2 a_4$ , और चौथे बार  $a_4 a_1 a_2 a_3$ , से इसलिये यौ  $a_1 a_2 a_3 + 4 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 a_4 = p_1 p_2$

$\therefore$  यौ  $a_1 a_2 a_3 = p_1 p_2 - 4 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 a_4 = p_1 p_2 + 4 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 a_4 = p_1 p_2 - 4 p_3$  । १६३वें प्रक्रम में  $m = 2$ ,  $p = q = 1$  मानने से

$$- 2 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 = s_2 s_2 - 2 s_1 s_3 - s_2^2 + 2 s_4$$

इसमें  $s_1, s_2$  इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में ले आने से ऊपर ही का मान बड़े परिश्रम से निकलेगा जो ऊपर की युक्ति से बड़े लाघव से आया है ।

( २ ) यौ  $a_1 a_2$  इसका मान निकालो ।

$$\text{यहाँ यौ } a_1 a_2 = p_2$$

वर्ग करने से

यौ  $a_1 a_2 + 2 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 + 4 \text{ यौ } a_1 a_2 a_3 a_4 = p_2^2$  वर्ग करने में  $a_1 a_2 a_3 a_4$  यह पद  $a_1 a_2 a_3 a_4$  ।  $a_1 a_3 a_2 a_4$  । और  $a_2 a_3 a_1 a_4$  इनके गुणन से उत्पन्न होगा । इसलिये वर्ग करने में दो बार आने से  $a_1 a_2 a_3 a_4$  यह छः बार आवेगा । इसलिये

$$\begin{aligned} \text{यौ (अ, अ}_2\text{)}^2 &= प^2_2 - २यौ अ^2_1 अ_2 अ_2 - ६यौ अ_1 अ_2 अ_2 अ_2 \\ &= प^2_2 - २प_1 प_2 + ८प_2 - ६प_2 \\ &= प^2_2 - २प_1 प_2 + २प_2 । \end{aligned}$$

( ३ ) यौ अ^2\_1 अ\_2 इसका मान निकालो ।

यहां यौ अ^2\_1 यौ अ\_1 अ\_2 = यौ अ^2\_1 अ\_2 + यौ अ^2\_1 अ\_2 अ\_2 पिछले  
मानों का उत्थापन देने से

$$\text{यौ अ^2_1 अ_2} = प^2_1 प_2 - २प^2_2 - प_1 प_2 + ४प_2$$

( ४ ) यौ अ^2\_1 अ^2\_2 अ\_2 इसके मान के लिये यौ अ\_1 अ\_2

$$\begin{aligned} &\text{यौ अ_1 अ_2 अ_2} \\ &= \text{यौ अ^2_2 अ_2 अ_2 अ_2} + ३यौ अ^2_1 अ^2_2 अ_2 अ_2 \\ &\quad + १०यौ अ_1 अ_2 अ_2 अ_2 और \end{aligned}$$

यौ अ^2\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 इसके मान के लिये

यौ अ\_1 अयौ अ\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 = यौ अ^2\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 + ५यौ अ\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 अ\_2  
इस पर से और दो पिछले मानों से

$$\text{यौ अ^2_1 अ^2_2 अ_2} = -प_2 प_2 + ३प_1 प_2 - ५प_2$$

यही १६३वें प्रक्रम के दूसरे समीकरण से भी बड़े प्रयास  
से आवेगा जहां न = ० और प = १ है ।

( ५ ) यौ अ^2\_1 अ^2\_2 अ\_2 अ\_2 इसके मान के लिये यौ अ\_1 अ\_2 और  
यौ अ\_1 अ\_2 यौ अ\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 इसका गुणनफल निकालना चाहिये ।

यौ अ\_1 अ\_2 यौ अ\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 = यौ अ^2\_1 अ^2\_2 अ\_2 अ\_2 + ४यौ अ^2\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 अ\_2  
+ १५यौ अ\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 अ\_2 और यौ अ^2\_1 अ\_2 अ\_2 अ\_2 अ\_2 इसके लिये

$$\begin{aligned} \text{यौ अ_1 यौ अ_1 अ^2_2 अ_2 अ_2 अ_2} &= \text{यौ अ^2_1 अ_2 अ_2 अ_2 अ_2} \\ &\quad + ६यौ अ_1 अ_2 अ_2 अ_2 अ_2 अ_2 \end{aligned}$$

इनके उत्थापन से

$$\text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3 \text{अ}_4 = ५_२ ५_४ - ४ ५_१ ५_२ + ६ ५_१$$

( ६ ) यौ अ<sup>२</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>२</sup><sub>३</sub> इसका मान निकालो ।

यहां यौ अ<sub>१</sub> अ<sub>२</sub> अ<sub>३</sub> इसके वर्ग से

$$\text{यौ अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3 \text{ यौ अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3$$

$$= \text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3^2 + २ \text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3 \text{अ}_4 + ६ \text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3 \text{अ}_4 \text{अ}_5 \\ + २० \text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3 \text{अ}_4 \text{अ}_5 \text{अ}_6$$

इस पर से

$$\text{यौ अ}_1^2 \text{अ}_2^2 \text{अ}_3^2 = ५_3^2 - २ ५_२ ५_४ + २ ५_१ ५_२ - २ ५_१ ।$$

इस तरह लाघन से सैकड़ों उदाहरणों का उत्तर निकल सकता है ।

१६६—ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि जिस तद्रूप-फलों में जो ध्रुवशक्ति है उसी के तुल्य, उत्तर के प्रत्येक पदों में समीकरण के गुणक संख्याओं का योग होता है और तद्रूप-फल में जो सब से बड़ी घात संख्या है उससे अल्प वा उसी के तुल्य उत्तर के प्रत्येक पद में समीकरण के गुणकों के घात संख्या का योग होता है । जैसे—यौ अ<sup>२</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> = ४ ५<sub>४</sub> - ५<sub>१</sub> ५<sub>२</sub> + ५<sub>१</sub> ५<sub>२</sub> - २ ५<sub>१</sub>, इसमें यौ अ<sup>२</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> ध्रुवशक्ति ३ + १ = ४ है और सब से बड़ा घात ३ है ( इस बड़े घात को सोपान कहो ) तो उत्तर में, पहले पद में ५<sub>४</sub> है इसमें गुणक संख्या ४, ध्रुवशक्ति के तुल्य है, दूसरे पद में भी ३ + १ = ४ गुणक संख्याओं का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है । तीसरे पद में भी ५<sub>१</sub> ५<sub>२</sub> = ५<sub>१</sub> ५<sub>२</sub> - गुणकों के संख्या का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है

इसी प्रकार चौथे पद  $p_4 = p_1^4$  में घात संख्या एक सोपान से अल्प, दूसरे पद  $p_1 p_3 = p_1^2 p_3^2$  में भी घात संख्याओं का योग  $1+1=2$  सोपान से अल्प, तीसरे पद  $p_2^2 p_2 = p_2^3 p_2^2$  में घात संख्याओं का योग  $2+1=3$  सोपान के तुल्य और चौथे पद में भी घात संख्या २ वह सोपान से अल्प ही है। यही रीति सब में पाई जाती है; इसलिये ऊपर जा अनुगम लिखा है वह सत्य है।

उदाहरण—(१) यौ  $a^2, a^3, a^4, a^5$  इसका मान बताओ।

यहां ध्रुव शक्ति  $= 2+2+2+2=8$  और सोपान २ है इसलिये ऊपर के अनुगम से

$$\text{यौ } a^2, a^3, a^4, a^5 = \tau_0 p_1 + \tau_1 p_1 p_2 + \tau_2 p_2 p_3 + \tau_3 p_3 p_4 + \tau_4 p_4^2$$

जहां  $\tau_0, \tau_1$  इत्यादि व्यक्त गुणक हैं। यहां  $p_1 p_1 p_2 = p_1^2 p_2, p_1 p_2 p_2, p_1 p_1 p_1 p_2 = p_1^3 p_2$  इत्यादि पद न आवेंगे क्योंकि इनमें गुणकों के संख्याओं का योग तो ध्रुवशक्ति के समान है परन्तु घात संख्याओं का योग सोपान से बड़ा हो जाता है; इसलिये दोनों धर्म के न रहने से वे पद नहीं लिए गए, इसी प्रकार  $p_1^3, p_1^4, p_1^5$  इत्यादि पद भी केवल सोपान सम्बन्धी एक ही धर्म के रहने से नहीं लिए गए।

१७०—१६६वें प्रक्रम से

$$\text{जा } (1 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n) =$$

$$s_1 r - \frac{1}{2} s_2 r^2 - \frac{1}{3} s_3 r^3 \dots \dots - \frac{1}{n} s_n r^n \dots \dots$$

चलनकलन से सत् केवश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}}{\text{तास}_t} \left( 1 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n \right) =$$

$$- \left( 1 + p_1 r + p_2 r^2 + \dots + p_n r^n \right) \frac{r^t}{t},$$

र के भिन्न भिन्न घातों के गुणकों की तुलना करने से

$$\frac{\text{ता } p_v}{\text{तास}_t} = 0 \text{ यदि } v < t,$$

$$\frac{\text{ता } p_t}{\text{तास}_t} = -\frac{1}{t}, \quad \frac{\text{ता } p_{t+j}}{\text{तास}_t} = -\frac{1}{t} p_j$$

इस चलनसमीकरण को ब्रीओशी (Brioschi) ने निकाला है। इस-पर-से समीकरण के पदों के गुणकों के कोई फल का तात्कालिक सम्बन्ध  $s_t$  के वश से निकाल सकते हैं क्योंकि यदि गुणकों का फल = फी ( $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ) हो तो ऊपर के समीकरण से

$$\frac{\text{ता } p_1}{\text{तास}_t} \cdot \frac{\text{ता } p_2}{\text{तास}_t} \dots \dots \dots \frac{\text{ता } p_{t-1}}{\text{तास}_t} \text{ ये सब शून्य के तुल्य होंगे; इसलिये}$$

$$\frac{\text{ता}}{\text{तास}_t} \text{फी}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) =$$

$$\frac{\text{ता फी}}{\text{ता } p_t} \cdot \frac{\text{ता } p_t}{\text{तास}_t} + \frac{\text{ता फी}}{\text{ता } p_{t+1}} \cdot \frac{\text{ता } p_{t+1}}{\text{तास}_t} + \dots + \frac{\text{ता फी}}{\text{ता } p_n} \cdot \frac{\text{ता } p_n}{\text{तास}_t}$$

ऊपर के चलनसमीकरण से  $\frac{\text{ता } p_t}{\text{तास}_t}, \frac{\text{ता } p_{t+1}}{\text{तास}_t}$  इत्यादि के

मानों का उत्थापन देने-से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ता सत}} \text{फी} (p_1, p_2, \dots, p_n) =$$

$$- \frac{1}{t} \left( \frac{\text{ता फी}}{\text{ता पत}} + p_1 \frac{\text{ता फी}}{\text{ता पत+१}} + p_2 \frac{\text{ता फी}}{\text{ता पत+२}} + \dots + p_{n-1} \frac{\text{ता फी}}{\text{ता पन}} \right)$$

इसके बल से प्रायः तद्रूपफल के मान बड़ी सुगमता से आ जाते हैं; जैसे १६६वें प्रक्रम में जो यौ  $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4 =$   
 $ट_० प_२ + ट_१ प_१ प_१ + ट_२ प_१ प_२ + ट_३ प_२ प_३ + ट_४ प_३$  यह समी-  
 करण दिखाया है जहाँ अनुगम से लिख किया है कि  $ट_०, ट_१,$   
 इत्यादि स्थिर व्यक्ताङ्क हैं तहाँ यदि इन स्थिराङ्कों के मान जानना  
 हो तो चतुर्घात समीकरण से यह तो स्पष्ट ही है कि

$$अ_1 अ_2 अ_3 अ_4 = प_३ \text{ इसलिये } ट_४ = १ ।$$

औरों के मान जानने के लिये १६३वें प्रक्रम के (१) समी-  
 करण से स्पष्ट है कि यौ  $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$  इसके मान में  $स_२,$   
 $स_३, स_४, स_५$  ये ही आवेंगे, इसलिये  $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता स}_३} = ०$  और  $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता स}_४} = ०,$

इनका मान,  $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता सत}}$  इसके जानने के लिये जो ऊपर समीकरण  
 लिख आए हैं उसमें  $t = ३$  और  $t = ७$  मानने से

$$ट_० प_२ + ट_१ प_१ प_२ + ट_२ प_१ प_२ + ट_३ (प_२ प_३ + प_२) + २ ट_४ प_१ प_३$$

$$= प_२ (ट_० + ट_३) + प_१ प_३ (ट_१ + २ ट_३) + प_१ प_२ (ट_२ + ट_३) = ०$$

$$\text{और } ट_० प_१ + ट_१ प_३ = ० = प_१ (ट_० + ट_३)$$

ये समीकरण  $प_१, प_३$  इत्यादि के भिन्न भिन्न मानों में सर्वदा  
 सत्य हैं; इसलिये

$\tau_0 + \tau_1 = 0$ ,  $\tau_0 + \tau_2 = 0$ ,  $\tau_1 + 2\tau_3 = \tau_1 + 2 = 0$ ,  
 $\tau_2 + \tau_3 = 0$  इन परसे  $\tau_1 = -2$ ,  $\tau_0 = 2$ ,  $\tau_3 = -2$ ,  $\tau_2 = 2$ ,  
 $\tau_4$  का तो मान पहिले ही १ सिद्ध कर आए हैं। इनके उत्थापन  
 से यौ अ<sup>१</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>३</sup><sub>३</sub> अ<sup>४</sup><sub>४</sub> =  $2\tau_0 - 2\tau_1\tau_2 + 2\tau_3\tau_4 - 2\tau_4\tau_3$   
 $+ \tau_4^2$

(२) यौ अ<sup>१</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>३</sup><sub>३</sub> इसका मान जानना है।

यहां ध्रुवशक्ति =  $2 + 2 + 1 = 5$  और सोपान ३ है; इसलिये  
 १६६वें प्रक्रम से

यौ अ<sup>१</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>३</sup><sub>३</sub> =  $\tau_0\tau_3 + \tau_1\tau_2\tau_3 + \tau_2\tau_3\tau_4 + \tau_3\tau_4\tau_1$   
 $+ \tau_4\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_1\tau_3\tau_4 + \tau_3\tau_1^2$  और १६३वें प्रक्रम से

यौ अ<sup>१</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>३</sup><sub>३</sub> =  $s_1s_2s_3 - s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_4 + 2s_4$

ब्रीओशी के समीकरण से  $s_4$  के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\tau_0 \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_1s_1} = -\frac{\tau_0}{6} = 2 \therefore \tau_0 = -12।$$

$s_2$  के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\tau_0\tau_1 + \tau_1\tau_2 = 2s_1 = -2\tau_1 \therefore \tau_1 = 6।$$

$s_4$  के वश तात्कालिक सम्बन्ध से

$\tau_0\tau_2 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_4 = 4s_2 = 4(\tau_2 - 2\tau_3)$   
 $\tau_2$  और  $\tau_3$  के गुणकों को दोनों पक्षों में समान करने से

$$\tau_0 + \tau_2 = -5, \tau_1 + \tau_2 = 4।$$

$$\therefore \tau_2 = -3, \tau_3 = 4।$$

और  $\tau_4 = 0$  होगा क्योंकि यदि न  $-2$  इतने मान समीकरण में शून्य हों तो यौ अ<sup>१</sup><sub>१</sub> अ<sup>२</sup><sub>२</sub> अ<sup>३</sup><sub>३</sub> = 0। और यदि न  $-3$

इतने मान समीकरण में शून्य हों तो यौ  $अ_1, अ_2, अ_3 =$   
 $अ_1, अ_2, अ_3, यौ अ_1, अ_2 - प_3 (-प_1, प_2 + ३प_3) = प_1, प_2, प_3$   
 $- ३प_3^2$

$$\therefore \tau_1 = -३, \tau_2 = १$$

इनके उत्थापन से

$$यौ अ_1, अ_2, अ_3 = -१२प_3 + ७प_1, प_2 + ४प_2, प_3 - ३प_3^2,$$

$$- ३प_3^2 + प_1, प_2, प_3$$

इस प्रकार अनेक उदाहरणों के उत्तर सहज में निकल सकते हैं ।

१७१— $f(y) = 0$  इसमें जो अव्यक्त मान हैं उनमें से दो दो के अन्तर को वर्ग के समान जितन समीकरण में अव्यक्त-मान होंगे उस समीकरण को बनाना है ।

कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण  $n$  घात का है और उसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_n$  हैं । तो साध्य समीकरण में अव्यक्त-मान जो  $(अ_1 - अ_2)^2, (अ_1 - अ_3)^2, \dots, (अ_2 - अ_3)^2, \dots$  ये होंगे, उनकी संख्या एक द्विज्यादि भेद की युक्ति से  $\frac{n(n-1)}{2}$

इतनी होगी; इसलिये साध्य समीकरण  $\frac{n(n-1)}{2} = m$  घात का

होगा । मान लो कि साध्य समीकरण

$य^m + ब्य^m - १ + ब्य^m - २ + \dots + ब्य^m = 0$  ऐसा है और इसमें अव्यक्त मानों के  $n$  घात का योग सात है तो यदि इसमें सा<sub>१</sub>, सा<sub>२</sub>, ..., सा<sub>m</sub> के मान यदि व्यक्त हो जायं तो



१६०वें प्रक्रम से  $सा_1 + व_1 = 0$ ,  $सा_2 + व_2$ ,  $सा_3 + २व_2 = 0$  इत्यादि समीकरणों की सहायता से  $व_1$ ,  $व_2$  इत्यादि के मान व्यक्त हो जायेंगे।

कल्पना करो कि

$फी(y) = (y - अ_1)^{२त} + (y - अ_2)^{२त} + (y - अ_3)^{२त} + \dots$   
तो  $y$  के स्थान में  $अ_1$ ,  $अ_2$ , इत्यादि के उत्थापन से और उनके योग से

$$२सात = फी(अ_1) + फी(अ_2) + फी(अ_3) + \dots \dots \dots ।$$

दिए हुए समीकरण में अव्यक्त मानों के एक द्विज्यादि घातों के योग दो पूर्ववत्  $स_1$ ,  $स_2$ ,  $\dots \dots \dots$   $स_n$  मानों तो ऊपर  $फी(y)$  के मान को द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर योग करने से

$$1 \quad फी(y) = नय^{२त} - २तस_१य^{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१२} स_२य^{२त-२} - \dots \dots \dots + स_{२त}$$

य के स्थान में क्रम से  $अ_1$ ,  $अ_2$ , इत्यादि के उत्थापन और योग से

$$२सात = नस_{२त} - २तस_१स_{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१२} स_२स_{२त-२} - \dots \dots$$

$\dots \dots + नस_{२त}$  इसके दहिने पक्ष में आदि पद से आगे अन्तिम पद से पीछे तुल्यान्तर में पद समान हैं; इसलिये इनको इकट्ठा करने से और २ के भाग दे देने से

$$\begin{aligned} \text{सात} &= \text{नस}_{2\text{त}} - 2\text{तस}_1 \text{स}_{2\text{त}-1} + \frac{2\text{त}(2\text{त}-1)}{1.2} \text{स}_2 \text{स}_{2\text{त}-2} - \dots \\ &\dots + \frac{2}{3}(-1)^{\text{त}} \frac{2\text{त}(2\text{त}-1) \dots (\text{त}+1)}{\text{त}!} \text{स}_{\text{त}}^2 \end{aligned}$$

स<sub>१</sub>, स<sub>२</sub>. इत्यादि दिए हुए समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में पिछले प्रक्रमों से आजायँगे और इनसे ऊपर के समीकरण की सहायता से सात का मान भी आवेगा जिससे साध्य समीकरण के पदों के गुणक भी त के स्थान में १, २, इत्यादि के उत्थापन से व्यक्त हो जायँगे।

१७९—ऊपर के साध्य समीकरण में अन्तिम पद व<sub>म</sub> का मान इस प्रकार से भी जान सकते हो।

दिए हुए न घात समीकरण को मान लो कि फ'(य) = ० हैं तो

$$\text{फ}(य) = (य - \text{अ}_1)(य - \text{अ}_2)(य - \text{अ}_3) \dots$$

फ'(य) = (य - अ<sub>२</sub>)(य - अ<sub>३</sub>) ... + (य - अ<sub>१</sub>)(य - अ<sub>३</sub>) ... + ..  
अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, इत्यादि के उत्थापन से

फ'(अ<sub>१</sub>) = (अ<sub>१</sub> - अ<sub>२</sub>)(अ<sub>१</sub> - अ<sub>३</sub>) ...

फ'(अ<sub>२</sub>) = (अ<sub>२</sub> - अ<sub>३</sub>)(अ<sub>२</sub> - अ<sub>३</sub>) ... ..

इसलिये व<sub>म</sub> = फ'(अ<sub>१</sub>) फ'(अ<sub>२</sub>) फ'(अ<sub>३</sub>) ... ..

अब कल्पना करो कि फ'(य) = ० इसमें अव्यक्त मान क्रम से अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, इत्यादि हैं तो

फ'(य) = न(य - अ<sub>१</sub>)(य - अ<sub>२</sub>)(य - अ<sub>३</sub>) ...

इसलिये फ'(अ<sub>१</sub>) फ'(अ<sub>२</sub>) फ'(अ<sub>३</sub>) =

न<sup>२</sup>(अ<sub>१</sub> - अ<sub>१</sub>)(अ<sub>१</sub> - अ<sub>२</sub>)(अ<sub>१</sub> - अ<sub>३</sub>) ... ..

(अ<sub>२</sub> - अ<sub>१</sub>)(अ<sub>२</sub> - अ<sub>२</sub>)

परन्तु  $(अ_१ - आ_१)(अ_२ - आ_१)(अ_३ - आ_१) \dots$

$$= (-१)^{नफ(आ_१)}$$

$(अ_१ - आ_२)(अ_२ - आ_२)(अ_३ - आ_२) \dots = (-१)^{नफ(आ_२)}$

इसी प्रकार से आगे भी जानना तो

$फ'(अ_१) फ'(अ_२) फ'(अ_३) \dots$

$$= न^२(-१)^{न(न-१)} फ(आ_१) फ(आ_२) फ(आ_३) \dots$$

$$= न^२ फ(आ_१) फ(आ_२) फ(आ_३) \dots \dots \dots$$

क्योंकि न चाहे विषम वा सम हो  $न(न-१) = न^२ - न$  यह सर्वदा सम ही रहेगा ।

१७३—मानों के अन्तर-वर्ग-मान जिसमें है उस समीकरण में यदि सब अव्यक्त मान धन हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण में असंभव मान न होंगे । और यदि उसमें ऋण मान हो तो दिए हुए समीकरण में अवश्य असंभव मान होंगे । और यदि उस नये समीकरण में असंभव मान हों तो दिए हुए समीकरण में भी असंभव मान होंगे ।

$$१७४—प_० य^म + प_१ य^{म-१} + प_२ य^{म-२} + \dots + प_म = ०$$

$$व_० य^n + व_१ य^{n-१} + व_२ य^{n-२} + \dots + व_n = ०$$

इन समीकरणों में चाहते हैं कि य न रहे । जहां  $प_०, प_१, प_२ \dots व_०, व_१, व_२ \dots$  अकरणीगत अभिन्न र के फल हैं । मान लो कि पहिले समीकरण से य के मान र के रूप में किसी युक्ति से अ, क, ख,  $\dots$  आ गए तो दूसरे समीकरण में य के स्थान में अ, क, ख,  $\dots$  के बत्थापन से

$$व_० अ^n + व_१ अ^{n-१} + व_२ अ^{n-२} + \dots + व_n = ०$$

$$व_०क^n + व_१क^{n-१} + व_२क^{n-२} + \dots + व_n = ०$$

$$व_०ख^n + व_१ख^{n-१} + व_२ख^{n-२} + \dots + व_n = ०$$

.....

इन समीकरणों में जो अव्यक्त के मान हैं सब र के अव्यक्तमान होंगे। मान लो कि इन सभी समीकरणों में से पहिले समीकरण में एकर का मान क, है और इसका उत्थापन अ में देने से अ का मान अ, हुआ तो  $y = अ, r = क,$  यह ऊपर के दो मुख्य समीकरणों को ठीक करेंगे। क्योंकि ये दोनों दूसरे समीकरण को तो प्रत्यक्ष ही में ठीक करते हैं और पहिले में चाहे र के स्थान में जिसका उत्थापन दें परन्तु सर्वदा समीकरण सत्य रहेगा यदि  $y = अ$ । इसलिये र के स्थान में क, के उत्थापन से भी पहिला समीकरण सत्य रहेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऊपर जो अ, क, ख, ... के वश से समीकरण हैं उनके वाईं ओर के पक्षों को परस्पर गुण देने से गुणनफल शून्य के तुल्य होगा उसमें अ, क, ख, ..... इनमें किसी दो के परस्पर बदल देने से भी गुणनफल में विकार न होगा। मान उर्थों का त्यों रहेगा। इसलिये गुणनफल अ, क, ख, का तद्रूपफल होगा। तब इस गुणनफल का मान  $प_०, प_१, प_२, \dots$  के रूप में आ सकता है। जैसे उदाहरण—(१)

$$प_०य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ० \text{ और } व_०य^२ + व_१य + व_२ = ०$$

ये दो समीकरण हैं जहां  $प_०, प_१, \dots; व_०, व_१, \dots; र$  के फल हैं तो ऊपर के प्रक्रम के सङ्केत से

$$(व_०अ^३ + व_१अ^२ + व_२अ + व_३) (व_०क^३ + व_१क^२ + व_२क + व_३) + (व_०ख^३ + व_१ख^२ + व_२ख + व_३) = ०$$

गुण देने से

$v_1^2 + v_1^2 अकख + v_0^2 अ^2क^2ख^2 + v_0^2 v_2$  यौ  $अ^2क^2 +$   
 $v_0^2 v_1$  यौ  $अ^2क^2ख + v_1^2 v_2$  यौ  $अक + v_1 v_2$  यौ  $अ +$   
 $v_0 v_2$  यौ  $अ^2 + v_0 v_2$  यौ  $अ^2कख + v_0 v_1 v_2$  यौ  $अ^2क = 0$

और  $अकख = -\frac{p_1}{p_0}$ ,  $अ^2क^2ख^2 = \frac{p_2^2}{p_0^2}$

यौ  $अ^2क^2 = अ^2क^2अ^2$  यौ  $\frac{1}{अ^2} = \frac{p_2^2}{p_0^2} \left( \frac{p_2^2}{p_1^2} - \frac{2p_1}{p_2} \right)$

यौ  $अ^2क^2ख = अकख$  यौ  $अक = -\frac{p_1}{p_0}$  यौ  $अक = -\frac{p_2 p_1}{p_0^2}$

यौ  $अ = -\frac{p_1}{p_0}$ , यौ  $अ^2 = \frac{p_1^2}{p_0^2} - \frac{2p_2}{p_0}$

यौ  $अ^2कख = अकख$  यौ  $अ = \frac{p_1 p_0}{p_0^2}$

यौ  $अ^2क = अकख$  यौ  $\frac{अ}{क} = -\frac{p_1}{p_0} \left( \frac{p_1 p_2}{p_0 p_1} - 1 \right)$

( १६७वें प्रक्रम के उदाहरण की युक्ति से ) ।

गुणनफल में इनके उत्थापन से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें  $y$  न रहेगा ।

१७५—ऊपर गुणनफल — रूप जो समीकरण बना है उसमें  $r$  का सब से बड़ा घात  $m$ ,  $n$  से बड़ा न होगा । यदि पहिले समीकरण  $p_0 y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} \dots$  इसमें प्रत्येक पद में  $p_0 p_1$ , इत्यादि में जो  $r$  का घात हो और जो  $y$  का घात इनका योग  $m$  से अधिक न हो और इसी प्रकार दूसरे समीकरण में भी प्रत्येक पद में  $r$  और  $y$  के घातों का योग  $n$  से अधिक न हो अर्थात् पद और  $v_d$  में  $r$  का सब से बड़ा घात  $d$  तक हो परन्तु  $d$  से अधिक न हो ।

कल्पना करो कि १७४वें प्रक्रम की युक्ति से य को उड़ाया तो गुणनफलों में जो पदों की श्रेणी होगी उसमें किसी पद का रूप  $v_{त-त} \times v_{क-थ} \times v_{ख-व} \times \dots$  ऐसा होगा जहाँ गुण्य गुणक रूप खंडों की संख्या म तुल्य होगी। और यह भी जानते हो कि पदों की श्रेणी में अ, क, ख, का तद्रूपफल होगा; इसलिये ऊपर किसी पद का जो रूप दिखाया है वह  $v_{त-व} \dots यौ-त-क-थ-व \dots$  ऐसा होगा। इसमें कल्पना से स्पष्ट है कि  $t + थ + व + \dots$  इससे बड़ा र का घात,  $v_{त-व} \dots$  इसमें नहीं है और १६०वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि सद् में र का सब से बड़ा घात द से बड़ा नहीं होगा और १६२वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यौ अ-त-क-थ-व  $\dots$  इसमें जो प्रत्येक पद में गुण्यगुणकरूप इत्यादि आवेंगे उनकी संख्याओं का योग  $n - त + न - थ + न - व + \dots$  यही होगा, इसलिये यौ अ-त-क-थ-व  $\dots$  इसमें र का सबसे बड़ा घात

$n - त + न - थ + न - व + \dots = नम - (त + थ + व + \dots)$   
इससे बड़ा नहीं हो सकता, इसलिये

$v_{त-व} \dots$  यौ अ-त-क-थ-व  $\dots$  इसमें र का सब से बड़ा घात

$नम - (त + थ + व + \dots) + (त + थ + व + \dots) = नम$   
इससे बड़ा नहीं हो सकता।

१७६—जितने समीकरण हों उतने ही उनमें अज्ञात वर्ण हों तो ऊपर की युक्तिसे ऐसा एक समीकरण बन सकता है जिसमें एक वर्ण को छोड़ और सब वर्ण उड़ जायेंगे। और बने हुए

समीकरण में जो अज्ञात वर्ण होगा उसका सबसे बड़ा घात दिए हुए समीकरण जितने जितने घात के होंगे उन संख्याओं के गुणनफल से बड़ा नहीं होगा। इस अध्याय में जितनी बातें लिखी हैं उनसे अनेक नये चमत्कृत सिद्धान्त बन सकते हैं। इसलिये अब व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ाना नहीं चाहते।

### अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि  $y^n - 1 = 0$  इसमें  $s_m = 0$  यदि  $m, n$  का अपवर्त्य  $n$  हो और  $s_m = n$  यदि  $m, n$  का अपवर्त्य हो। (१६४वें प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध करो)

२। यदि फी (य) =  $a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots \dots \dots \infty$  तो इसमें

$a_m y^m + a_{m+n} y^{m+n} + a_{m+2n} y^{m+2n} + \dots \dots \dots + \infty$  इसका मान बताओ।

फी (य) और इसके विस्तृत रूप दोनों को  $y^n - 1 = 0$  इसके मान  $a_1, a_2, \dots$  इत्यादि के  $n - m$  घात से अर्थात्  $a_1^{n-m}, a_2^{n-m}$  इत्यादि से गुण कर और  $y$  के स्थान में  $a_1 y, a_2 y^2$  इत्यादि का उत्थापन देकर जोड़ लो तो (१) उदाहरण की युक्ति से

$$a_m y^m + a_{m+n} y^{m+n} + a_{m+2n} y^{m+2n} + \dots \dots \dots + \infty$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ a_1^{n-m} \text{फी} (a_1 y) + a_2^{n-m} \text{फी} (a_2 y) + \right.$$

$$\left. a_3^{n-m} \text{फी} (a_3 y) + \dots \dots \dots \right\}$$

$$३। फा (य) = १ + य + \frac{य^२}{२!} + \frac{य^३}{३!} + \frac{य^४}{४!} + \dots + \infty = इ^य$$

इसमें  $य + \frac{य^२}{२!} + \frac{य^३}{३!} + \dots + \infty$  इसका मान बताओ ।

$$उ० \frac{१}{३} \{ आ^३, फा (आ, य) + का^३, फा (का, य) + खा^३, फा (खा, य) \} \\ = \frac{१}{३} इ^य - \frac{१}{३} इ^{-य} \left( कोज्या \frac{य\sqrt{३}}{२} - \sqrt{३} ज्या \frac{य\sqrt{३}}{२} \right)$$

४। सिद्ध करो कि  $(य+र)^न - य^n - र^n = फा (य) यह$   
 $य^२ + यर + र^२$  इससे निःशेष होगा यदि न, धन अभिन्न हो और  
 इ का अपवर्त्य न हो और  $फा (य) यह (य^२ + यर + र^२)^२$  इससे  
 निःशेष होगा यदि न धन अभिन्न  $६म + १$  इस रूप का हो ।

यदि  $य^३ - १ = ०$  इसमें अव्यक्त मान १, आ, का, मानो तो  
 $य^२ + यर + र^२ = (य - आ, र) (य - का, र)$ ; इसलिये इसमें  $य =$   
 आ, र और का, र, य के स्थान में आ, र और का, र के उत्थापन  
 से  $फा (य) = ०$  यदि न इनका अपवर्त्य न हो तो  $फा (य)$  अवश्य  
 $य^२ + यर + र^२$  इससे निःशेष होगा और उन्हीं के उत्थापन से  
 $फा (य) = ०$  और  $फा' (य) = ०$  यदि न  $= ६म + १$  तो दो समान  
 मान होने से  $फा (य) यह (य^२ + यर + र^२)^२$  इससे निःशेष  
 होगा ।

५।  $य^n + र^n + (-य-र)^न$  इसका मान  $य^२ + यर + र^२$   
 और यर  $(य+र)$  इनके रूप में लाओ ।

मान लो कि  $अ = य^२ + यर + र^२$ ,  $क = यर (य+र)$  और  
 $ल = -य-र$  तो  $य + र + ल = ०$ ,  $यर + रल + लय = यर + ल(र+क)$   
 $= यर - (य+र)^२ = -अ$  और  $यरल = -क$



इसलिये  $y, r$  और  $t$   $t^2 - ar + k = 0$  इस घनसमीकरण में  $t$  के मान होंगे।

∴  $\frac{1}{n} (y^n + r^n + t^n)$  यह १६४वें प्रक्रम से — ला  $\left(1 - \frac{a}{t^2} + \frac{k}{t^3}\right)$

इसके विस्तृत रूप के  $\frac{1}{t^n}$  के गुणक के समान होगा। परन्तु

$$- \text{ला} \left(1 - \frac{a}{t^2} + \frac{k}{t^3}\right) \\ = \frac{1}{t^2} \left(a - \frac{k}{t}\right) + \frac{1}{2t^3} \left(a - \frac{k}{t}\right)^2 + \frac{1}{3t^4} \left(a - \frac{k}{t}\right)^3 + \dots$$

अब इस पर से सहज में  $\frac{1}{t^n}$  इसके गुणक का पता लगा सकते हो। यदि  $n$  सम हो तो  $y^n + r^n + (-y-r)^n = y^n + r^n + (y+r)^n$  और यदि  $n$  विषम हो तो चिन्ह के उलट देने से  $(y+r)^n - y^n - r^n$  इसका मान भी जान सकते हो।

६।  $(y+r)^0 - y^0 - r^0$  इसका मान  $y^2 + yr + r^2$  और  $yr$   $(y+r)$  के रूप में निकालो।

यहां पूर्व उदाहरण से  $\frac{1}{t^0}$  का गुणक  $-a^2$ क यह है; इसलिये चिन्ह उलट देने से  $\frac{1}{t^0} \{y^0 + r^0 + (y-r)^0\}$  यह  $a^2$ क के समान होगा तब  $(y+r)^0 - y^0 - r^0 = 6a^2$ क =

$$6(y^2 + yr + r^2)^2 \text{ यर } (y+r)$$

७। सिद्ध करो कि  $(y+r)^2 + y^2 + r^2$

$$= 2(y^2 + yr + r^2) \{(y^2 + yr + r^2)^2 + 4y^2r^2(y+r)^2\}$$

८। पूर्वे उदाहरण में  $n$  के स्थान में  $2m$  और  $2m+1$  के उत्थापन से सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \frac{(y+r)^{2m} + y^{2m} + r^{2m}}{2m} &= \frac{a^m}{m} + \frac{m-1}{2!} a^{m-2} k^2 \\ &+ \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{4!} a^{m-4} k^4 + \dots \\ &+ \frac{(m-1-1)(m-1-2)\dots(m-1-2t+1)}{(2t)!} a^{m-1-t} k^{2t} + \dots \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} \frac{(y+r)^{2m+1} - y^{2m+1} - r^{2m+1}}{2m+1} &= a^{m-1} k + \\ &\frac{(m-2)(m-3)}{3!} \times a^{m-3} k^3 + \dots \\ &+ \frac{(m-1-1)(m-1-2) \cdot (m-1-2t)}{(2t+1)!} \times a^{m-1-t-1} k^{2t+1} + \dots \end{aligned}$$

९। सिद्ध करो कि  $f(y) = 0$ , इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और सबसे बड़ा  $a$  हो तो

$$a = \frac{s_{m+1}}{s_m} \text{ जहाँ } m = \infty$$

१०। सिद्ध करो कि यदि  $s_m s_{m+2} - s_{m+1}^2 = s_m$  तो  $f(y) = 0$  इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और उनमें  $a, k$  ये दो और सबसे बड़े हों तो

$$\frac{s_{m+1}}{s_m} = a \cdot k \text{ जहाँ } m = \infty$$

११। यदि  $\sum_{m=1}^{\infty} y^m$  यह श्रृंखला उदाहरण का संकेत मान और  $s_m s_{m+1} - s_{m+1} s_{m+2} = p_m$  तो यदि  $f(y) = 0$  इसके सब संभाव्य मूल हों और उनमें सबसे बड़े  $a$  और  $k$  हों तो

$$\frac{p_m}{s_m} = a + k, \text{ जहाँ } m = \infty$$

१२।  $y^1 + p_1 y^2 + p_2 y + p_3 = 0$  इसमें यदि अव्यक्त मान  $a, k, l$  हों तो सिद्ध करो कि

$$(1) (a + k + ak)(k + l + kl)(l + a + al) \\ = (p_3 - p_2)^2 + p_1(p_3 - p_2) + p_3$$

$$(2) (a + k - 2l)(k + l - 2a)(a + l - 2k) \\ = 2p_1^3 - 6p_1 p_2 + 2p_3$$

$$(3) \text{यौ } (a + k)^2(a + l) = 2p_1^3 + p_1 p_2 - 3p_3$$

$$(4) (k - l)^2(l - a)^2(a - k)^2 \\ = \frac{1}{4}(3p_2 - p_1^2)(3p_1 p_3 - p_2^2) - \frac{1}{4}(p_1 p_3 - 6p_3)^2$$

१३। सिद्ध करो  $y^n + y + 1 = 0$  इसमें  $s_{n-1} - s_n = 1$ ।

१४।  $y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + y_n = 0$ , इसमें यदि अव्यक्त मान,  $a, k, l, g, \dots$  हों तो

यौ  $(a + k)(a + l) \dots (a + g)$  इसका मान बताओ।

यहाँ  $f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n =$

$(y - a)(y - k) \dots (y - g)$ ;  $y = -a$  मानने से

$$f(-a) = (-a)^n + p_1(-a)^{n-1} + \dots + p_n = \\ (-1)^n(-a - k) \dots (-a - g) \\ = (-1)^n 2a(a + k) \dots (a + g)$$

$$\therefore \frac{f(-a)}{2a(-1)^n} = \frac{1}{2} \{ a^{n-1} - p_1 a^{n-2} + \dots + (-1)^{n-p_n} a^1 \} = (a+k)(a+l) \dots (a+t)$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{f(-k)}{2k(-1)^n} = \frac{1}{2} \{ k^{n-1} - p_1 k^{n-2} + \dots + (-1)^{n-p_n} k^1 \} = (k+j)(k+l) \dots (k+t)$$

.....

सब जोड़ लेने से

$$\text{यौ } (a+k)(a+l) \dots (a+t) = \frac{1}{2} \{ s_{n-1} - p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} + \dots + (-1)^{n-p_n} s_{-1} \}$$

१५। ऊपर के समीकरण में यौ  $\frac{(a+k)^2}{अक}$  का मान क्या

होगा।

$$\text{यहां यौ } \frac{(a+k)^2}{अक} = \text{यौ } \frac{अ^2 + २अक + क^2}{अक} = \text{यौ } (अक^{-१} + अ^{-१}क + २)$$

$$= \text{यौ } (अ^{-१}क) + \frac{२न(न-२)}{२} = \frac{प_१ प_{न-१}}{प_n} + न^२ - २न।$$

१६। यौ  $\frac{अ^२}{क}$  इसका मान बताओ।

यहां यौ  $\frac{अ^२}{क} = \text{यौ } अ^२क^{-१}$  इस पर से

मान =  $प_१ - \frac{प_{न-१}}{प_n} स_१$ , क्योंकि १६२ वें प्रक्रम से

$$\begin{aligned}
 \text{यौ अमकप} &= \text{यौ अक}^{-1} = \text{स}_म \text{स}_प - \text{स}_{म+प} \\
 &= \text{स}_२ \text{स}_{-१} - \text{स}_{२-१} \\
 &= \text{स}_२ \text{स}_{-१} - \text{स}_१ \\
 &= \text{प}_१ - \frac{\text{प}_{न-१}}{\text{प}_न} \text{स}_२
 \end{aligned}$$

१७।  $y^४ + प_१ y^३ + प_२ y^२ + प_३ y + प_४ = ०$  इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क, ख, ग हों तो यौ (अ + क)(ख + ग) इसका मान बताओ।

$$\text{उ. यौ (अ + क)(ख + ग) = २प}_२$$

$$\begin{aligned}
 १८। y^४ - y^३ - ७y^२ + २ + ६ &= ० \text{ इसमें दिखलाओ कि} \\
 \text{स}_१ &= १, \text{स}_२ = १५, \text{स}_३ = १६, \text{स}_४ = ६६, \text{स}_५ = २११ \\
 \text{स}_६ &= ७६५, \text{स}_{-१} = -\frac{१}{६}, \text{स}_{-२} = \frac{८५}{३६}
 \end{aligned}$$

१९। ऊपर के समीकरण में दिखलाओ कि

$$\begin{aligned}
 \text{स}_३ &= -\text{प}_१ + ३\text{प}_१ \text{प}_२ - ३\text{प}_३ \\
 \text{स}_४ &= \text{प}_४ - ४\text{प}_१ \text{प}_२ + ४\text{प}_१ \text{प}_३ + २\text{प}_२^२ - ४\text{प}_४
 \end{aligned}$$

२०। ऊपर के चतुर्घात समीकरण में यदि अव्यक्त मान अ, क, ख, ग हो और

$$\begin{aligned}
 \text{आ} &= \frac{१}{३} (\text{अक} + \text{खग}), \text{का} = \frac{१}{३} (\text{अख} + \text{कग}) \text{ और खा} = \\
 \frac{१}{३} (\text{अग} + \text{कख}) \text{ तो सिद्ध करो कि}
 \end{aligned}$$

$$\text{आ} + \text{का} + \text{खा} = \frac{\text{प}_२}{२}, \text{आका} + \text{काखा} + \text{खाआ} =$$

$$\frac{१}{३} (\text{स}_२ \text{स}_२ - \text{स}_२^२ - ३\text{स}_१ \text{स}_३ + २\text{स}_४)$$

२१।  $अy^४ + ४कy^३ + ६खy^२ + ४गy + घ = ०$  इसमें अव्यक्त मान यदि अ, अ, अ, अ, हों तो दिखलाओ कि

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 (\alpha_4 - \alpha_1)^2 \\
 & \quad \times (\alpha_1 - \alpha_4)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2 \\
 & = \frac{256}{\alpha^8} \left\{ (\alpha\phi - 4\alpha\kappa + 3\kappa^2)^2 - 27(\alpha\gamma^2 + \phi\kappa^2 + \kappa^3 \right. \\
 & \quad \left. - \alpha\kappa\phi - 2\kappa\alpha\gamma)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(१२२ प्रक्रम के अन्त में जो अभ्यास के लिये प्रश्न लिखे हैं उनमें १०वां प्रश्न देखो)

२२।  $y^n + p, y^{n-1} + \dots + p_n = 0$  इसमें यदि अव्यक्त मान  $\alpha, \kappa, \lambda, \dots$  हों और

$$\text{यौ } \frac{(\alpha + \kappa)^2}{\alpha\kappa} = \frac{p_1 p_{n-1}}{p_n} + 12 \text{ तो } n \text{ का प्रमाण यथाओ।}$$

उ ५।

२३। नीचे लिखे हुए दोहे से क्या समझते हो।

जर जोरत जरिगे चतुर डार पात छितिराय।

राय निकारत हार गे पार न भे छितिराय॥

बड़े समीकरण में अव्यक्त मान।

## १५-कनिष्ठफल

१७७— $\alpha_1\kappa_2 + \alpha_2\kappa_1$ , यह जो चार वर्ण का फल है

जिसमें  $\alpha_1, \kappa_1$  } ये चार वर्ण हैं यह  $\alpha$  और  $\alpha_2, \kappa_2$  }  $\kappa$  के आगे अङ्कपाश युक्ति से १, २, के

जो भेद १, २ और २, १ होते हैं लगा देने से और उनके गुणन के जोड़ देने से उत्पन्न होता है।

## इसी प्रकार

$$\begin{aligned} & \text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 + \text{अ}_1\text{क}_3\text{ख}_2 + \text{अ}_2\text{क}_3\text{ख}_1 + \text{अ}_2\text{क}_1\text{ख}_3 \\ & + \text{अ}_3\text{क}_1\text{ख}_2 + \text{अ}_3\text{क}_2\text{ख}_1 \dots\dots(१) \end{aligned}$$

## यह फल

अ <sub>१</sub> ,	क <sub>१</sub> ,	ख <sub>१</sub>
अ <sub>२</sub> ,	क <sub>२</sub> ,	ख <sub>२</sub>
अ <sub>३</sub> ,	क <sub>३</sub> ,	ख <sub>३</sub>

इन नव वर्णों का है जो कि अ क ख इस गुणनफल में १, २, ३ के अङ्कपाश युक्ति से जितने भेद होते हैं उन्हें क्रम से अ, क और ख के आगे लगा देने से और सब जोड़ लेने से उत्पन्न होता है। इसलिये चाहो तो ऐसे फल को लाघव से (शकल) इस सङ्केत से प्रकाश कर सकते हो जहां यह समझ लेना होगा कि १, २, ३ के लुप्तो भेद क्रम से अ, क और ख के आगे लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

ऊपर की युक्ति से (अ, क, ख, ग) इससे यह समझेंगे कि १, २, ३, ४ के जो २४ भेद होंगे उन्हें अ, क, ख और ग में लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

इसी प्रकार यदि (अ क ख ग.....) इसमें यदि न अक्षर हों तो १, २, ...न के जो न ! भेद होंगे उन्हें क्रम से वर्णों के आगे लगा कर सब गुणनफलों के योग के समान (अ क ख ग.....) इसका मान कहेंगे।

१७८—ऊपर के सङ्केत से (अक)=अ<sub>१</sub>क<sub>२</sub>+अ<sub>२</sub>क<sub>१</sub> यह जो फल होता है वह नीचे लिखे हुए चार वर्णों में कर्णगत दो दो वर्णों के गुणनफल के योग के तुल्य है।

अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>

अ<sub>२</sub>, क<sub>२</sub>

ऐसे कर्णगत वर्णों के गुणन को हमारे यहां भास्कराचार्यादि वज्राभ्यास कहते हैं और ऐसे वज्राभ्यास के योग वा अन्तर रूपी संख्या को कनिष्ठ कहते हैं, इसीलिये हमने भी ऐसे फल की संज्ञा कनिष्ठफल लिखा है।

१७६—ऊपर जो कनिष्ठफल दिखलाया है उसमें स्पष्ट है कि प्रत्येक पद में यदि न अक्षर होंगे तो सब पद न! इतने होंगे इसमें न का मान दो से अधिक होने से न! यह समसंख्या होगी। इसलिये कनिष्ठफल में सर्वदा सब पद सम होंगे।

जिस कनिष्ठफल में आधे पद धन और आधे ऋण होते हैं उन्हीं कनिष्ठफलों को लेकर इस ग्रन्थ में कुछ विशेष कहा जायगा। इसलिये जब तक कि इसके विरुद्ध न कहा जाय सर्वदा कनिष्ठफल से वह फल समझो जिसमें आधे पद धन और आधे पद ऋण हों। जैसे

$$अ_१य + क_१र = ०$$

$$अ_२य + क_२र = ०$$

इनमें पहले से  $य = \frac{-क_१र}{अ_१}$  इसका उत्थापन दूसरे में देने

से  $क_२र - \frac{अ_२क_१र}{अ_१} = ०$  छेदगम और र के अपवर्त्तन से

$$अ_१क_२ - अ_२क_१ = ०$$

इसी प्रकार

$$अ_१य + क_१र + ख_१ल = ०$$

$$अ_२य + क_२र + ख_२ल = ०$$



$$अ_१य + क_१र + ख_१ल = ०$$

इनमें पहिले दो से य और र का मान ल के रूप में जान कर उनका उत्थापन तीसरे में देने से और छेदगम और ल के अपवर्त्तन से

$$अ_१क_२ख_१ - अ_१क_१ख_२ + अ_२क_१ख_१ + अ_२क_१ख_१ - अ_१क_१ख_२ - अ_१क_२ख_१ = ० \dots (२)$$

इस फल से और १७७ वें प्रक्रम के (१) से भेद इतना ही है कि (१) में सब पद धन हैं (२) में आधे पद धन और आधे ऋण हैं अर्थात् तीन पद धन और तीन पद ऋण हैं।

इसी प्रकार चार अज्ञातवर्ण समीकरण में  $अ_१, क_१, ख_१, ग_१, अ_२, क_२, ख_२, ग_२$ , इत्यादि सोरह वर्णों से ऊपर (२) के ऐसा एक कनिष्ठफल २४ पदों का होगा जिसमें १२ धन और १२ ऋण होंगे।

ऐसे कनिष्ठफल को काशी (Cauchy) ने

$\begin{vmatrix} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$  इस संकेत से प्रकाश किया है। जैसे यहां इस संकेत से समझेंगे कि यह  $अ_१क_२ - अ_२क_१$  इसके तुल्य है।

इसी प्रकार (२) कनिष्ठफल को

$$\begin{vmatrix} अ_१, & क_१, & ख_१ \\ अ_२, & क_२, & ख_२ \\ अ_३, & क_३, & ख_३ \end{vmatrix}$$

इससे प्रकाश करते हैं।

और साधारण से न<sup>२</sup>वर्णों में जहां वर्ण

$$अ_१, क_१, ख_१, \dots, र_१, \dots$$

### कनिष्ठफल

अ <sub>१</sub>	क <sub>१</sub>	ख <sub>१</sub>	..	..	ह <sub>१</sub>
अ <sub>२</sub>	क <sub>२</sub>	ख <sub>२</sub>	.	.	ह <sub>२</sub>
अ <sub>३</sub>	क <sub>३</sub>	ख <sub>३</sub>	.	.	ह <sub>३</sub>
..	..	..	.	.	..
अ <sub>n</sub>	क <sub>n</sub>	ख <sub>n</sub>	.	.	ह <sub>n</sub>

इससे प्रकाश करते हैं। इस कनिष्ठफल में धनर्ण पदों के जानने के लिये इस लकोट में अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ... इत्यादि अक्षरों को ध्रुव कहते हैं। अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ... इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे तिर्यक् पंक्ति और अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, ... इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे ऊर्ध्वाधर पंक्ति कहते हैं। बायें भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के शिर से लेकर दक्षिण भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के पाद तक कर्ण पंक्ति में जो अ<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>३</sub>, ... ये वर्ण हैं इनके गुणनफल अ<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>३</sub>, ... इन को धन पद और प्रधान पद कहते हैं। कनिष्ठफल के रूप से स्पष्ट है कि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ एकही ध्रुव और प्रत्येक तिर्यक् पंक्तिस्थ एकही ध्रुव हैं; इसलिये ऊर्ध्वाधरस्थ एकही ध्रुव और तिर्यक्स्थ एकही ध्रुव लेकर जितने न अक्षरों के गुणनफल संभव होंगे वे ही कनिष्ठफल में सब पद होंगे। इनमें कौन धन और कौन ऋण होंगे इसके लिये ऊपर प्रधान और धन पद बनाया है। प्रधान पद में देखो वर्णमाला के क्रम से तो अक्षर हैं और संख्याओं के क्रम से १, २, ... न संख्या हैं।

प्रधान पद में अक्षरों के आगे जो संख्याएँ लगी हैं उनमें से दो संख्याओं को उलट कर इन दो अक्षरों के आगे लगा

देने से जो पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। जैसे अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, घ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>..... इत्यादि २५ अक्षरों से पूर्व सङ्केत से प्रधान पद अ<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>३</sub>, ग<sub>४</sub>, घ<sub>५</sub> यह होगा इसमें क के आगे जो २ है उसे घ के आगे लगा देने से और घ के आगे जो ५ है उसे क के आगे लगा देने से जो अ<sub>१</sub>, क<sub>५</sub>, ख<sub>४</sub>, ग<sub>३</sub>, घ<sub>२</sub> यह पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। इस क्रिया से स्पष्ट है कि दो दो अक्षरों की संख्याओं का एक बेर परिवर्तन से ऋण, दो बेर के परिवर्तन से धन, तीन बेर परिवर्तन से ऋण, चार बेर परिवर्तन से धन इस प्रकार सम बेर परिवर्तन से धन और विषम बेर परिवर्तन से ऋण होगा। इस क्रिया से प्रधान पद के बल से पदों के चिन्हों का ज्ञान हो जायगा। जैसे

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1, \text{क}_1, \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2, \text{क}_2, \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3, \text{क}_3, \text{ख}_3 \end{vmatrix}$$

इसमें प्रधान और धन पद अ<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>३</sub> यह हुआ। क, ख की संख्याओं के परिवर्तन से अ<sub>१</sub>, क<sub>३</sub>, ख<sub>२</sub> यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्तन से अ<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, ख<sub>१</sub> यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्तन से अ<sub>२</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>३</sub> यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्तन से अ<sub>३</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>२</sub> यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्तन से अ<sub>३</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>१</sub> ऋण हुआ। इस प्रकार

$$\begin{aligned} \text{कनिष्ठफल} = & \text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 - \text{अ}_1\text{क}_3\text{ख}_2 + \text{अ}_2\text{क}_3\text{ख}_1 - \text{अ}_2\text{क}_1\text{ख}_3 \\ & + \text{अ}_3\text{क}_1\text{ख}_2 - \text{अ}_3\text{क}_2\text{ख}_1 \text{ यह वही पद है जो (२) है।} \end{aligned}$$

१८०—पद के धन, ऋण जानने का सहज

उपाय—

जो दिया हुआ पद हो उसमें प्रथम जो संख्या हो उसे देखो कि प्रधान पद में कहा है और जहाँ है वहाँ से कितने स्थान पीछे हटाने से प्रथम स्थान में आती है। उस हटाए हुए स्थान की संख्या को अलग लिख छोड़ो। और प्रधान पद के पहिले दिए हुए पद की प्रथम संख्या लिख उसके आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और प्रधान पद की सब संख्याओं को लिख कर इसे अब प्रधान पद मानो। इसमें जहाँ पर दिए हुए पद की दूसरी संख्या हो उसे देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से नये प्रधान पद में दूसरी स्थान की संख्या होती है। इस हटाए हुए स्थान को भी अलग लिख छोड़ो और अपने इस प्रधान पद में दिए हुए पद की प्रथम संख्या के और उसके आगे जो संख्या है उनके बीच में दिए हुए पद की दूसरी संख्या रख आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और सब संख्याओं को लिख कर इसे नया प्रधान पद समझो। इसमें दिए हुए पद की तीसरी संख्या को देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से तीसरी संख्या होती है। उस स्थान संख्या को अलग लिख छोड़ो और इस पर से फिर पूर्ववत् नया प्रधान पद बनाओ। यों बार बार कर्म करते जाओ जब तक कि दिया पद न बन जाय। फिर सब स्थान संख्या जो अलग लिखी हुई है उनके जोड़ने से यदि योग सम हो तो दिए हुए पद को धन समझो और यदि योग विषम हो तो ऋण जानो।

जैसे उदाहरण—(१) जहाँ पंक्ति में सात सात वर्ण हैं वहाँ अ<sub>१</sub> क<sub>२</sub> ख<sub>३</sub> ग<sub>४</sub> घ<sub>५</sub> ङ<sub>६</sub> च<sub>७</sub> यह पद धन वा ऋण होगा। यहाँ पदों की यथा क्रम संख्या लेने से ३०६५१४२ यह संख्या हुई और पूर्व युक्ति से प्रधान पद की संख्या से १२३४५६७ यह

संख्या होती है। इसमें दिए हुए पद की आदि संख्या ३ दो स्थान हटाने से आदि में आती है; इसलिये नये प्रधान पद की संख्या ३१२४५६७, इस प्रकार ऊपर की क्रिया से

१ प्रधानपद	=	१२३४५६७	।	दिया पद	३७६५१४२
२ "	=	३१२४५६७	।	हटे स्थान की संख्या	२
३ "	=	३७१२४५६	।	" "	५
४ "	=	३७६१२४५	।	" "	४
५ "	=	३७६५१२४	।	" "	३
६ "	=	३७६५१२४	।	" "	०
७ "	=	३७६५१४२	।	" "	१
८ "	=	३७६५१४२	।	" "	०

योग = १५

१५ के विषम होने से दिया हुआ पद ऋणात्मक हुआ।

(२) १७६ प्रक्रम में जो कनिष्ठफल न० अक्षरों से बना है उसमें जिस कर्ण पंक्ति में प्रधान पद है उसे छोड़ दूसरे कर्ण पंक्ति का अ<sub>न</sub> क<sub>न-१</sub> ल<sub>न-२</sub> ..... ट<sub>१</sub> यह पद बताओ किस चिन्ह का होगा।

यहां क्रम से हटाए गए स्थानों की संख्या

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

इसलिये पद का चिन्ह  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$  यह होगा।

१८१—किसी दो तिर्यक् वा ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जाता है।

१७६ प्रक्रम में जो क्रिया लिखी है उससे चार अक्षरों की पंक्ति में यह प्रधान पद अ, क, ख, ग, धन होगा और २, ४ के बदलने से अ, क, ख, ग = अ, ग, ख, क, इसलिये जिस तिर्यक् पंक्ति में क, और ग, हैं उन्हें परस्पर उलट पुलट दें वा जिस उर्ध्वाधर पंक्ति में क, और ग, हैं उन्हें परस्पर उलट पुलट दें, पद का मान अ, ग, ख, क, यही रहेगा जो कि प्रधान पद के वश से ऋण होगा। इस प्रकार तिर्यक् वा उर्ध्वाधर दो पंक्तिओं के परस्पर बदलने से सब पदों के चिन्ह उलट जायँगे, इसलिये कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदल जायगा। इस पर से किसी पद के चिन्ह जानने के लिये नीचे की युक्ति उत्पन्न होती है।

उर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्तिओं को क्रम से हटा हटा कर नया वर्गाकार पेसा कोष्ठ बनाओ जिसमें दिए हुए पद के सब अक्षर क्रम से प्रधान पद रूप होकर प्रधान कर्ण पंक्ति में आ जायँ, तब जै जै बार पंक्तिओं हटाई गई हों उन हटी सख्याओं का योग विषम होने से अमीष्ट दिया हुआ पद ऋण और सम होने से धन होगा।

### उदाहरण

अ,	क,	ग,	घ
आ,	का,	गा,	र
त,	थ,	द,	क
ता,	था,	दा,	०

इसमें ता का द य इस पद का चिन्ह बताओ। यहां चौथी तिर्यक पंक्ति को तीन स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	हटा स्थान ३
अ,	क,	ग,	य	
आ,	का,	गा,	र	
त,	थ,	द,	ल	

इसमें जिस पंक्ति में का है उसे एक स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	हटा स्थान १
आ,	का,	गा,	र	
अ,	क,	ग,	य	
त,	थ,	द,	ल	

इसमें जिस पंक्ति में द है उसे एक स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	हटा स्थान १
आ,	का,	गा,	र	
त,	थ,	द,	ल	
अ,	क,	ग,	य	

इसमें दिए हुए पद के सब अक्षर अब प्रधान कर्ण पंक्ति में हो गए और हटे स्थानों का योग ५ विचम है; इसलिये दिया हुआ पद ऋण होगा ।

१८२—किसी कनिष्ठफल में यदि दो तिर्यक् पंक्ति वा दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति आपस में तुल्य हों अर्थात् दोनों पंक्तिओं के वे ही अक्षर हों तो कनिष्ठफल शून्य होगा ।

क्योंकि १८१ प्र० से दो पंक्तिओं के परस्पर बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जायगा। परन्तु ऐसी स्थिति में दोनों पंक्तिओं के बदलने से फल ज्यों का त्यों रहेगा; इसलिये

$$क फ = -क फ$$

∴ २कफ = ० अर्थात् कफ = ० यह सिद्ध हुआ।

१८३—किसी कनिष्ठफल में यदि सब तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर रूप में वा सब ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् रूप में लिखें तो कुछ विकार नहीं उत्पन्न होता, कनिष्ठफल ज्यों का त्यों रहता है।

क्योंकि दोनों स्थितिओं में प्रधान पद तो ज्यों का त्यों रहेगा। और जो प्रत्येक पद ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ एक एक ध्रुव के वश से होंगे वे भी दोनों स्थितिओं में एक ही रहेंगे। १८१ प्र० से पद के चिन्ह ज्ञान के लिये प्रथम स्थिति में प्रधान कर्णपंक्ति में दिए हुए पद के अक्षरों को ले आने के लिये जितनी बार पंक्तिओं हटाई जायँगी उन संख्याओं का उतना ही योग होगा जितना कि दूसरी स्थिति में ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटाने से योग होगा—जैसे

$$\begin{vmatrix} अ_१, क_१, ख_१, ग_१ \\ अ_२, क_२, ख_२, ग_२ \\ अ_३, क_३, ख_३, ग_३ \\ अ_४, क_४, ख_४, ग_४ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} अ_१, अ_२, अ_३, अ_४ \\ क_१, क_२, क_३, क_४ \\ ख_१, ख_२, ख_३, ख_४ \\ ग_१, ग_२, ग_३, ग_४ \end{vmatrix}$$

यहां दोनों स्थितिओं में प्रधान कर्णपंक्तिओं में क्रम से अक्षरों को ले आने से पंक्तिओं की हटी हुई संख्याओं का योग



३ है; इसलिये अ<sub>२</sub>क<sub>४</sub>स<sub>१</sub>ग<sub>३</sub> इसका चिन्ह दोनों में एक ही होगा।

१८४—किसी एक पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवाङ्क को यदि एक ही गुणक से गुण दें तो अथ जो नया कनिष्ठफल होगा वह उसी गुण गुणित प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होगा।

क्योंकि प्रत्येक पद में उस पंक्ति के अथ गुण गुणित ध्रुवाङ्क होंगे। इसलिये अथ प्रत्येक पद के योग वियोग से जो नया कनिष्ठफल होगा वह पहिले कनिष्ठफल से गुण गुणित होगा।

अनुमान—(१) किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क एक गुण से गुणित यथा क्रम दूसरी पंक्ति के ध्रुवाङ्क हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} मअ_१, अ_१, ख_१ \\ मअ_२, अ_२, ख_२ \\ मअ_३, अ_३, ख_३ \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_१, अ_१, ख_१ \\ अ_२, अ_२, ख_२ \\ अ_३, अ_३, ख_३ \end{vmatrix} \equiv ०, \text{ १८४ और १८२ प्रक्रम से।}$$

अनुमान—(२) यदि किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क के चिन्ह को उलट दें तो कनिष्ठफल विपरीत चिन्ह का हो जायगा।

क्योंकि १४८ प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} मअ_१, क_१, ख_१ \\ मअ_२, क_२, ख_२ \\ मअ_३, क_३, ख_३ \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_१, क_१, ख_१ \\ अ_२, क_२, ख_२ \\ क_३, क_३, ख_३ \end{vmatrix} = म \cdot कफ$$

इसमें यदि  $m = -1$  तो प्रथम रेखाद्वयान्तर्गत प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवाङ्कों का चिन्ह परिवर्तन हो जायगा और वह म-कफ इसके अर्थात् -कफ इसके तुल्य होगा।

उदाहरण—(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

जहां अन्तिम तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्कों में यदि ३ का भाग दो तो दूसरी तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्क हो जाते हैं इसलिये १५४ प्रक्रम के १ अनुमान से कनिष्ठफल शून्य होगा।

(२) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} कख अ अ^2 \\ खअ क क^2 \\ अक ख ख^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ अ^2 अ^3 \\ १ क^2 क^3 \\ १ ख^2 ख^3 \end{vmatrix}$$

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 12 & 6 \\ 4 & 26 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अकख अ^2 अ^3 \\ अकख क^2 क^3 \\ अकख ख^2 ख^3 \end{vmatrix} = अकख \begin{vmatrix} कख अ अ^2 \\ खअ क क^2 \\ अक ख ख^2 \end{vmatrix}$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 5 \\ 6 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$

(६) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \\ अ'' & क'' & ख'' \end{vmatrix} = \frac{१}{अकख} \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ अ'कख & क'खअ & ख'अक \\ अ''कख & क''खअ & ख''अक \end{vmatrix}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & २ & ५ & १० \\ १ & १ & ६ & १ \\ ७ & ३ & ० & ५ \\ ० & २ & ५ & ८ \end{vmatrix} = \frac{१}{५ \cdot १० \cdot ४ \cdot २} \begin{vmatrix} २० & २० & २० & २० \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ३५ & ३० & ० & १० \\ ० & २० & २० & १६ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ७ & ६ & ० & २ \\ ० & ५ & ५ & ४ \end{vmatrix}$$

(८) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ अ & क & ख \\ अ^२ & क^२ & ख^२ \end{vmatrix} \equiv (क-ख)(ख-अ)(अ-क)$$

इसमें यदि क के स्थान में ख का उत्थापन दो तो दो पंक्तियों के अक्षर समान होने से कफ = ०; इसलिये कफ, क-ख इससे निःशेष होगा। इसी युक्ति से कफ, ख-अ, और अ-क इनसे भी निःशेष होगा। इसलिये तीनों के घात को किसी स्थिर संख्या से गुण देने से कफ होगा। परन्तु दोनों फल में ध्रुव शक्ति ३ है; इसलिये वह स्थिर संख्या कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में होगा। परन्तु कनिष्ठफल का प्रधान पद क ख<sup>२</sup> है जिसमें स्थिर गुणक + १ है। इसलिये ऊपर का सरूप समीकरण सत्य हुआ।

(९) ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ अ & क & ख & ग \\ अ^२ & क^२ & ख^२ & ग^२ \\ अ^३ & क^३ & ख^३ & ग^३ \end{vmatrix} = -(क-ख)(अ-ग)(ख-अ)(क-ग) \times (अ-क)(ख-ग)$$

१८५—किसी कनिष्ठफल में यदि जितना ऊर्ध्वाधर पंक्ति निकाल ली जाय और उतना ही तिर्यक् पंक्ति निकाल ली जाय तो अवशिष्ट पंक्तिओं के यथाक्रम ध्रुवाङ्कों से जो अब नया कनिष्ठफल होगा उसे लघु कनिष्ठफल कहते हैं ।

यदि एक ऊर्ध्वाधर और एक ही तिर्यक् पंक्ति निकाली गई हो तो अवशिष्ट पंक्तिओं से बने लघु कनिष्ठफल को पहिला लघु कनिष्ठफल कहते हैं। यदि दो ऊर्ध्वाधर और दो ही तिर्यक् पंक्तिओं को निकाल कर अवशिष्ट पंक्तिओं से लघु कनिष्ठफल बना हो तो इसे दूसरा लघु कनिष्ठफल कहते हैं। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए ।

निकाली हुई पंक्तिओं में जो उभयनिष्ठ ध्रुवा हैं उनसे भी एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा । अवशिष्ट पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों से जो लघु कनिष्ठफल होता है वह निकाली हुई पंक्तिओं के उभयनिष्ठ ध्रुवाङ्कोद्भव कनिष्ठफल का पूरक कहाता है । यदि प्रधान ध्रुव अ, सम्बन्धी पूरक हो तो इसे प्रधान प्रथम लघु कहत हैं । और इसका जो प्रधान प्रथम लघु होगा उसे आदि कनिष्ठफल का प्रधान द्वितीय लघु कहेंगे ।

एक एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल बनता है उसे कफ इस संकेत से प्रकाश करते हैं । दो दो पंक्तिओं के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल होता है उसे कफ<sub>चक</sub> इस संकेत से प्रकाश करते हैं । इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए ।

इसी प्रकार कफ<sub>अ</sub> इससे प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को और कफ<sub>अ,क</sub> इससे प्रधान द्वितीय लघु कनिष्ठफल को प्रकाश करते हैं ।

संदेप से किसी कनिष्ठफल को प्रधानपद लेकर यौ<sub>±अ,क,ख</sub>..... टन इस संकेत से प्रकाश करते हैं ।

यह संकेत दिखलाता है कि अङ्कपाश से १, २, ३..... न इनके जितने भेद हों उन्हें अ, क, ख, .. ...ट इनके आगे रख कर सब के गुणनफल से जितने पद बनते हों उनके १८०वें प्रक्रम से जो चिन्ह हों उनके सहित सभी के योग वियोग से जा संख्या हो वही इस संकेत से समझो ।

१८६—पिछले प्रक्रमों से सिद्ध है कि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ प्रत्येक भुवाङ्क एक ही बेर आते हैं । इसलिये

$$\text{कफ} = \text{अ}_1 \text{आ}_1 + \text{अ}_2 \text{आ}_2 + \text{अ}_3 \text{आ}_3 + \dots$$

$$\text{कफ} = \text{क}_1 \text{का}_1 + \text{क}_2 \text{का}_2 + \text{क}_3 \text{का}_3 + \dots$$

$$\text{घा, कफ} = \text{अ}_1 \text{आ}_1 + \text{क}_1 \text{का}_1 + \text{ख}_1 \text{खा}_1 + \dots$$

$$\text{कफ} = \text{अ}_2 \text{आ}_2 + \text{क}_2 \text{का}_2 + \text{ख}_2 \text{खा}_2 + \dots$$

यदि अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, .. चार अक्षरों की पंक्ति में पूर्व रीति से कनिष्ठफल को बनाओ और अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub> और अ<sub>४</sub> के गुणकों को अलग कर उनसे नये कनिष्ठफलों को बनाओ तो ऊपर दिए हुए अ<sub>१</sub>आ<sub>१</sub> + अ<sub>२</sub>आ<sub>२</sub> + अ<sub>३</sub>आ<sub>३</sub> + ..... इस कनिष्ठफलमें

$$\text{आ}_1 = \begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix} \quad \text{आ}_2 = \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix} \quad \text{आ}_3 = \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix}$$

$$\text{और } \text{आ}_n = \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \text{ ये आते हैं।}$$

ऊपर स्पष्ट है कि  $\text{क फ} = \text{अ}_1 \text{ आ}_1 + \text{अ}_2 \text{ आ}_2 + \text{अ}_3 \text{ आ}_3 + \dots + \text{अ}_n \text{ आ}_n$  यहाँ ऊपर ही की युक्ति से स्पष्ट है कि  $\text{आ}_1, \text{आ}_2, \text{आ}_3, \dots, \text{आ}_n$  ये  $n-1$  अक्षर सम्बन्धि पंक्तिओं का कनिष्ठफल होगा। इसलिये १, २, ३, ...  $n$  इसके भेद में यदि १ को प्रधान स्थान में सर्वदा स्थिर रखें तो जितने भेद में १ प्रथम स्थित रहेगा उनकी संख्या अकपाश से  $(n-1)!$  इतनी होगी और

$$\text{अ}_1 \text{ आ}_1 = \text{अ}_1 \text{ यौ} \pm \text{क}_2 \text{ ख}_3 \dots \dots \dots \text{द}_n \text{ इसलिये}$$

$$\text{आ}_1 = \text{यौ} \pm \text{क}_2 \text{ ख}_3 \dots \dots \dots \text{द}_n = \begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \dots & \dots & \text{द}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \dots & \dots & \text{द}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{क}_n & \text{ख}_n & \dots & \dots & \text{द}_n \end{vmatrix}$$

और यह कनिष्ठफल १८५वें प्रक्रम से  $\text{अ}_1$  ध्रुव सम्बन्धी प्रधान प्रथम लघु होगा जो कि  $\text{कफअ}_1$  इसके तुल्य है। इसलिये  $\text{आ}_1 = \text{कफअ}_1$ ।

$\text{आ}_2$  के जानने के लिये जिस तिर्यक् पंक्ति में  $\text{अ}_2$  है उसको एक बेर ऊपर हटाकर रखने से  $\text{अ}_1$  के स्थान में  $\text{अ}_2$  हो जायगा। और कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदलजायगा। (१८२ प्रक्रम देखो) इसलिये ऊपर ही की युक्ति से  $\text{आ}_2 = -\text{कफअ}_2$ , यहाँ  $\text{कफअ}_2$  से यह समझना चाहिए कि  $\text{अ}_1$  के स्थान में पंक्ति के हटाने से  $\text{अ}_2$  के आ जाने पर  $\text{अ}_2$  ध्रुवसम्बन्धी प्रधान लघु कनिष्ठफल है। इसी प्रकार  $\text{अ}_3$  की पंक्ति दो बेर हटाने

से  $\text{अ}_1$  के स्थान पर  $\text{अ}_2$  पहुँचेगा। इसलिये ऊपर ही की युक्ति और सङ्केत से  $\text{अ}_2 = \text{कफअ}_1$ । इस प्रकार विषम में ऋण, सम में धन होने से

$$\text{कफ} = \text{अ}_1, \text{कफअ}_1, -\text{अ}_2, \text{कफअ}_2, +\text{अ}_3, \text{कफअ}_3, -\text{अ}_4, \text{कफअ}_4, + \dots$$

इस प्रकार कनिष्ठफल का किसी ऊर्ध्वाधर या तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवाङ्गों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं। जैसे

$\text{कफ} = \text{अ}_1, \text{कफअ}_1, -\text{क}_1, \text{कफक}_1, +\text{ख}_1, \text{कफख}_1, - \dots$   
 किसी लघुकनिष्ठफल (जो कि किसी ध्रुव को गुणता है) का चिन्ह जानना हो तो समझ लेना चाहिए कि कितने बार तिर्यक् पंक्ति और फिर कितने बार ऊर्ध्वाधर पंक्ति के हटाने से अभीष्ट ध्रुवाङ्ग प्रधान  $\text{अ}_1$  के स्थानपर पहुँचता है। उन हटे हुए स्थानों का योग विषम हो तो उस लघु कनिष्ठ को ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे

$\text{यौ} \pm \text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3, \text{ग}_4, \text{घ}_5, \text{ङ}_6$ , इसका मान चतुर्थ ऊर्ध्वाधर पंक्ति के रूप में अर्थात्

$\text{कफ} = \text{ग}_1, \text{गा}_1, +\text{ग}_2, \text{गा}_2, \text{ग}_3, \text{गा}_3, + \dots$  ऐसा जो होगा उसमें  $\text{ग}_1, \text{गा}_1 = \text{ग}_1, \text{कफग}_1$ , इसका क्या चिन्ह होगा यह जानना हो तो यहाँ दो बेर तिर्यक् पंक्ति को ऊपर ले जाने से फिर तीन बेर ऊर्ध्वाधर पंक्ति को बाईं ओर हटाने से तब  $\text{ग}_1$  प्रधानस्थान  $\text{अ}_1$  पर पहुँचेगा। इसलिये दोनों हटे हुए स्थानों का योग ५ विषम होने से सिद्ध हुआ कि  $\text{ग}_1, \text{कफ}$ , यह ऋण चिन्ह का होगा।

चिन्ह जानने के लिये ऊपर ही की युक्ति से नीचे की क्रिया उत्पन्न होती है।  $\text{अ}_1$ , से ऊपर की तिर्यक् पंक्ति में गिनती करो

कि कितनी संख्या पर वह ऊर्ध्वाधर पंक्ति आती है जिसमें कि अपना उद्दिष्ट ध्रुवाङ्क है फिर वहां से उसी संख्या के आगे से उस ऊर्ध्वाधर पंक्ति में नीचे की ओर उद्दिष्ट ध्रुवाङ्क के शिर पर जो ध्रुवाङ्क है वहां तक गिनती करो कि कौन संख्या है यदि विषम हो तो अभीष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे ऊपर के उदाहरण में अ<sub>१</sub> से गिनती करने में जिस ऊर्ध्वाधर पंक्ति में ग<sub>१</sub> है वहां तक अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub> चार संख्या हुईं फिर चार के आगे अभीष्ट ध्रुवाङ्क के शिर पर के ध्रुवाङ्क ग<sub>२</sub> तक गिनती पांच हुई अर्थात् अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, ग<sub>२</sub> ये पांच हुए; इसलिये संख्या विषम होने से उद्दिष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण हुआ।

### उदाहरण

(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} = \text{अ}_1 \begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} - \text{अ}_2 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} + \text{अ}_3 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{अ}_1 \text{क}_2 \text{ख}_3 - \text{अ}_1 \text{क}_3 \text{ख}_2 - \text{अ}_2 \text{क}_1 \text{ख}_3 + \text{अ}_2 \text{क}_3 \text{ख}_1 \\ + \text{अ}_3 \text{क}_1 \text{ख}_2 - \text{अ}_3 \text{क}_2 \text{ख}_1$$

(१७६ प्रक्रम का (२) समीकरण देखो)

(२) दिखलाओ कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} \\ \text{इ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{क} \end{vmatrix} = \text{अ} \begin{vmatrix} \text{क} & \text{फ} \\ \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} - \text{इ} \begin{vmatrix} \text{ह} & \text{ग} \\ \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} + \text{ग} \begin{vmatrix} \text{ह} & \text{ग} \\ \text{क} & \text{फ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{अ} \text{क} \text{ख} + २ \text{फ} \text{ग} \text{इ} - \text{अ} \text{फ}^२ - \text{क} \text{ग}^२ - \text{ख} \text{ह}^२$$



(३) चतुर्थ पंक्ति में जो ध्रुवाङ्क हैं उनके वश से चार चार अक्षर के वश से जो कनिष्ठफल हो उसे सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \text{कफ} = & -\text{अ}_4 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{क}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{ख}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \\ & + \text{ग}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\text{अ}_4 \text{कफ}_{\text{अ}_1} + \text{क}_4 \text{कफ}_{\text{क}_1} - \text{ख}_4 \text{कफ}_{\text{ख}_1} + \text{ग}_4 \text{कफ}_{\text{ग}_1}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ४ & ३ & ५ \\ ८ & ७ & २ \\ ६ & ४ & ९ \end{vmatrix} & \equiv ४ \begin{vmatrix} ७ & २ \\ ४ & ९ \end{vmatrix} - ८ \begin{vmatrix} ३ & ५ \\ ४ & ९ \end{vmatrix} + ६ \begin{vmatrix} ३ & ५ \\ ७ & २ \end{vmatrix} \\ & = ४(६३ - ८) - ८(२७ - २०) + ६(६ - ३५) \\ & = ४ \times ५५ - ८ \times ७ - ६ \times २९ = २२० - ५६ - १७४ \\ & = २२० - २३० \\ & = -१० \end{aligned}$$

(५) नीचे लिखे हुए कनिष्ठफल का मान बताओ ।

$$\begin{vmatrix} ८ & ७ & २ & २० \\ ३ & १ & ४ & ७ \\ १० & ० & २२ & ० \\ ८ & १ & ० & ६ \end{vmatrix}$$

इसे तीसरी पंक्ति के वश से फैलाने में सुभीता पड़ेगा क्योंकि उसमें दो शून्य ध्रुवाङ्क हैं; इसलिये

$$\text{कफ} = १० \left| \begin{array}{ccc} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ १ & ० & ६ \end{array} \right| + २२ \left| \begin{array}{ccc} ८ & ७ & २० \\ २ & १ & ७ \\ ८ & १ & ६ \end{array} \right|$$

इन दोनों कनिष्ठफल के फैलाने से कर = ४३७६ ।

६। फैला कर दिखलाओ कि

$$\begin{array}{l} ० \text{ ख क ग} \\ \text{ख } ० \text{ अ घ} \\ \text{क अ } ० \text{ फ} \\ \text{ग घ फ } ० \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| = १\text{अ}^२\text{ग}^२ + \text{क}^२\text{घ}^२ + \text{ख}^२\text{फ}^२ - २\text{कखघफ} \\ - २\text{खअफघ} - २\text{अकगघ}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{cccc} १ & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ -\text{अ} & १ & \text{ख}' & -\text{क}' \\ -\text{क} & -\text{ख}' & १ & \text{अ}' \\ -\text{ख} & \text{क}' & -\text{अ}' & १ \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| = १ + \text{अ}^२ + \text{क}^२ + \text{ख}^२ + \text{अ}'^२ + \text{क}'^२ + \text{ख}'^२ + (\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}')^२$$

= । फैलाकर दिखाओ कि

$$\begin{array}{cccc} -\text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क} & -\text{अ} & \text{ग} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{ग} & -\text{अ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{ख} & \text{क} & -\text{अ} \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| = \text{अ}^४ + \text{क}^४ + \text{ख}^४ + \text{ग}^४ - २\text{क}^२\text{ख}^२ - २\text{ख}^२\text{अ}^२ - २\text{अ}^२\text{क}^२ \\ - २\text{अ}^२\text{ग}^२ - २\text{क}^२\text{ग}^२ - २\text{ख}^२\text{ग}^२ - ८\text{अकखग}$$

६। फैला कर दिखलाओ और सरूप समीकरण को भी सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{l} \text{य}^४ + \text{र}^४ + \text{ल}^४ - १\text{र}^२\text{ल}^२ \\ - २\text{य}^२\text{ल}^२ - २\text{य}^२\text{र}^२ = \end{array} \left| \begin{array}{ccc} ० & १ & १ \\ १ & ० & \text{ल}^२ \\ १ & \text{ल}^२ & ० \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} ० & \text{य} & \text{र} \\ \text{य} & ० & \text{ल} \\ \text{र} & \text{ल} & ० \end{array} \right|$$

पहिले की ऊपर वाली तिर्यक् पंक्ति के भ्रुवों को यरल से गुण दो औरों को क्रम से य, र, ल, से गुण दो। फिर दूसरी, तीसरी और चौथी ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के भ्रुवों को क्रम से रल, यल, और यर से अपवर्त्तन दे दो तो दूसरा रूप बन जायगा।

१०। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ ह ग र} \\ \text{ह क फ म} \\ \text{ग फ ख न} \\ \text{र म न ०} \end{vmatrix} = (\text{कख} - \text{फ}^2) \text{र}^2 + (\text{खअ} - \text{ग}^2) \text{म}^2 + (\text{अक} - \text{ह}^2) \text{न}^2 \\ + 2(\text{गह} - \text{अफ}) \text{मन} + 2(\text{हफ} - \text{कग}) \text{रन} \\ + 2(\text{फग} - \text{खह}) \text{रम}$$

१८७—यदि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 \text{ क}_1 \\ \text{अ}_2 \text{ क}_2 \end{vmatrix} = (\text{अ}_1 \text{ क}_2), \begin{vmatrix} \text{अ}_1 \text{ क}_1 \text{ ख}_1 \\ \text{अ}_2 \text{ क}_2 \text{ ख}_2 \\ \text{अ}_3 \text{ क}_3 \text{ ख}_3 \end{vmatrix} = (\text{अ}_1 \text{ क}_2 \text{ ख}_3)$$

इत्यादि कल्पना करो तो लाप्लेस (Laplace) ने किसी कनिष्ठ फल को लघु कनिष्ठ फलों के घातों के योग रूप में ले आने के लिये साधारण युक्ति दिखलाई है जिसके अन्तर्गत ऊपर के प्रक्रम की युक्ति है।

कल्पना करो कि किसी कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर दो पंक्तिओं (अ<sub>१</sub> क<sub>१</sub>) के भ्रुवांकों के वश किसी दो तिर्यक् पङ्क्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है वह (अ<sub>१</sub>क<sub>१</sub>) यह है और इसका पूरक क<sub>१</sub>क<sub>१</sub> लघुकनिष्ठफल और इसका पूरक (अ<sub>१</sub>क<sub>१</sub>) है तो पहिला कनिष्ठफल = यौ ± (अ<sub>१</sub>क<sub>१</sub>) क<sub>१</sub>क<sub>१</sub> यह होगा। क्योंकि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में एक भ्रुव अ<sub>१</sub>, ऊर्ध्वाधर और एक भ्रुव क<sub>१</sub>, ऊर्ध्वाधर पंक्ति का रहेगा। मान लो कि एक पद में अ<sub>१</sub>क<sub>१</sub> गुणक है तो एक दूसरा पद अवश्य

प और ब के बदलने से ऐसा होगा जिसका गुणक अ<sub>व</sub>क<sub>व</sub> होगा । इसलिये कनिष्ठफल को यौ (अ<sub>व</sub>क<sub>व</sub>) आ<sub>व</sub> इस रूप में फैला सकते हैं, जहां आ<sub>व</sub> यह उन सब पदों का योग है जो कि ख, ग, घ इत्यादि के आगे न-२ संख्याओं से जो अङ्कुराश से भेद होंगे घे लगे रहेंगे ।  $\pm$  कफ<sub>व</sub> इसका चिन्ह १८० प्रक्रम से विदित हो जायगा । इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों के वश किसी तीन, चार इत्यादि तिर्यक् पंक्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल होंगे इनके और उनके पूरक लघु कनिष्ठफलों के गुणनफलों के योग रूप में किसी कनिष्ठफल को प्रकाश कर सकते हैं । जैसे

बदाहरण—( १ ) (अ<sub>१</sub>क<sub>२</sub>ख<sub>३</sub>ग<sub>४</sub>) इसका मान पहिली दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश जो लघु कनिष्ठफल बनेंगे उनके रूप में लाओ । यहां ऊपर की युक्ति से

$$\text{कफ} = (\text{अ}_1\text{क}_2)(\text{ख}_3\text{ग}_4) - (\text{अ}_1\text{क}_3)(\text{ख}_2\text{ग}_4) + (\text{अ}_1\text{क}_4)(\text{ख}_2\text{ग}_3) \\ + (\text{अ}_2\text{क}_3)(\text{ख}_1\text{ग}_4) - (\text{अ}_2\text{क}_4)(\text{ख}_1\text{ग}_3) + (\text{अ}_3\text{क}_4)(\text{ख}_1\text{ग}_2)$$

चिन्ह जानने के लिये दो तिर्यक् पंक्तिओं को चला कर क्रम से पहिली और दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचाओ और हटाए स्थानों का योग विषम हो तो ऋण और सम हो तो धन समझो । जैसे (अ<sub>१</sub>क<sub>३</sub>) में अ<sub>१</sub> बिना हटाए पहिली पंक्ति में है और क<sub>३</sub> एक स्थान हटाने से दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचती है; इसलिये हटे स्थानों का योग १ विषम होने से वह पद ऋण हुआ । इसी प्रकार (अ<sub>२</sub>क<sub>३</sub>)(ख<sub>१</sub>ग<sub>४</sub>) इस पद में अ<sub>२</sub> का और अ<sub>३</sub> का एक एक बेर हटाने से ये क्रम से पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं; इसलिये हटे स्थानों का योग २ सम होने

से पद धन हुआ। और  $(अ_२क_५)$   $(ख_१ग_३)$  इसमें  $अ_२$  को एक बेर और  $क_५$  को दो बेर हटाने से क्रम से ये पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं; इसलिये दूटे स्थानों का योग ३ विषम होने से पद ऋण हुआ। इस प्रकार सर्वत्र चिन्ह का ज्ञान कर लेना चाहिए।

२।  $(अ_१क_२ख_३ग_४घ_५)$

$$\begin{aligned}
 &= (अ_१क_२) (ख_३ग_४घ_५) - (अ_१क_३) (ख_२ग_४घ_५) \\
 &+ (अ_१क_४) (ख_२ग_३घ_५) - (अ_१क_५) (ख_२ग_३घ_४) \\
 &+ (अ_२क_३) (ख_१ग_४घ_५) - (अ_२क_४) (ख_१ग_३घ_५) \\
 &+ (अ_२क_५) (ख_१ग_३घ_४) + (अ_३क_३) (ख_१ग_२घ_५) \\
 &- (अ_३क_४) (ख_१ग_२घ_४) + (अ_३क_५) (ख_१ग_२घ_३)
 \end{aligned}$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix}
 अ_१ & क_१ & ख_१ & ग_१ & घ_१ & ङ_१ \\
 अ_२ & क_२ & ख_२ & ग_२ & घ_२ & ङ_२ \\
 अ_३ & क_३ & ख_३ & ग_३ & घ_३ & ङ_३ \\
 ० & ० & ० & अ_१ & का_१ & खा_१ \\
 ० & ० & ० & अ_२ & का_२ & खा_२ \\
 ० & ० & ० & अ_३ & का_३ & खा_३
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 अ_१ & क_१ & ख_१ \\
 अ_२ & क_२ & ख_२ \\
 अ_३ & क_३ & ख_३
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 अ_१ & का_१ & खा_१ \\
 अ_२ & का_२ & खा_२ \\
 अ_३ & का_३ & खा_३
 \end{vmatrix}$$

पहिली ऊर्ध्वाधर तीन पंक्तिओं को लेकर यदि लाप्लेस (Laplace) की युक्ति से कनिष्ठफल का रूप फैलाओ तो स्पष्ट है कि जिस पद का गुणक  $(अ_१क_२ख_३)$  यह है उसे छोड़ सब पद शून्य होंगे। और  $(अ_१क_२ख_३)$  इसका गुणक  $(अ_१का_२खा_३)$  यही होगा। इस प्रकार साधारण से जहाँ पंक्ति में २म अक्षर हो और ३म अक्षरों के शून्य हो जाने से  $म^२$  कोष्ठ में शून्य हो तो

म अक्षर की पंक्ति से जो दो कनिष्ठफल होंगे उनके गुणनफल के तुल्य पहिला कनिष्ठफल होगा ।

४ । सिद्ध करो कि

अ आ<sup>२</sup> + क का<sup>२</sup> + ख खा<sup>२</sup> + २फ का र + २ग र आ + २ह आ का

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{र} & \text{र}' \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} & \text{म}' \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} & \text{न}' \\ \text{र} & \text{म} & \text{न} & ० & ० \\ \text{र}' & \text{म}' & \text{न}' & ० & ० \end{vmatrix} \quad \text{जहाँ}$$

$$\begin{aligned} \text{आ} &= \text{मन}' - \text{म}'\text{न}, \\ \text{का} &= \text{नर}' - \text{न}'\text{र}, \\ \text{खा} &= \text{रम}' - \text{र}'\text{म}. \end{aligned}$$

५ । जहाँ प्रत्येक पंक्ति में न अक्षर हैं वहाँ पहिली त ऊर्ध्वा-धर पंक्तिओं के भुवाङ्को के वश त, न तिर्यक् पंक्तिओं के कनिष्ठ-फलों के रूप में मुख्य कनिष्ठफल बनाया जायगा उसमें कितने पद होंगे ।

न में से त, त लेकर लघु कनिष्ठफल बनाने से उनकी संख्या

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-t+1)}{t!} \text{ इन प्रत्येक लघु कनिष्ठफल में पदों की संख्या } t! \text{ होगी; इसलिये इनमें सब पद}$$

$= n(n-1)(n-2) \dots (n-t+1)$  और प्रत्येक के पूरक लघु कनिष्ठफल में पद संख्या  $= (n-t)!$  इससे ऊपर की सब पद की संख्या को गुण देने से

मुख्य कनिष्ठफल में पदों की संख्या

$$\begin{aligned} &= n(n-1)(n-2) \dots (n-t+1)(n-t) \dots 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

यही न अक्षरों की पंक्ति से भी सिद्ध हो जाता है ।

१८८—प्रधान ध्रुवाओं के रूप में कनिष्ठफल के ले आने के लिये चार अक्षर की पक्ति के कनिष्ठफल को अर्थात्

$$\text{कफ} \equiv \begin{vmatrix} \text{आ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{का}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{खा}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{गा}_4 \end{vmatrix}$$

इसे, जहाँ  $\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3, \text{ग}_4$  इनके स्थान में आ, का, खा, गा हैं, आ, का, खा और इसके परस्पर दो दो इत्यादि के घात के रूप में ले आना हो तो ऊपर के प्रक्रमों की युक्ति से

$$\text{कफ} = \text{कफ}_0 + \text{यौ र आ} + \text{यौर'आ का} + \text{आ का खा गा} ।$$

जहाँ जितने पदों में प्रधान ध्रुव नहीं हैं उनके योग के स्थान में कफ<sub>०</sub> है और जितने पदों में एक एक प्रधान ध्रुव हैं उनके योग के स्थान में यौ र आ, जितने पदों में दो दो प्रधान ध्रुव हैं उनके योग के स्थान में यौ र' आ का है। तीन तीन प्रधान ध्रुव नहीं आ सकते क्योंकि जहाँ  $\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3$  होगा वहाँ चौथा  $\text{ग}_4$  भी रहेगा; इसलिये एक स्थान में केवल प्रधान ध्रुवों के घात रहेंगे जो कि अन्त पद में आ का खा गा है। अथ कफ<sub>०</sub> इसका और र, र' इत्यादि गुणक के जानने के लिये पहिले मान लो कि आ, का, खा, गा चारों शून्य के तुल्य हैं तो

$$\text{कफ}_0 = \begin{vmatrix} 0 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & 0 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & 1 & \text{ग}_3 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & \text{ख}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

क्योंकि इसमें प्रधान ध्रुव के कोई पद न रहेंगे।

फिर आ के गुणक र के लिये का, खा, गा तीनों को शून्य मानो तो लघु कनिष्ठफल की युक्ति से गुणक

$$\begin{vmatrix} ० & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ० & ग_३ \\ क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} \text{ यह होगा ।}$$

इसी प्रकार का का गुणक आ, खा, गा के शून्य मानने से ज्ञात होगा और इसी प्रकार खा और गा के भी गुणक आ जा-यँगे । र' के लिये खा और या को शून्य मानो तो आ का का गुणक र'

$$\begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ ख_४ & ० \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार आ खा, इत्यादि गुणक भी आ जायँगे । तब

$$कफ = \begin{vmatrix} ० & क_१ & ख_१ & ग_१ \\ अ_२ & ० & ख_२ & ग_२ \\ अ_३ & क_३ & ० & ग_३ \\ अ_४ & क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ आ \begin{vmatrix} ० & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ० & ग_३ \\ क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} + का \begin{vmatrix} ० & ख_१ & ग_१ \\ अ_२ & ० & ग_२ \\ अ_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} + खा \begin{vmatrix} ० & क_१ & ग_१ \\ अ_२ & ० & ग_२ \\ अ_४ & क_४ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ गा \begin{vmatrix} ० & क_१ & ख_१ \\ अ_२ & ० & ख_२ \\ अ_३ & क_३ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ आका \begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ ख_४ & ० \end{vmatrix} + आ खा \begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ क_४ & ० \end{vmatrix} + आगा \begin{vmatrix} ० & ख_२ \\ क_३ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ काखा \begin{vmatrix} ० & ग_१ \\ अ_४ & ० \end{vmatrix} + का गा \begin{vmatrix} ० & ख_१ \\ अ_३ & ० \end{vmatrix} + खा गा \begin{vmatrix} ० & क_१ \\ अ_२ & ० \end{vmatrix} + आकाखागा$$



जिस कनिष्ठफल में प्रधान ध्रुव शून्य होते हैं उस कनिष्ठफल को अप्रधान ध्रुवक वा निरक्ष कहते हैं। इस प्रकार से यहां जितने अ, का, .....इत्यादि के गुणक हैं सब निरक्ष कनिष्ठफल हैं।

१८६—यदि कनिष्ठफल का रूप एक तिर्यक् और एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों में दा दो लेकर उनके गुणन के रूप में फैलाना हो तो केवल प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के वश से क्रिया दिखला देने से सर्वत्र काम चल जायगा क्योंकि किसी ऊर्ध्वाधर और किसी तिर्यक् पंक्ति को हटा कर प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के स्थान में ला सकते हो।

सुभीते के लिये कनिष्ठफल के रूप में प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक्पंक्तिस्थ ध्रुवों को दूसरे प्रकार के अक्षरों में लिखने से

$$\left| \begin{array}{cccc} \text{अ}, & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \dots \\ \text{अ}' & \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \dots \\ \text{क}' & \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \dots \\ \text{ख}' & \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

ऐसा हुआ। इसे कफ' कहो और अ, सम्बन्धि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को कफ कहो ता कफ' फैलाने से जितने पदों में अ, गुणक होगा वे अ, क फ इसके अन्तर्गत हैं। अब जितने पदों में प्रथम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के एक एक ध्रुवों के गुणनफल गुणक होंगे उनके गुण्यों के जानने के लिये मान लो कि अ अ' गुणक का गुण्य जानना है। १८६ प्रक्रम से कल्पना करो कि कफ को फैलाने से

अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ..... अ<sub>२</sub>, क<sub>२</sub>, ..... के गुणक

आ<sub>१</sub>, का<sub>१</sub>, खा<sub>१</sub>, ..... का<sub>२</sub>, खा<sub>२</sub>, ..... है। तो स्पष्ट है कि कफ' के विस्तृत रूप में अअ' गुणक का जो गुण्य होगा वही कफ के विस्तृत रूप में अ, अ, का गुण्य विपरीत चिन्ह का होगा। इसी प्रकार अ'क' गुणक का गुण्य, अ, क, गुणक के विपरीत चिन्ह गुण्य—का, होगा। इसी प्रकार आने भी जानना चाहिए। इस पर से यह सहज युक्ति उत्पन्न होती है कि प्रधान ध्रुव अ, और जिन दो ध्रुवों के गुणनफल का गुणक जानना हो उन दोनों को लेने से देखो कि चौथा ध्रुव कौन है जिसके लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है तो इसी चौथे ध्रुव का जो गुणक आ, का, खा, .. .. में से हो उसी को विपरीत चिन्ह करने से उन दोनों के गुणनफल का गुणक होगा। जैसे खक' के गुणक को जानना है तो अ, ख, क' इन्हें चतुर्भुज के तीन कोनों पर मानने से ख, को लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है; इसलिये ख, के गुणक को विपरीत चिन्ह का करने से—खा, यह खक' का गुणक होगा। इस प्रकार

कफ' = अ, कफ — आ, अअ' — का, कअ' — खा, खअ — .....

— आ, अक' — का, कक' — खा, खक' — .....

— आ, अख' — का, कख' — खा, खख' — .....

इत्यादि—

## १६०—कनिष्ठफलों का सङ्कलन।

किसी पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवक यदि दो संख्याओं के योग रूप में पृथक् पृथक् किए जायें तो पहिला कनिष्ठफल दो अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में हो सकता है।

कल्पना करो कि पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुव रु  
 $अ_१ + अ'_१, अ_२ + अ'_२, अ_३ + अ'_३, \dots\dots\dots$

इस रूप के हैं तो १८६ प्र० से

$$\begin{aligned} \text{क फ} &= (अ_१ + अ'_१) आ_१ + (अ_२ + अ'_२) आ_२ \\ &\quad + (अ_३ + अ'_३) आ_३ + \dots\dots\dots \\ &= अ_१ आ_१ + अ_२ आ_२ + अ_३ आ_३ + \dots\dots\dots \\ &\quad + अ'_१ आ_१ + अ'_२ आ_२ + अ'_३ आ_३ + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

वा

$$\begin{vmatrix} अ_१ + अ'_१ & क_१ & ख_१ \dots \\ अ_२ + अ'_२ & क_२ & ख_२ \dots \\ अ_३ + अ'_३ & क_३ & ख_३ \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ & ख_१ \dots \\ अ_२ & क_२ & ख_२ \dots \\ अ_३ & क_३ & ख_३ \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} अ'_१ & क_१ & ख_१ \dots \\ अ'_२ & क_२ & ख_२ \dots \\ अ'_३ & क_३ & ख_३ \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

इस पर से ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध होता है ।

यदि दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति में भी दो संख्याओं के योग हों तो ऊपर ही की युक्ति से पहिले प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश दो कनिष्ठफल के योग रूप में वास्तव कनिष्ठफल को ले आओ फिर दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश से प्रत्येक कनिष्ठफल के योग रूप में ले आओ । इस प्रकार, वास्तव कनिष्ठफल चार कनिष्ठफलों के योग रूप में आवेगा ।

जैसे

$$\begin{vmatrix} अ_१ + अ'_१ & क_१ + क'_१ & ख_१ \\ अ_२ + अ'_२ & क_२ + क'_२ & ख_२ \\ अ_३ + अ'_३ & क_३ + क'_३ & ख_३ \end{vmatrix}$$

यह १८७वें प्रक्रम के सकेत से

$(अ_१ क_२ ख_३) + (अ'_१ क_२ ख_३) + (अ_१ क'_२ ख_३) + (अ'_१ क'_२ ख_३)$   
इसके तुल्य होगा ।

इसी प्रकार

$$\begin{vmatrix} अ_१ - अ'_१ + अ''_१ & क_१ & ख_१ \\ अ_२ - अ'_२ + अ''_२ & क_२ & ख_२ \\ अ_३ - अ'_३ + अ''_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ & ख_१ \\ अ_२ & क_२ & ख_२ \\ अ_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} अ'_१ & क_१ & ख_१ \\ अ'_२ & क_२ & ख_२ \\ अ'_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} अ''_१ & क_१ & ख_१ \\ अ''_२ & क_२ & ख_२ \\ अ''_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix}$$

यदि प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति में म खण्ड, दूसरे में न खण्ड, तीसरे में प खण्ड हों तो कनिष्ठफल म न प-तुल्य अन्य कनिष्ठ-फलों के योग रूप में होगा ।

यदि तिर्यक् पंक्ति में ध्रुवों के कई खण्ड हों तो तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर और लघ्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् पंक्तिओं में रखकर ऊपर की युक्ति से कनिष्ठफल को अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में बना सकते हो ।

१६१—यदि एक पंक्तिस्थ ध्रुवक क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों के योग्य तुल्य हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा ।

जैसे

$$\begin{vmatrix} मअ_१ + नक_१ & अ_१ & क_१ \\ मअ_२ + नक_२ & अ_२ & क_२ \\ मअ_३ + नक_३ & अ_३ & क_३ \end{vmatrix} = म \cdot \begin{vmatrix} अ_१ & अ_१ & क_१ \\ अ_२ & अ_२ & क_२ \\ अ_३ & अ_३ & क_३ \end{vmatrix} + न \cdot \begin{vmatrix} क_१ & अ_१ & क_१ \\ क_२ & अ_२ & क_२ \\ क_३ & अ_३ & क_३ \end{vmatrix}$$

यहां दहिने पक्ष के दोनों कनिष्ठफल १८२ वें प्रक्रम से शून्य होंगे।

१६२—एक पंक्तिस्थ ध्रुवों में क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों को जोड़ कर उस पंक्ति के ध्रुव बनाए जायँ तो कनिष्ठफल में भेद नहीं पड़ेगा।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} अ_१ & क_१ & ख_१ \\ अ_२ & क_२ & ख_२ \\ अ_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} अ_१ + म क_१ + न ख_१ & क_१ & ख_१ \\ अ_२ + म क_२ + न ख_२ & क_२ & ख_२ \\ अ_३ + म क_३ + न ख_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix}$$

इसमें दहिना पक्ष तीन कनिष्ठफलों के योग तुल्य होगा, जिनमें पहिला बायें पक्ष के समान और दो १६१ प्रक्रम से शून्य के तुल्य होंगे।

उदाहरण—( १ ) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} क + ख अ १ \\ ख + अ क १ \\ अ + क ख १ \end{vmatrix} = ०$$

द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों को पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में जोड़ देने से फिर अ + क + ख समान गुणक निकाल लेने से पहिले ऊर्ध्वाधर और तीसरे ऊर्ध्वाधर में एक ही ध्रुवक होंगे, इसलिये कनिष्ठफल शून्य होगा।

( २ ) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} १ & २ & ४ \\ २ & ३ & ७ \\ ३ & ४ & १ \end{vmatrix} \text{ इसका मान बताओ।}$$

पहिले ऊर्ध्वाधर के एक गुणित ध्रुवक दूसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवको में और त्रिगुणित तीसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवको में घटा देने से द्वितीय और तृतीय ऊर्ध्वाधर के ध्रुवक समान होते हैं। इसलिये मान शून्य होगा

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 6 & 11 & 8 \\ 12 & 14 & 10 \\ 8 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 11 & 8 \\ 12 & 14 & 10 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & -10 & -10 \\ 12 & -20 & -10 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 20(10 - 20) = -200$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & -2 & 16 \\ -6 & 0 & 4 & -2 \\ 12 & 0 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -6 & 4 & -2 \\ 12 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -12 & 4 & -16 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ -12 & -16 \end{vmatrix} = -2(192 - 192) = 0$$

(६) सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १२ & ६ & ७ & ६ \\ ८ & १० & ११ & ५ \\ १३ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

इस चौंतीसे यन्त्र में पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों में और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों को जोड़ देने से

$$\text{कफ} = ३४ \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १ & ६ & ७ & ६ \\ १ & १० & ११ & ५ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix} = ३४ \begin{vmatrix} ० & १२ & १२ & -१२ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ६ & -११ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & ३ & २ & १६ \\ ० & १ & १ & -१ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ६ & -११ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ७ & ६ & -११ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ४ & ४ & -४ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \times ४ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ १ & १ & -१ \end{vmatrix} = ०$$

७। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & ६ & २ \\ ३ & ५ & ७ \\ ८ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & ६ & २ \\ १ & ५ & ७ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & १ & ६ \\ ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \end{vmatrix}$$

$$= १५ \begin{vmatrix} ८ & -४ \\ ४ & १ \end{vmatrix} = ३६०।$$

८। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 24 & 2 & 16 \\ 23 & 6 & 12 & 2 & 14 \\ 16 & 4 & 12 & 21 & 2 \\ 11 & 24 & 6 & 20 & 3 \end{vmatrix} = -4500000$$

९। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2 & r^2 \\ 1 & l^2 & 0 & y^2 \\ 1 & r^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & l^2 & r^2 \\ 1 & l^2 & -l^2 & y^2 - l^2 \\ 1 & r^2 & y^2 - r^2 & -r^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & l^2 & r^2 \\ 0 & -l^2 & y^2 - r^2 - l^2 \\ 0 & y^2 - r^2 - l^2 & -r^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & l^2 & r^2 \\ 0 & -l^2 & y^2 - r^2 - l^2 \\ 0 & y^2 - r^2 - l^2 & -r^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & l^2 & r^2 \\ 0 & -l^2 & y^2 - r^2 - l^2 \\ 0 & y^2 - r^2 - l^2 & -r^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y^2 - r^2 - l^2)^2 - 4r^2 l^2$$

$$= (y^2 - r^2 - l^2 + 2rl) (y^2 - r^2 - l^2 - 2rl)$$

$$= \{y^2 - (r-l)^2\} \{y^2 - (r+l)^2\}$$

$$= (y-r+l) (y+r-l) (y-r-l) (y+r+l)$$

$$= -(y+r+l) (y+l-r) (y+r-l) (r+l-y)$$

१०। सिद्ध करो कि



$$\text{क फ} = \begin{vmatrix} \frac{(क+ख)^2}{अ} & अ & अ \\ क & \frac{(ख+अ)^2}{क} & क \\ ख & ख & \frac{(अ+क)^2}{ख} \end{vmatrix} = २(अ+क+ख)^3$$

क.निष्ठफल को अकख से गुण देने से

$$\text{अकख} \cdot \text{कफ} = \begin{vmatrix} (क+ख)^2 & अ^2 & अ^2 \\ क^2 & (ख+अ)^2 & क^2 \\ ख^2 & ख^2 & (अ+क)^2 \end{vmatrix}$$

अन्तिम ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में घटा देने से

$$\begin{aligned} \text{अकख} \cdot \text{कफ} &= \begin{vmatrix} (क+ख)^2 - अ^2 & ० & अ^2 \\ ० & (ख+अ)^2 - क^2 & क^2 \\ ख^2 - (अ+क)^2 & ख^2 - (अ+क)^2 & (अ+क)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (अ+क+ख)(क+ख-अ) & ० & अ^2 \\ ० & (अ+क+ख)(ख+अ-क) & क^2 \\ (अ+क+ख)(ख-अ-क) & (अ+क+ख)(ख-अ-क) & (अ+क)^2 \end{vmatrix} \\ &= (अ+क+ख)^2 \begin{vmatrix} क+ख-अ & ० & अ^2 \\ ० & ख+अ-क & क^2 \\ ख-अ-क & ख-अ-क & (अ+क)^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (अ+क+ख)^2 \begin{vmatrix} क+ख-अ & ० & अ^2 \\ ० & ख+अ-क & क^2 \\ ख-अ-क & ख-अ-क & (अ+क)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (अ+क+ख)^2 \begin{vmatrix} क+ख-अ & ० & अ^2 \\ ० & ख+अ-क & क^2 \\ -२क & -२अ & २अक \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2}{\text{अ क}} \left| \begin{array}{ccc} \text{अ}(\text{क} + \text{ख} - \text{अ}) & 0 & \text{अ}^2 \\ 0 & \text{क}(\text{ख} + \text{अ} - \text{क}) & \text{क}^2 \\ -2\text{अक} & -2\text{अक} & 2\text{अक} \end{array} \right|$$

$$= \frac{(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2}{\text{अ क}} \left| \begin{array}{ccc} \text{अ}(\text{अ} + \text{क}) & \text{अ}^2 & \text{अ}^2 \\ \text{क}^2 & \text{क}(\text{ख} + \text{अ}) & \text{क}^2 \\ 0 & 0 & 2\text{अक} \end{array} \right|$$

$$= 2\text{अक}(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2 \left| \begin{array}{ccc} \text{क} + \text{ख} & \text{अ} & \text{अ} \\ \text{क} & \text{ख} + \text{अ} & \text{क} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$= 2\text{अक}(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2 \left| \begin{array}{cc} \text{क} + \text{ख} & \text{अ} \\ \text{क} & \text{ख} + \text{अ} \end{array} \right|$$

$$= 2\text{अकख}(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2$$

$$\therefore \text{कफ} = 2(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})^2$$

११। सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \\ \text{अ}^2 & \text{क}^2 & \text{ख}^2 & \end{array} = (\text{क} - \text{ख})(\text{ख} - \text{अ})(\text{अ} - \text{क})(\text{अ} + \text{क} + \text{ख})$$

१२। सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} & \text{घ} & \\ \text{अ}^2 & \text{क}^2 & \text{ख}^2 & \text{ग}^2 & \text{घ}^2 & \\ \text{अ}^3 & \text{क}^3 & \text{ख}^3 & \text{ग}^3 & \text{घ}^3 & \end{array} = -(\text{क} - \text{ख})(\text{अ} - \text{घ})(\text{ख} - \text{अ}) \cdot \dots \cdot (\text{ग} - \text{घ})(\text{अ} + \text{क} + \text{ख} + \text{ग} + \text{घ})$$

१३। सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \left| \begin{array}{ccc} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{क} & \text{ख} & \text{अ} \end{array} \right| \text{ इसका मान बताओ ।}$$

मान लो कि १ का घनमूल घा, घा<sup>२</sup>, घा<sup>३</sup>, = १ ये हैं।  
दूसरी ऊर्ध्वाधर को घा से, तीसरी को घा<sup>२</sup> से गुण कर पहिली  
में जो १ = घा<sup>३</sup> से गुणित है जोड़ देने से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अघा}^3 + \text{कघा} + \text{खघा}^2 & \text{क} & \text{ख} \\ \text{खघा}^3 + \text{अघा} + \text{कघा}^2 & \text{अ} & \text{क} \\ \text{कघा}^3 + \text{खघा} + \text{अघा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2 & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा}(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} १ & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} १ + \text{घ} + \text{घा}^2 & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & १ & १ \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ \text{घा} & \text{अ} - \text{क} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} - \text{अ} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} \text{घा} & \text{अ} - \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} - \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2)(\text{अ} + \text{खघा} + \text{कघा}^2) ।$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क} & \text{अ} & \text{ग} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{ग} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{ख} & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix} &= -(\text{अ} + \text{क} + \text{ख} + \text{ग})(\text{क} + \text{ख} - \text{ग} \\ &\quad - \text{ग})(\text{ख} + \text{अ} - \text{क} - \text{घ}) \\ &\quad (\text{अ} + \text{क} - \text{ख} - \text{घ}) \end{aligned}$$

१८६ प्रक्रम का द्वाँ उदाहरण देखो उसमें  $-\text{अ} = \text{अ}$ ।

यहाँ प्रत्येक गुणक खण्ड निकल आवेंगे। जैसे पहिले ऊर्ध्वाधर में दूसरे को जोड़ तीसरा और चौथा घटाओ तो  $\text{अ} + \text{क} - \text{ख} - \text{घ}$  यह गुणक खण्ड आ जायगा। प्रथम ऊर्ध्वाधर में और तीनों को जोड़ देने से  $\text{अ} + \text{क} + \text{ख} + \text{ग}$  यह गुणक आ जायगा। इस प्रकार और भी दोनों गुणक आ जायँगे।

१६३—कलिष्ठफलों का गुणन।

यदि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \quad \text{इसका और} \quad \begin{vmatrix} \text{आ}_1 & \text{का}_1 & \text{गा}_1 \\ \text{आ}_2 & \text{का}_2 & \text{गा}_2 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसका मान फैलाकर बीजगणित की साधारण रीति से गुणन करो और गुणनफलों के प्रत्येक पद को यथोचित क्रम से रक्खो तो गुणनफल

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_1 + \text{क}_1\text{का}_1 + \text{ग}_1\text{गा}_1 & \text{अ}_1\text{आ}_2 + \text{क}_1\text{का}_2 + \text{ग}_1\text{गा}_2 \\ \text{अ}_2\text{आ}_1 + \text{क}_2\text{का}_1 + \text{ग}_2\text{गा}_1 & \text{अ}_2\text{आ}_2 + \text{क}_2\text{का}_2 + \text{ग}_2\text{गा}_2 \\ \text{अ}_3\text{आ}_1 + \text{क}_3\text{का}_1 + \text{ग}_3\text{गा}_1 & \text{अ}_3\text{आ}_2 + \text{क}_3\text{का}_2 + \text{ग}_3\text{गा}_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_3 + \text{क}_1\text{का}_3 + \text{ग}_1\text{गा}_3 \\ \text{अ}_2\text{आ}_3 + \text{क}_2\text{का}_3 + \text{ग}_2\text{गा}_3 \\ \text{अ}_3\text{आ}_3 + \text{क}_3\text{का}_3 + \text{ग}_3\text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा ।

इस पर से लिख होता है कि गुण्य और गुणक ( जिनके प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवों की संख्या एक ही है ) के प्रत्येक पंक्ति में जितने ध्रुवक होंगे उतने ही गुणनफल के प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवक होंगे । और गुण्य गुणक के तुल्य स्थानीय प्रति तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों के गुणनफल के योग के समान गुणनफल के तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवक होते हैं । अर्थात् गुण्य के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव अ, से गुणक के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव आ, को, दूसरे ध्रुव क, से दूसरे ध्रुव का, को और तीसरे ध्रुव ग, से तीसरे ध्रुव गा, को गुण कर जोड़ देने से गुणनफल की पहिली तिर्यक् पंक्ति में पहिला ध्रुव होगा । गुण्य के पहिली तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणक के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का द्वितीय ध्रुव होगा और गुण्य के उन्हीं ध्रुवों से गुणक के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का तीसरा ध्रुव होगा ।

इसी प्रकार गुण्य के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से यथा स्थानक गुणक के प्रति तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ क्रम से ध्रुव होंगे ।

इसी प्रकार गुण्य के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणनफल के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को बना लेना चाहिए ।

यह नियम तीन ध्रुव की पंक्ति में ऊपर के गुणनफल में प्रत्यक्ष देख पड़ता है परन्तु चाहे पंक्ति में जितने ध्रुव हों सब न लिये ऊपर का प्रथम सत्य हो जाता है।

यहां गुणनफल में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुव में तीन तीन खण्ड हैं। इसलिये गुणनफल रूप कनिष्ठफल को १६० वें प्रक्रम से २७ अन्यकनिष्ठफलों के योग रूप में ला सकते हो। १८७ प्रक्रम के ३ उदाहरण में भी दो कनिष्ठफलों के गुणनफल के तुल्य एक कनिष्ठफल आया है। उदाहरण—

( १ ) सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{rcl} \text{अ} + \text{उक} & \text{ख} + \text{उग} & \text{अ}' - \text{उक}' \quad \text{ख}' - \text{उग}' \\ - \text{ख} + \text{उग} & \text{अ} - \text{उक} & - \text{ख} - \text{उग}' \quad \text{अ}' + \text{उक}' \\ & & = \begin{array}{l} \text{गा} - \text{उखा} \quad \text{का} - \text{उआ} \\ - \text{का} - \text{उआ} \quad \text{गा} + \text{उखा} \end{array} \end{array}$$

$$\text{जहां } \text{उ} = \sqrt{-1}, \text{ आ} = \text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग},$$

$$\text{का} = \text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग},$$

$$\text{खा} = \text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग}, \text{ गा} = \text{अअ}' + \text{कक}' + \text{ख}'\text{ख} + \text{गग}' + \text{ग}'\text{ग}।$$

गुण्य, गुणक और गुणनफल का मान फैलाने से यहां

$$\begin{aligned} & ( \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ख}^2 + \text{ग}^2 ) ( \text{अ}'^2 + \text{क}'^2 + \text{ख}'^2 + \text{ग}'^2 ) \\ &= ( \text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}' + \text{गग}' )^2 + ( \text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग} )^2 \\ &+ ( \text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग} )^2 + ( \text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग} )^2 \end{aligned}$$

यही ओलर का सिद्धान्त ( Euler's theorem ) है। इस पर से किसी चार संख्या के दो युग्मों के वर्ग योग के गुणनफल को चार संख्याओं के वर्ग योग के रूप में ला सकते हैं।

( २ ) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} २कख - अ^२ & ख^२ & क^२ \\ ख^२ & २खअ - क^२ & अ^२ \\ क^२ & अ^२ & २अक - ख^२ \end{vmatrix} = (अ^३ + क^३ + ख^३ - ३अकख)^२$$

ऊपर के कनिष्ठफल को सहज में जान सकते हो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} -अ & ख & क \\ -क & अ & ख \\ -ख & क & अ \end{vmatrix} \text{ इसके गुणनफल के तुल्य है।}$$

( ३ ) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ग & घ \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ग & अ_१ & क_१ \\ ० & घ & अ_२ & क_२ \end{vmatrix} \quad ( १८७ वां प्रक्रम देखो )$$

१६४। यदि ऊर्ध्वाधर और क्षीर्यक् पंक्ति समान न हों तो ऐसे ध्रुवस्थिति को आयताकृति कहते हैं।

ये ध्रुव स्वयं तो कोई परिच्छिन्नफल नहीं उत्पन्न करते परन्तु दो आयताकृति ध्रुवों के १६३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल से एक कनिष्ठफल उत्पन्न कर सकते हैं और उसका मान इस प्रकार जान सकते हैं। कल्पना करो कि

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ}_1 \text{ क}_1 \text{ ख}_1 \text{ ग}_1 \\ \text{अ}_2 \text{ क}_2 \text{ ख}_2 \text{ ग}_2 \end{array} \right\} \dots (1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{आ}_1 \text{ का}_1 \text{ खा}_1 \text{ गा}_1 \\ \text{आ}_2 \text{ का}_2 \text{ खा}_2 \text{ गा}_2 \end{array} \right\} \dots (2)$$

ये दो आयताकार भ्रुवक हैं। १८३ वें प्रक्रम की युक्ति से इनके गुणन से कनिष्ठफल

$$\begin{array}{l} \text{अ}_1 \text{ आ}_1 + \text{क}_1 \text{ का}_1 + \text{ख}_1 \text{ खा}_1 + \text{ग}_1 \text{ गा}_1 \\ \text{अ}_2 \text{ आ}_2 + \text{क}_2 \text{ का}_2 + \text{ख}_2 \text{ खा}_2 + \text{ग}_2 \text{ गा}_2 \\ \text{अ}_1 \text{ आ}_2 + \text{क}_1 \text{ का}_2 + \text{ख}_1 \text{ खा}_2 + \text{ग}_1 \text{ गा}_2 \\ \text{अ}_2 \text{ आ}_1 + \text{क}_2 \text{ का}_1 + \text{ख}_2 \text{ खा}_1 + \text{ग}_2 \text{ गा}_1 \end{array}$$

यह होगा जिसका मान स्पष्ट है कि अन्य कनिष्ठों के योग रूप में

$$\begin{aligned} & (\text{अ}_1 \text{ क}_2) (\text{आ}_1 \text{ का}_2) + (\text{अ}_1 \text{ ख}_2) (\text{आ}_1 \text{ खा}_2) + (\text{अ}_1 \text{ ग}_2) (\text{आ}_1 \text{ गा}_2) \\ & + (\text{क}_1 \text{ ख}_2) (\text{का}_1 \text{ खा}_2) + (\text{क}_1 \text{ ग}_2) (\text{का}_1 \text{ गा}_2) + (\text{ख}_1 \text{ ग}_2) (\text{खा}_1 \text{ गा}_2) \end{aligned}$$

यह होगा। अर्थात् तिर्यक् पंक्ति के समान ऊर्ध्वाधर पंक्ति को लेकर यथा स्थानक दोनों आयताकार भ्रुवों के वश जितने संभाव्य एक एक कनिष्ठफल हों उनके गुणनफल के योग के समान ऊपर का कनिष्ठफल होगा।

१८५—ऊपर तो वह स्थिति दिखलाई गई है जिसमें तिर्यक् पंक्ति की संख्या ऊर्ध्वाधर पंक्ति की संख्या से अल्प है, अब वह स्थिति दिखलाते हैं जिसमें ऊर्ध्वाधर ही तिर्यक् से अल्प है। इसमें १८३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल रूप कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा क्योंकि यदि

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ}_1 \text{ क}_1 \\ \text{अ}_2 \text{ क}_2 \\ \text{अ}_3 \text{ क}_3 \end{array} \right\} (1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{आ}_1 \text{ का}_1 \\ \text{आ}_2 \text{ का}_2 \\ \text{आ}_3 \text{ का}_3 \end{array} \right\} \dots (2)$$

इन पर से गुणनफल रूप कनिष्ठफल



$$\left| \begin{array}{ccc} अ_1 अ_1 + क_1 का_1 & अ_1 अ_2 + क_1 का_2 & अ_1 अ_3 + क_1 का_3 \\ अ_2 अ_1 + क_2 का_1 & अ_2 अ_2 + क_2 का_2 & अ_2 अ_3 + क_2 का_3 \\ अ_3 अ_1 + क_3 का_1 & अ_3 अ_2 + क_3 का_2 & अ_3 अ_3 + क_3 का_3 \end{array} \right|$$

यह होगा जो स्पष्ट है कि १६३ वें प्र० की युक्ति से

$$\left| \begin{array}{ccc} ० & अ_1 & क_1 \\ ० & अ_2 & क_2 \\ ० & अ_3 & क_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} ० & अ_1 & का_1 \\ ० & अ_2 & का_2 \\ ० & अ_3 & का_3 \end{array} \right| = ०$$

इसके तुल्य होगा ।

यह तो दो तिर्यक् और दो ऊर्ध्वाधर आयता में दिखलाया गया है । परन्तु इसी प्रकार सर्वत्र सिद्ध कर सकते हो कि ऊर्ध्वाधर से यदि तिर्यक् अल्प हो तो १६४ वें प्रक्रम की स्थिति होगी और यदि ऊर्ध्वाधर तिर्यक् पंक्ति की संख्या से अल्प हो तो गुणनफल रूप कनिष्ठफल सर्वदा शून्य होगा ।

उदाहरण— १ ।

$$\left. \begin{array}{ccc} १ & १ & १ \\ अ & क & ख \end{array} \right\} \dots (१) \quad \left. \begin{array}{ccc} १ & १ & १ \\ अ & क & ख \end{array} \right\} \dots (२)$$

इन आयतस्थ भुजों से सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{ccc} ३ & अ + क + ख & \\ अ + क + ख & अ^२ + क^२ + ख^२ & \end{array} \right| \equiv (अ - क)^२ + (अ - ख)^२ + (क - ख)^२$$

२ ।

$$\left. \begin{array}{ccc} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \end{array} \right\} \dots (१) \quad \left. \begin{array}{ccc} ख & -२क & अ \\ ख' & -२क' & अ' \end{array} \right\} \dots (२)$$

इनसे सिद्ध करो कि

$$४(अ'ख' - क')^२(अ'ख' - क')^२ - (अ'ख' + अ'ख' - २क')^२ \\ \equiv ४(क'ख' - क'ख')(अ'क' - अ'क) - (अ'ख' - अ'ख')^२$$

३। सिद्ध करो कि

$$\left. \begin{array}{ccc} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \end{array} \right\}$$

$$\text{इसको इससी से ११३ प्र० की युक्ति से गुण से एक} \\ (अ'^२ + क'^२ + ख'^२)(अ'^२ + क'^२ + ख'^२) \equiv (अ'अ' + क'क' + ख'ख')^२ \\ + (क'ख' - ख'क')^२ + (ख'अ' - अ'ख')^२ + (अ'क' - अ'क')^२$$

ऐसा समीकरण बन सकता है।

४। सिद्ध करो कि

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (अ_१ - क_१)^२ & (अ_१ - क_२)^२ & (अ_१ - क_३)^२ & (अ_१ - क_४)^२ \\ (अ_२ - क_१)^२ & (अ_२ - क_२)^२ & (अ_२ - क_३)^२ & (अ_२ - क_४)^२ \\ (अ_३ - क_१)^२ & (अ_३ - क_२)^२ & (अ_३ - क_३)^२ & (अ_३ - क_४)^२ \\ (अ_४ - क_१)^२ & (अ_४ - क_२)^२ & (अ_४ - क_३)^२ & (अ_४ - क_४)^२ \end{array} \right\} \equiv ०$$

$$\left. \begin{array}{ccc} अ_१ & अ_१ & १ \\ अ_२ & अ_२ & १ \\ अ_३ & अ_३ & १ \\ अ_४ & अ_४ & १ \end{array} \right\} \quad (१) \quad \left. \begin{array}{ccc} १ - २क_१ & क_१^२ & \\ १ - २क_२ & क_२^२ & \\ १ - २क_३ & क_३^२ & \\ १ - २क_४ & क_४^२ & \end{array} \right\} \quad (२)$$

११६—एक घात अनेक वर्ण समीकरण में कनिष्ठफल से अव्यक्त साजानयन।

११६ प्रक्रम में दिखाता चुके हैं कि

$$कफ = अ_१ अ_१ + अ_२ अ_२ + अ_३ अ_३ + \dots \text{इत्यादि}$$

जहाँ  $अ_१, अ_२, \dots$  इत्यादि  $अ_१, अ_२, \dots$  ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों के अतिरिक्त और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों के वश से उत्पन्न हुए हैं।

यदि  $अ_१, अ_२, अ_३$  इत्यादि क्रम से  $क_१, क_२, क_३$  इत्यादि के तुल्य हों तो १८२वें प्रक्रम से कनिष्ठफल शून्य होगा; इसलिये ऊपर के मान में उत्थापन देने से

$$कफ = क_१ आ_१ + क_२ आ_२ + क_३ आ_३ + इत्यादि = ०$$

$$इसी प्रकार ख_१ आ_१ + ख_२ आ_२ + ख_३ आ_३ + इत्यादि = ०$$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए। अब इसके बल से एक घात अनेक घर्ण समीकरण में अव्यक्त मान इस प्रकार जान सकते हैं। मान लें कि

$$अ_१ य + क_१ र + ख_१ ल = म_१ \dots\dots\dots (१)$$

$$अ_२ य + क_२ र + ख_२ ल = म_२ \dots\dots\dots (२)$$

$$अ_३ य + क_३ र + ख_३ ल = म_३ \dots\dots\dots (३)$$

ये दिए हुए समीकरण हैं। इनके गुणक  $अ_१, अ_२, \dots$ ;  $क_१, क_२, \dots$  इत्यादि को ध्रुवक मान पिछले प्रक्रमों से  $आ_१, आ_२, \dots$  इत्यादि के मान जानकर (१) समीकरण को  $आ_१$  से, (२) को  $आ_२$  से और (३) को  $आ_३$  से गुण कर जोड़ लेने से

$$(अ_१ आ_१ + अ_२ आ_२ + अ_३ आ_३) य + (क_१ आ_१ + क_२ आ_२ + क_३ आ_३) र + (ख_१ आ_१ + ख_२ आ_२ + ख_३ आ_३) ल$$

$$= कफ य = म_१ आ_१ + म_२ आ_२ + म_३ आ_३$$

$$= \begin{vmatrix} म_१ & क_१ & ख_१ \\ म_२ & क_२ & ख_२ \\ म_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$(क_१ का_१ + क_२ का_२ + क_३ का_३) र = म_१ का_१ + म_२ का_२ + म_३ का_३$$

$$\text{कफर} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{म}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{म}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{म}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix}$$

और

$$\text{कफल} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{म}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{म}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{म}_3 \end{vmatrix}$$

अर्थात्

$$\text{कफर} = (\text{म}_1, \text{ख}_2, \text{अ}_3)$$

$$\text{कफर} = (\text{अ}_1, \text{म}_2, \text{ख}_3)$$

$$\text{कफल} = (\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{म}_3)$$

इसी प्रकार साधारण से जहाँ  $\text{य}, \text{र}, \text{ल}, \text{व}, \text{म}, \text{द} \dots\dots$   
अव्यक्त हैं तहाँ

$$r = \frac{(\text{म}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3 \dots \dots \text{द}_n)}{(\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3 \dots \dots \text{द}_n)}, \quad r = \frac{(\text{अ}_1, \text{म}_2, \text{ख}_3 \dots \dots \text{द}_n)}{(\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3 \dots \dots \text{द}_n)}$$

$$r = \frac{(\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{म}_3 \dots \dots \text{द}_n)}{(\text{अ}_1, \text{क}_2, \text{ख}_3 \dots \dots \text{द}_n)}, \text{ इत्यादि।}$$

( संकेत के लिये १८७ वां प्रकरण देखो )

१८७—इसी प्रकार एक घात अनेक वर्ग समीकरण में  
जहाँ  $n$  अव्यक्त हों और समीकरण  $n-१$  इतने ही हों अर्थात्  
तैसे

$$\left. \begin{aligned} \text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1\text{र} + \text{ख}_1\text{ल} + \text{ग}_1\text{व} &= 0 \\ \text{अ}_2\text{य} + \text{क}_2\text{र} + \text{ख}_2\text{ल} + \text{ग}_2\text{व} &= 0 \\ \text{अ}_3\text{य} + \text{क}_3\text{र} + \text{ख}_3\text{ल} + \text{ग}_3\text{व} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (१)$$

यद्वा अज्ञात वर्ण चार और समीकरण तीन ही हैं तो  
कल्पना करो कि एक चौथा समीकरण

$$अ_य + क_र + ख_ल + ग_व = उ \dots \dots (२)$$

ऐसा है जहाँ  $अ_क, \dots, उ$  कोई कल्पित संख्यायें हैं ।  
(१) के नीचे (२) इसे भी मिला देने से १६६वें प्रक्रम की युक्ति  
से  $म_१ = म_२ = म_३ = ०$  मानने से और  $म_४ = उ$

$$कफ_य = उ_आ_४, कफ_र = उ_का_४, कफ_ल = उ_खा_४,$$

$$व_फ_व = उ_गा_४$$

अथवा

$$\frac{य}{आ_४} = \frac{र}{का_४} = \frac{ल}{खा_४} = \frac{व}{गा_४} = \frac{उ}{कफ} \dots \dots (३)$$

ऊपर के तीनों समीकरण तीन दिए समीकरणों में जो  
अव्यक्त के गुणक हैं उनके रूप में अव्यक्तों की निष्पत्ति दिख-  
लाते हैं ।

यदि मान लें कि  $उ = ०$  तो (३) से

$$कफ_य = उ_आ_४ = ० \therefore कफ = ०$$

(३) से जो अव्यक्त मान आते हैं उनका (२) में उत्थापन  
देने से

$$अ_४आ_४ + क_४का_४ + ख_४खा_४ + ग_४गा_४ = उ_कफ$$

$$\text{या} \quad अ_४आ_४ + क_४का_४ + ख_४खा_४ + ग_४गा_४ = कफ = ०$$

इस पर से यह सिद्ध होता है कि

यदि न वर्णों से न समीकरण बनें जिसमें दहिना  
थक शून्य के तुल्य हों तो १६६वें प्रक्रम की युक्ति

से अव्यक्तों के गुणों में जो कनिष्ठफल होगा वह शून्य के तुल्य होगा ।

१९७—हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल ।

१२३वें प्रक्रम में  $आ_१, का_१, खा_१, \dots, आ_२, का_२, खा_२, \dots$  इत्यादि जो दिखता था वह हैं उन्हें उत्क्रम भुव कहते हैं । उत्क्रम भुवों से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है उसे हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल कहते हैं । कनिष्ठफल और उत्क्रम कनिष्ठफल के वश से भी अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं ! जैसे उत्क्रम कनिष्ठफल को एक कहो तो

$$(१) \quad \begin{array}{c|c} अ, क, ख, & \\ \hline कफ = अ, क, ख, & \\ \hline अ, क, ख, & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} आ, का, खा, & \\ \hline उकफ = आ, का, खा, & \\ \hline आ, का, खा, & \end{array}$$

१२३वें प्रक्रम की युक्ति से इन दोनों का गुणनफल करो तो

$$\begin{array}{c|c} & कफ & ० & ० \\ \hline कफ उकफ = & ० & कफ & ० \\ \hline & ० & ० & कफ \end{array} = कफ^2$$

इसलिये उकफ = कफ<sup>२</sup> ।

यह तो तीन अक्षरों की पंक्ति पर से लाघव के लिये दिख-  
ताया है । इसी प्रकार सर्वत्र चाहे पंक्ति में जितने अक्षर हों  
लिख होता है कि

दिए हुए कनिष्ठफल के  $n-१$  घात के तुल्य  
उत्क्रम कनिष्ठफल होता है ।

( २ ) उत्क्रम कनिष्ठफल के कोई लघु कनिष्ठफल को अपने मुख्य कनिष्ठफल सम्बन्धी ध्रुवों के रूप में ले आने के लिये चार अक्षर की पंक्ति के लेने से

$$\left| \begin{array}{cccc} अ_१ & क_१ & ख_१ & ग_१ \\ अ_२ & क_२ & ख_२ & ग_२ \\ अ_३ & क_३ & ख_३ & ग_३ \\ अ_४ & क_४ & ख_४ & ग_४ \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} १ & ० & ० & ० \\ अ_२ & का_२ & खा_२ & गा_२ \\ अ_३ & का_३ & खा_३ & गा_३ \\ अ_४ & का_४ & खा_४ & गा_४ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} अ_१ & ० & ० & ० \\ अ_२ & कफ & ० & ० \\ अ_३ & ० & कफ & ० \\ अ_४ & ० & ० & कफ \end{array} \right|$$

इसलिये

$$\text{कफ} \left| \begin{array}{ccc} का_२ & खा_२ & गा_२ \\ का_३ & खा_३ & गा_३ \\ का_४ & खा_४ & गा_४ \end{array} \right| = अ_१ \text{कफ}^३ ।$$

$$\text{वा} (का_२ खा_२ गा_२) = अ_१ \text{कफ}^२ ।$$

इस प्रकार उकफ में आ<sub>१</sub> का पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठफल है वह आ गया। दूसरा लघु कनिष्ठफल (१=५ प्र० देखो) निकालना हो तो ऊपर की युक्ति से

$$\left| \begin{array}{cccc} अ_१ & क_१ & ख_१ & ग_१ \\ अ_२ & क_२ & ख_२ & ग_२ \\ अ_३ & क_३ & ख_३ & ग_३ \\ अ_४ & क_४ & ख_४ & ग_४ \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} १ & ० & ० & ० \\ ० & १ & ० & ० \\ अ_३ & का_३ & खा_३ & गा_३ \\ अ_४ & का_४ & खा_४ & गा_४ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} अ_१ & क_१ & ० & ० \\ अ_२ & क_२ & ० & ० \\ अ_३ & क_३ & कफ & ० \\ अ_४ & क_४ & ० & कफ \end{array} \right|$$

इसलिये

$$\text{कफ} \left| \begin{array}{cc} खा_३ & गा_३ \\ खा_४ & गा_४ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{array} \right| \text{कफ}$$

अर्थात्  $(\text{ला}_1, \text{गा}_1) = (\text{अ}_1, \text{क}_1)$  कफ ।

इस पर से सामान्यतः यह क्रिया उत्पन्न होती है:—

उत्क्रम कनिष्ठफल का म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल, मुख्य कनिष्ठफल के म-१ यात से गुणित जो मुख्य कनिष्ठफल के म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल का पूरक हो उसके तुल्य होता है ।

जैसे ऊपर के उदाहरण में यदि पंक्ति में पांचवां एक अक्षर घ और घा और बढ़ जाता तो

$$(\text{ला}_1, \text{गा}_1, \text{घा}_1) = (\text{अ}_1, \text{क}_1) \text{ कफ } ।$$

यदि मुख्य कनिष्ठफल शून्य हो तो ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि उत्क्रम कनिष्ठफल और इसके सब लघु कनिष्ठ-फल शून्य होंगे । इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि

यदि कोई कनिष्ठफल शून्य हो तो इसके और इसके उत्क्रम कनिष्ठफल के यथा स्थानक पंक्तिओं के ध्रुवकों में समान निष्पत्ति होगी ।

१६६—सम्बद्ध ध्रुव—यत्संख्यक तिर्यक् पंक्ति में यत्संख्यक ध्रुव है तत्संख्यक ऊर्ध्वाधर पंक्ति के तत्संख्यक ध्रुव को लां तो इन दोनों ध्रुवों में एक दूसरे का संबद्ध ध्रुव कहाता है । जैसे चार अक्षर की पंक्ति में तीसरी पंक्ति का चौथा ध्रुव ग, और तीसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति का चौथा ध्रुव ख, ये दोनों परस्पर संबद्ध ध्रुव कहे जाते हैं । ये जिस वर्ग-



क्षेत्र के दो कोने पर हैं इनसे अन्य दोनों कोनों पर गर्ह हुई कर्णरेखा से विरुद्ध दिशा में दोनों तुल्य अन्तर पर रहते हैं । परन्तु ये कर्णप्रधान ध्रुवक कर्ण के खण्ड ही होंगे; इसलिये यह भी कह सकते हो कि ये दोनों प्रधान कर्ण से विरुद्ध दिशा में तुल्य अन्तर पर रहते हैं ।

**तद्रूप कनिष्ठफल**—प्रत्येक दो दो संबद्ध ध्रुव जहाँ आपस में तुल्य होते हैं उसे तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं ।

( १ ) दोनों संबद्ध ध्रुवों के पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठफल होंगे वे आपस में तुल्य होंगे । क्योंकि प्रथम ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये जै बार तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पक्षिर्भों को हटाना पड़ेगा उतने ही बार दूसरे ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये हटाना पड़ेगा । वा दोनों को प्रधान स्थान में ले आने के लिये तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पक्षिर्भों का एक ही परिवर्तन होगा ।

( २ ) तद्रूप कनिष्ठफल में स्पष्ट है कि प्रधान लघु कनिष्ठफल भी सब तद्रूप कनिष्ठफल होंगे क्योंकि प्रधान स्थान में, जिनने अक्षर ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् में लेकर वर्ग बनाओगे उसके पूरक में अवशिष्ट संबद्ध ध्रुव जो कि आपस में तुल्य हैं, रहेंगे ।

( ३ ) ( १ ) से यह भी सिद्ध होता है कि संबद्ध ध्रुवों के पूरक प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होने से उत्क्रम कनिष्ठफल में भी तत्स्थानीय ध्रुव तुल्य होंगे क्योंकि जो पूरक है वही उत्क्रम में तत्स्थानीय ध्रुव होते हैं; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा ।

## उदाहरण

१।      अ    ह    ग  
कफ =    ह    क    फ  
          ग    फ    ख ।

इसके उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ ।

१८७वें प्रक्रम में जो आ, आ, ..... हैं उनके स्थान में यहाँ लघु अक्षर संबंधी उनके मान क्रम से आ हा गा फा इत्यादि मानो तो १८७ प्रक्रम से

कफ = अआ + हहा + गगा = हहा + कका + फफा = गगा + फफा + खख; इसलिये उत्क्रम में आ, हा, गा, हा, आ, फा, गा, फा, खा ये भुव हुए तब

कफ =		अ    हा    गा	≡	कक — फफ		फग — खख		हफ — कक
		हा    का    फा		फग — खख		खअ — गग		गह — फफ
		गा    फा    खा		हफ — कक		गह — अफ		अक — हह

२. इसी प्रकार, १८७ प्रक्रम से और (१) उदाहरण के समेत से

कफ ≡		अ    ह    ग    न		=	अआ + हहा + गगा + तता	
		ह    क    फ    म				
		ग    फ    ख    न				
		त    म    न    ग				
					=	हहा + कका + फफा + ममा,
					=	इत्यादि

अब आ, हा, इत्यादि पर से इसके उत्क्रम का मान निकाल लो। इस कनिष्ठफल का मान १६० प्रक्रम की युक्ति से अन्तिम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तिस्थ दो दो भुजों से गुणनफल के रूप में ले आओ तो

कफ = ग	अ	ह	ग	— आत <sup>२</sup> — काम <sup>२</sup> — खान <sup>२</sup> — २फामन — २गानत — २हातम ।
	ह	क	क	
	ग	फ	ख	

३। दूसरे उदाहरण में अन्त में एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति और बन्ही अक्षरों के यथा स्थानक निवेश से एक तिर्यक् पंक्ति और बढ़ा दो तो स्पष्ट है कि पंक्ति में एक अक्षर बढ़ जाने से जो कनिष्ठफल होगा वह भी तद्रूप कनिष्ठफल ही होगा।

इसलिये १६० प्रक्रम की युक्ति और (२) उदाहरण के सिद्धे से

कफ =	अ	ह	ग	त	अ'	= आअ' <sup>२</sup> — काह' <sup>२</sup> — खाग' <sup>२</sup> — गात' <sup>२</sup> — २फाह'ग' — २गाग'अ' — २हाअ'ह' — २ताअ'ग' — २माह'त' — २नाग'त'
	ह	क	फ	म	ह'	
	ग	फ	ख	न	ग'	
	त	म	न	ग	त'	
	अ'	ह'	ग'	त'	०	

४। सिद्ध करो कि किसी प्रधान ध्रुव का संबद्ध ध्रुव वही प्रधान ध्रुव है।

५। सिद्ध करो कि कनिष्ठफल का वर्ग एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा।

**२०१—विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल और विजातीय कनिष्ठफल—**

यदि तद्रूप कनिष्ठफल में प्रत्येक ध्रुव अपने संबद्ध ध्रुव के संख्यात्मक मान में तुल्य और विपरीत चिन्ह के हों तो इसे विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं। किसी प्रधान ध्रुव

का संबद्ध भुज वही प्रधान भुज होता है; इसलिये वह जब तक शून्य न हो तब तक उसी संख्या के तुल्य और विपरीत चिन्ह का कैसे हो सकता है; इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में सब प्रधान भुज शून्य होंगे। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल को निरक्त कनिष्ठफल कह सकते हैं ( १२६ प्र० देखो )

जिस कनिष्ठफल में प्रधान भुजों को छोड़ कर और प्रत्येक भुज अपने संबद्ध भुज के सख्यात्मक मान के तुल्य और विपरीत चिन्ह के हांतें हैं उसे विजातीय कनिष्ठफल कहते हैं।

१२६ वे प्रक्रम की युक्ति से किसी विजातीय कनिष्ठफल के मान को विजातीय तद्रूप कनिष्ठफलों के योग रूप में जान सकते हैं। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के विषय में कुछ विशेष दिखलाते हैं।

( १ ) जिस विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्ति विषम होती है उसका मान शून्य के तुल्य होता है।

क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में यदि ऊर्ध्वाधर को तिर्यक् और तिर्यक् पंक्तियों को ऊर्ध्वाधर रूप में बदल दें और प्रत्येक तिर्यक् पंक्ति के चिन्ह को बदल दें तो उसके मान में कुछ भेद न होगा अर्थात् फिर प्रत्येक पंक्ति में चिन्ह समेत अक्षर ज्यों के त्यों रहेंगे। परन्तु विषम अक्षरों के चिन्ह बदल देने से अब तो इन अक्षरों से पद बनेंगे पहिले पद से विपरीत चिन्ह के होंगे; इसलिये

$$\text{कफ} = -\text{कफ} \therefore २ \text{ कफ} = ०$$

अर्थात् कफ = ०। जैसे

$$\text{कफ} \equiv \begin{vmatrix} ० & अ & क \\ -अ & ० & ल \\ -क & -ल & ० \end{vmatrix} = ०$$

( २ ) विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा । यदि पंक्ति सम अर्थात् प्रत्येक पंक्ति में सम वर्ण हों और यदि विषम वर्ण हों तो एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के एक जोड़े संवद्ध ध्रुव के लघु कनिष्ठफलों के चिन्ह में वही भेद होगा जो कि निर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तियों के परिवर्तन और सब ध्रुवों के चिन्हों में होगा । इसलिये यदि लघु कनिष्ठफलों में सम पंक्ति अर्थात् मुख्य विजातीय तद्रूप में विषमाक्षर स्थिति हो तो वे दोनों तुल्य होंगे और वे ही दोनों तत्स्थानीय उत्क्रम कनिष्ठफल में ध्रुव होंगे, इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा । और यदि मुख्य विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में समाक्षर की स्थिति हो तो दोनों लघु कनिष्ठफल संख्या में समान और विपरीत चिन्ह के होंगे, इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा जिसके कर्णगत प्रधान ध्रुव सब विषमाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होंगे ।

( ३ ) समाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल एक वर्ण संख्या होगी अर्थात् जिसका पूरा पूरा वर्ग मूल मिलेगा । जैसे चार अक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में

$$\text{कफ} \equiv \begin{vmatrix} ० & अ & क & ल \\ -अ & ० & ग & घ \\ -क & -ग & ० & फ \\ -ल & -क & -ग & ० \end{vmatrix}$$

इसमें मान लो कि उत्क्रम कनिष्ठफल के ध्रुव मान आ<sub>१</sub>,  
का<sub>१</sub>, ... आ<sub>२</sub> इत्यादि है तो १६६ प्रक्रम के (२) से

$$आ_१ का_२ - आ_२ का_१ = कफ \begin{vmatrix} ० & फ \\ -फ & ० \end{vmatrix} = फ^२ कफ$$

परन्तु आ<sub>१</sub> और का<sub>२</sub> के विषमाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होने के कारण शून्य होने से और आ<sub>२</sub> और का<sub>१</sub> के एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में परस्पर सम्बद्ध भ्रुव होने से आ<sub>१</sub> का<sub>२</sub> - आ<sub>२</sub> का<sub>१</sub>,

$$= ० - आ_२ \times -आ_१$$

$$= आ_१^२$$

$$= फ^२ कफ$$

इसलिये कफ एक पूरी वर्ग संख्या हुई। इसी प्रकार समाक्षर स्थिति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल जो कि अभी वर्ग संख्या सिद्ध हुआ है उसका और मुख्य कनिष्ठफल का जात वर्ग संख्या सिद्ध होगा अर्थात् कु अक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल भी पूरा पूरा वर्ग सिद्ध होगा। इसी प्रकार आगे सब समाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल पूरे पूरे होते जायेंगे।

### उदाहरण

$$\begin{array}{l} १। \\ \text{कफ} \equiv \end{array} \begin{vmatrix} य & अ & क & ख \\ -अ & य & श & घ \\ -क & -ख & य & फ \\ -ख & -घ & -फ & य \end{vmatrix}$$

इसको य की घात वृद्धि में ले आओ । १८६ प्रक्रम से और २०१ प्रक्रम के ( १ ) से

$$\text{कफ} = (\text{अक} - \text{कख} + \text{खग})^2 + (\text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ख}^2 + \text{ग}^2 + \text{घ}^2 + \text{फ}^2) \text{य}^2 + \text{य}^4$$

२। सिद्ध करो कि

आ	अ	क	ख	ग
—अ	का	घ	ङ	च
—क	—घ	खा	छ	ज
—ख	—ङ	—छ	गा	झ
—ग	—च	—ज	—झ	घा

$$= \text{आ का गा घा} + \text{यौ झ}^2 \text{ आ का गा} + \text{यौ} (\text{घक} - \text{ङग} + \text{चछ})^2 \text{आ}$$

३। दो दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से और एका-  
न्तर दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिसं ध्रुवों को - १ से गुण देने से

$$= \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\text{क}_1 & \text{अ}_1 & -\text{ग}_1 & \text{ख}_1 \\ -\text{क}_2 & \text{अ}_2 & -\text{ग}_2 & \text{ख}_2 \\ -\text{क}_3 & \text{अ}_3 & -\text{ग}_3 & \text{ख}_3 \\ -\text{क}_4 & \text{अ}_4 & -\text{ग}_4 & \text{ख}_4 \end{vmatrix}$$

$$= \text{कफ}$$

∴ इन दोनों के गुणनफल से

$\circ,$	$-(अ_1 क_2) - (ख_1 ग_2), - (अ_1 क_3) - (ख_1 ग_3), - (अ_1 क_4) - (ख_1 ग_4)$
$(अ_1 क_2) + (ख_1 ग_2), \circ,$	$-(अ_2 क_3) - (ख_2 ग_3), - (अ_2 क_4) - (ख_2 ग_4)$
$(अ_1 क_3) + (ख_1 ग_3), (अ_2 क_4) + (ख_2 ग_4), \circ,$	$-(अ_3 क_4) - (ख_3 ग_4)$
$(अ_1 क_4) + (ख_1 ग_4), (अ_2 क_4) + (ख_2 ग_4), (अ_3 क_4) + (ख_3 ग_4), \circ,$	

इस पर से सिद्ध होता है कि किसी कनिष्ठफल के वर्ग को एक विजातीय कनिष्ठफल के रूप में ला सकते हैं।

क्ष।	०	व	क
	- अ	०	म
	- क	- ख	०

इस विजातीय तद्गुण व.निष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल निकालो।

आ<sub>१</sub>, आ<sub>१</sub>, खा<sub>१</sub> इत्यादि का मान निकालने से

	ख <sub>२</sub>	- वा <sub>२</sub>	मख
उत्क्रम व.निष्ठफल =	- फ <sub>२</sub>	क <sub>२</sub>	- अक <sub>२</sub>
	मल	- अक	म <sub>२</sub>



$$= \text{ख}^2 \begin{vmatrix} १ & -क & अ \\ -१ & क & -अ \\ १ & -क & -अ \end{vmatrix}$$

५। चार अक्षर सम्बन्धी पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ।

(१) उदाहरण में  $y=0$  तो विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल हो जायगा।

$$\begin{aligned} \text{उसमें कफ} &= (\text{अक} - \text{कख} + \text{खग})^2 \\ &= \text{ब}^2 \quad \quad \quad \text{तो} \end{aligned}$$

$$\text{उत्क्रम कनिष्ठफल} = \begin{vmatrix} ० & \text{फब} & -\text{घब} & \text{गब} \\ -\text{फब} & ० & \text{खब} & -\text{कब} \\ \text{घब} & -\text{खब} & ० & \text{अब} \\ -\text{गब} & \text{कब} & \text{अब} & ० \end{vmatrix}$$

२०३। यदि कोई कनिष्ठफल का मान शून्य हो और उसमें गोंटे के ऐसा तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर रूप जैसे अ०, अ', क', ख', ग', .....अ'', क'', ख'', ग'' ..... और अक्षर जोड़ दिए जाय जिससे प्रत्येक पंक्ति में एक अक्षर के बढ़ जाने से एकाधिकालक्षर पंक्ति का एक नया कनिष्ठफल बन जाय तो इस नये कनिष्ठफल (=कफ') और प्रथम कनिष्ठफल (=कफ) के प्रथम प्रधान ध्रुव के वश से जो प्रथम प्रधान लघु कनिष्ठफल आ, होगा उनका गुणनफल अर्थात्

$$\begin{aligned} \text{आ, कफ'} & \text{ यह } -'(\text{आ, अ'} + \text{का, क'} + \text{खा, ख'} + \dots \dots \dots) \\ & (\text{आ, अ''} + \text{आ, क''} + \text{आ, ख''} + \dots \dots \dots) \end{aligned}$$

इसके तुल्य होगा । आ<sub>१</sub>, का<sub>१</sub>, सा<sub>१</sub>... । आ<sub>२</sub>, आ<sub>३</sub>, पहिले कनिष्ठफल सम्बन्धी की सख्यायें हैं जो कि १८९वें प्रक्रम में हैं ।

यह ऊपर की बात १८९वें प्रक्रम के (२) से सहज में सिद्ध होती है । यदि 'कफ' के उत्क्रम कनिष्ठफल में अ०, अ', अ, अ, सम्बन्धी जो चार ध्रुवक हैं इनसे जो दा अक्षर की पंक्ति के कनिष्ठफल होंगे उस प्रथम दिए हुए कनिष्ठफल के ध्रुवों के रूप में ले आओ ।

यदि दिया हुआ कनिष्ठफल जिसका मान तद्रूप कनिष्ठफल हो और दोनों और अक्षरों के जोड़ने से नया भी एक तद्रूप कनिष्ठफल हो तो ऊपर के समीकरण में दाहिनी ओर के दोनों गुण्य गुणक रूप खण्ड के तुल्य होने से एक वर्ग राशि उत्पन्न होगी ।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऐसे नये तद्रूप कनिष्ठफल को उसके दूसरे प्रथम लघु कनिष्ठफल से गुण दे' तो गुणनफल जोड़े हुए अक्षरों से बना हुआ जो घातिकफल होगा उसके वर्गात्मक संख्या के समान विपरीत चिन्ह का होगा । अर्थात् ऐसी स्थिति में नया तद्रूप कनिष्ठफल और उसका प्रधान दूसरा लघु कनिष्ठफल विरुद्ध चिन्ह के होंगे ।

### उदाहरण

१। सिद्ध करो कि पञ्चाक्षर पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल

$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_1$	$f_3$	$f_1$	$f_4$	$f_1$	$f_5$
$f_2$	$f_1$	$f_2$	$f_2$	$f_3$	$f_2$	$f_4$	$f_2$	$f_5$
$f_3$	$f_1$	$f_3$	$f_2$	$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_3$	$f_5$
$f_4$	$f_1$	$f_4$	$f_2$	$f_4$	$f_3$	$f_4$	$f_4$	$f_5$
$f_5$	$f_1$	$f_5$	$f_2$	$f_5$	$f_3$	$f_5$	$f_4$	$f_5$

यह होगा ।

जहाँ  $f_1, f_2, f_3, f_4$  और  $f_5$  ध्रुवों के द्विघात के फल हैं और जिनके वर्ग क्रम से पाँचों प्रधान ध्रुव संबंधी पूरक प्रथम लघु कनिष्ठफल हैं । २०२वें प्रक्रम का अन्तिम उदाहरण देखो ।

२। सिद्ध करो कि

०	अ'	क'	ख'
अ''	०	ख	—क
क''	—ख	०	अ
ख''	क	—अ	०

$$= -(\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}') (\text{अअ}'' + \text{कक}'' + \text{खख}'')$$

३। सिद्ध करो कि

०	अ'	क'	ख'	ग'
अ''	०	ख	—क	य
क''	—ख	०	अ	र
ख''	क	—अ	०	ल
ग''	—य	—र	—ल	०

$$= (\text{अय} + \text{कर} + \text{खल}) \{ \text{य(क'ख'')} + \text{र(ख'अ'')} + \text{ल(अ'क')} \\ + \text{अ(अ'ग'')} + \text{क(क'र')} + \text{ख(ख'ल'')} \}$$

## अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} क + ख & ख + अ & अ + क \\ क' + ख' & ख' + अ' & अ' + क' \\ क'' + ख'' & ख'' + अ'' & अ'' + क'' \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \\ अ'' & क'' & ख'' \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} कख & १ & क + ख \\ खग & १ & ख + ग \\ कग & १ & क + ग \end{vmatrix} \\
 = & -(क - ख)(ख - ग)(क - ग)
 \end{aligned}$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} १ & क^२ग^२ + अ^२घ^२ & कग + अघ \\ १ & अ^२ग^२ + क^२घ^२ & अग + कघ \\ १ & अ^२क^२ + ग^२घ^२ & अक + गघ \end{vmatrix} \\
 = & (क - ग)(अ - घ)(ग - अ)(क - घ)(अ - क)(ग - घ)
 \end{aligned}$$

पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवों को २अगकघ से गुण कर दूसरे ऊर्ध्वाधर में जोड़ दो तो १८४ प्रक्रम के ८ वां उदाहरण का रूप हो जायगा।

४। सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{ll} (क + ख - अ - घ)^2 & (क + ख - अ - घ)^2 \\ (ख + अ - क - घ)^2 & (ख + अ - क - घ)^2 \\ (अ + क - ख - घ)^2 & (अ + क - ख - घ)^2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} १ \\ १ \\ १ \end{array}$$

$$= ६४(क - ख)(अ - घ)(ख - अ)(क - घ)(अ - क)(ख - घ)$$

यह ठीक १८४ प्रक्रम के ढ़वां उदाहरण ऐसा है यदि  
अ' = (क + ख - अ - घ)² इत्यादि मान लो तो

५। सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{ccc} अ & क & अय + क \\ क & ख & कय + ख \\ अय + क & कय + ख & ० \end{array} \right|$$

$$= -(अख - क²)(अय² + २कय + ग)$$

पहिली तिर्यक् पंक्ति को य से गुण कर दूसरी में जोड़ो,  
योग को तीसरी में घटा दो तो मान सहज में आ जायगा।

६। ऊपर के उदाहरण के ऐसा सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{ccc} अ & क & ख, \quad अय² + २कय + ख \\ क & ख & ग, \quad कय² + २खय + ग \\ ख & ग & घ, \quad खय² + २गय + घ \\ अय² + २कय + ख, \quad कय² + २खय + ग, \quad खय² + २गय + घ & & ० \end{array} \right|$$

$$\equiv - \left| \begin{array}{ccc} अ & क & ख \\ क & ख & ग \\ ख & ग & घ \end{array} \right| (अय² + ४कय² + ६खय² + ४गय + घ)$$

७। सिद्ध करो कि

$$\equiv \begin{vmatrix} अ_1य + क_1, & क_1य + ख_1, & ख_1य + ग_1, \\ अ_2य + क_2, & क_2य + ख_2, & ख_2य + ग_2, \\ अ_3य + क_3, & क_3य + ख_3, & ख_3य + ग_3, \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ अ_1 & अ_1य + क_1 & क_1य + ख_1 & ख_1य + ग_1, \\ अ_2 & अ_2य + क_2 & क_2य + ख_2 & ख_2य + ग_2, \\ अ_3 & अ_3य + क_3 & क_3य + ख_3 & ख_3य + ग_3, \end{vmatrix}$$

८। सिद्ध करो यदि

$$फ_1(य) = अ_1य^३ + ३क_1य^२ + ३ख_1य + ग_1,$$

$$फ_2(य) = अ_2य^३ + ३क_2य^२ + ३ख_2य + ग_2,$$

$$फ_3(य) = अ_3य^३ + ३क_3य^२ + ३ख_3य + ग_3,$$

तो

$$\begin{vmatrix} फ_1(य), & फ_1'(य), & फ_1''(य) \\ फ_2(य), & फ_2'(य), & फ_2''(य) \\ फ_3(य), & फ_3'(य), & फ_3''(य) \end{vmatrix}$$

$$\equiv -१ \begin{vmatrix} १ & -य, & य^२, & -य^३ \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

६। सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 १ & अ & अ' & अअ' \\
 १ & क & क' & कक' \\
 १ & ख & ख' & खख' \\
 १ & ग & ग' & गग'
 \end{array} \right| \\
 \\
 \equiv \left| \begin{array}{cc}
 का & खा \\
 का' & खा'
 \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{cc}
 खा & आ \\
 खा' & आ'
 \end{array} \right| \\
 \\
 \equiv \left| \begin{array}{cc}
 आ & का \\
 आ' & का'
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

जहाँ  $अ = (क - ख) (अ - ग)$ ,  $का = (ख - अ) (क - ग)$

$खा = (अ - क) (ख - ग)$ ,  $आ' = (क' - ख') (अ' - ग')$

$का' = (ख' - अ') (क' - ग')$ ,  $खा' = (अ' - क') (ख' - ग')$

यहाँ १८७ प्रक्रम की युक्ति से

$आ(क'ख' + अ'ग') + का(ख'अ' + क'ग') + खा(अ'क' + ख'ग')$   
 $= कक$  और दिए हुए समीकरणों से  $आ + का + खा = ०$  इसे  
क्रम से  $(क'ख' + अ'ग')$ ,  $(ख'अ' + क'ग')$  और  $(अ'क' + ख'ग')$   
गुण कर कक में घटा देने से ऊपर के सरूप समीकरण बन  
जायेंगे।

१०। आ, का, खा का मान फैला कर दिखाओ कि ६ वें  
उदाहरण का कनिष्ठफल

$$\left| \begin{array}{cc}
 १ & कख + अग, & क'ख' + अ'ग' \\
 १ & अख + कग, & अ'ख' + क'ग' \\
 १ & अक + सग, & अ'क' + ख'ग'
 \end{array} \right|$$

इसके तुल्य होगा।

११। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} य & अ_1 & अ_2 & अ_3 & १ \\ अ_1 & य & क_1 & क_2 & १ \\ अ_1 & क_1 & य_1 & ख_1 & १ \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & य & १ \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 & १ \end{vmatrix}$$

$$= (य - अ_1) (य - क_1) (य - ख_1) (य - ग_1)$$

जहाँ कक = ० इसमें अ<sub>१</sub>, क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, अव्यक्त के मान हैं  
इसी प्रकार न + १ अक्षर की पक्ति वाले कनिष्ठफल से भी  
सिद्ध कर सकते हो कि कनिष्ठफल

$$= (य - अ_1) (य - अ_2) (य - अ_3) \dots (य - अ_n)$$

जहाँ क(य) = ० इस न घात समीकरण में अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub> इत्यादि  
अव्यक्त के मान हैं।

१२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ^१ & अ & १ \\ क^१ & क & १ \\ ख^१ & ख & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ^२ & अ & १ \\ क^२ & क & १ \\ ख^२ & ख & १ \end{vmatrix} \quad (अ + क + ख)$$

१८४ प्रक्रम का = वां उदाहरण और १८२ प्रक्रम का ११ वां  
उदाहरण देखो।



१३। सिद्ध करो कि

$$= \begin{vmatrix} अ^१ & अ^२ & १ \\ क^१ & क^२ & १ \\ ख^१ & ख^२ & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ^२ & अ & १ \\ क^२ & क & १ \\ ख^२ & ख & १ \end{vmatrix} \quad (अक + अख + कख)$$

१४। सिद्ध करो कि

$$= \begin{vmatrix} (अ-अ')^१ & (अ-क')^१ & (अ-ख')^१ \\ (क-अ')^१ & (क-क')^१ & (क-ख')^१ \\ (ख-अ')^१ & (ख-क')^१ & (ख-ख')^१ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & अ & अ^२ \\ १ & क & क^२ \\ १ & ख & ख^२ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} १ & अ' & अ'^२ \\ १ & क' & क'^२ \\ १ & ख' & ख'^२ \end{vmatrix}$$

{ १ ( ३अकअ - यौक्तयौअ' + यौक्त'ख'योअ - ३अ'क'ख' ) }.

ऊपर का कनिष्ठफल

$$\left. \begin{matrix} अ,^१ अ,^२ अ,^१ \\ क,^१ क,^२ क,^१ \\ ख,^१ ख,^२ ख,^१ \end{matrix} \right\} (१) \quad \left. \begin{matrix} १, - २अ', ३अ',^२ - अ'^१ \\ १, - ३क', ३क',^२ - क'^१ \\ १, - ३ख', ३ख',^२ - ख'^१ \end{matrix} \right\} (२)$$

इन दोनों के गुणनफल से बना है ( १६४ प्रक्रम देखो )  
जससे कनिष्ठफलों के गुणनफल रूप में मान निकाल गुण्य  
गुणक रूप खण्ड समझ लो ।

१५। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + a_4 \end{vmatrix} \\ = a_1 a_2 a_3 a_4 \left( 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \right)$$

प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को और ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में क्रम से घटा कर फिर प्रथम ऊर्ध्वाधर के वश से कनिष्ठफला का मान निकालो।

इसी प्रकार न अक्षर सम्बन्धी पंक्ति में कनिष्ठफल

$$= a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left( 1 + \text{यों } \frac{1}{a_i} \right)$$

१६। ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} a_1 & y & y & y \\ y & a_2 & y & y \\ y & y & a_3 & y \\ y & y & y & a_4 \end{vmatrix} \\ = f(y) - y f'(y)$$

जहाँ  $f(y) = (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3)(y - a_4)$ ।

१७। १८४ प्रक्रम के हवें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध करो कि यदि  $a_1, a_2, a_3, f(y)$

$$= y^4 - p_1 y^3 + p_2 y^2 - p_3 y \\ = 0$$

इसमें अव्यक्त के मान हों तो

$$\begin{vmatrix} y^1 & y^2 & y & 1 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a_2 - a_3) (a_2 - a_1) (a_1 - a_2) \text{ फ(य)}$$

१८। ऊपर के कनिष्ठफल का मान सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1 & 1 \\ a_2^1 & a_2 & 1 \\ a_3^1 & a_3 & 1 \end{vmatrix} y^1 - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^1 & a_3 & 1 \end{vmatrix} y^2 + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 1 \\ a_2^2 & a_2^2 & 1 \\ a_3^1 & a_3^2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_1 \\ a_2^2 & a_2^2 & a_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3 \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा जो कि

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1 & 1 \\ a_2^1 & a_2 & 1 \\ a_3^1 & a_3 & 1 \end{vmatrix} (y^1 - p_1, y^2 + p_2, y - p_3)$$

यदि  $y^1, y^2, y$ , इत्यादि के गुणक रूप कनिष्ठफलों को  $कफ, कफ_1, कफ_2, कफ_3$  कहो और पिछले कनिष्ठफल को  $कफ_4$  तो सरूप समीकरण की युक्ति से

$$p_1 = \frac{कफ_1}{कफ_4}, p_2 = \frac{कफ_2}{कफ_4}, p_3 = \frac{कफ_3}{कफ_4}$$

१६। सिद्ध करो कि न अक्षरों की पंक्ति में

य	अ	अ	.	अ
अ	य	अ	.	अ
अ	अ	य		अ
.	.	.	.	.
अ	अ	अ		य

$$= (य - अ)^{n-1} \{ य + अ (n-1) \}$$

२०। सिद्ध करो कि यदि  $फ_1$ ,  $फ_2$  और  $फ_3$  अक्षरणी-गत धन अ भिन्न फल हों तो

$फ_1(अ)$	$फ_2(अ)$	$फ_3(अ)$
$फ_1(क)$	$फ_2(क)$	$फ_3(क)$
$फ_1(ख)$	$फ_2(ख)$	$फ_3(ख)$

यह  $(क - ख) (ख - अ) (अ - क)$  इससे अवश्य निःशेष होगा।

२१। दिखलाओ कि कब  $अप^2 + कर^2 + खल^2 + २ फल$   
 $+ २ गलय + २ हयर$  यह  $(अ, य + क, र + ख, ल) (अ', य + क', र + ख', ल)$  इसके समान होगा।

यहां दोनों गुण्य गुणक रूप खण्डों के गुणन से और ऊपर के फल के साथ तुलना करने से

$$\begin{vmatrix} अ_१ & अ'_१ & ० \\ क_१ & क'_१ & ० \\ ख_१ & ख'_१ & ० \end{vmatrix} \begin{vmatrix} अ'_१ & अ_१ & ० \\ क'_१ & क_१ & ० \\ ख'_१ & ख_१ & ० \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ & ह & ग \\ ह & क & फ \\ ग & फ & ख \end{vmatrix} = ०$$

ऐसी स्थिति होगी। इसलिये जहां अ, क, इत्यादि से ऊपर का तद्रूप कनिष्ठफल बन जाय वहां गुण्य गुणक रूप के खण्डों में दिया हुआ ध्रुवशक्तिक फल हो सकता है।

२२।	अ <sub>१</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>४</sub>	अ <sub>५</sub>
	अ <sub>२</sub>	अ <sub>१</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>४</sub>
	अ <sub>३</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>१</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>
	अ <sub>४</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>१</sub>	अ <sub>२</sub>
	अ <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>४</sub>	अ <sub>५</sub>	अ <sub>४</sub>

इसके गुण्य गुणक रूप खण्डों को बताओ।

मान लो कि  $y^2 - 1 = 0$  इसमें अव्यक्त मान क्रम से  $प, प^२, प^३, प^४, प^५ = 1$  हैं। द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को पहिले क्रम से प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से फिर  $प, प^२, प^३, प^४$  से क्रम से गुण कर पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से १६२वें प्रक्रम के १३ वें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि गुण खण्ड

$$\begin{array}{|l}
 \text{अ}_1 + \text{अ}_2 + \text{अ}_3 + \text{अ}_4 + \text{अ}_5 \\
 \text{अ}_1 + प\text{अ}_2 + प^२\text{अ}_3 + प^३\text{अ}_4 + प^४\text{अ}_5 \\
 \text{अ}_1 + प^२\text{अ}_2 + प^३\text{अ}_3 + प\text{अ}_4 + प^४\text{अ}_5 \\
 \text{अ}_1 + प^३\text{अ}_2 + प\text{अ}_3 + प^२\text{अ}_4 + प^३\text{अ}_5 \\
 \text{अ}_1 + प^४\text{अ}_2 + प^२\text{अ}_3 + प^३\text{अ}_4 + प\text{अ}_5
 \end{array}$$

ये होंगे।

इस प्रकार से जिस कनिष्ठफल में अक्षरों का विन्यास पंक्तिओं में होता है उस कनिष्ठफल के ध्रुवों को चक्रवाल ध्रुव कहते हैं।

यदि प्रति पंक्ति में न अक्षर के निवेश से चक्रवाल भ्रुव संख्या कनिष्ठफल हो तो वहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से  $न-१=०$  इसके सब अवयव मान से गुण्य गुणक खाण्डों का पता लगा सकते हो।

२३।	अन	कन	०	०	०	०
	-१	अन-१	कन-१	०	०	०
	०	-१	अन-२	कन-२	०	०
	०	०	-१	अन-३	कन-३	०
	०	०	०	०	०	०

इसका मान बताओ। जहाँ प्रथम प्रधान भ्रुव के आगे एक भ्रुव संख्यात्मक और बाकी प्रधान भ्रुवों के आगे एक एक संख्यात्मक भ्रुव और पीछे -१ भ्रुव हैं। अवशिष्ट सब भ्रुव शून्य है। कनिष्ठफल को यदि  $फ_n$  और प्रथम ऊर्ध्वाधर भ्रुवों के रूप में  $फ_n$  के मान में अन, और  $क_n$  भ्रुवों के वश ओ प्रथम लघु कनिष्ठफल  $न-१$  और  $न-२$  अक्षर के पंक्ति का हो तां उन्हें क्रम से  $फ_{न-१}$  और  $फ_{न-२}$  कहो तो

$$फ_n = अनफ_{न-१} + कनफ_{न-२}।$$

यदि  $न=१$ ,  $फ_१ = अ_१$ ,  $न=२$  तो  $फ_२ = अ_२अ_१ + क_१$ । अब इन दोनों के उत्थापन देने से ऊपर के समीकरण के बल से  $फ_१, फ_२$  इत्यादि के मान जान सकते हो।

ऊपर के  $फ_n$  के मान में  $फ_{न-१}$  का भाग देने से

$$\frac{फ_n}{फ_{न-१}} = अ_n + \frac{क_n}{फ_{न-२}}$$

इसमें  $n$  के स्थान में  $n-1$ , के उत्थापन से

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{f_{n-1}}{f_{n-3}}$$

यों बार बार क्रिया करने से

$$\begin{aligned} \therefore \frac{f_n}{f_{n-1}} &= a_n + \frac{f_n}{f_{n-2}} \\ &= a_n + \frac{f_n}{a_{n-1} + \frac{f_{n-1}}{f_{n-3}}} \\ &= a_n + \frac{f_n}{a_{n-1} + \frac{f_{n-1}}{a_{n-2} + \frac{f_{n-2}}{f_{n-4}}}} \end{aligned}$$

इस प्रकार  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$  का मान एक विलत भिन्न के रूप में ला सकते हैं।

$$f_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ k & a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k & a & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k & a & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

इसका मान बताओ ।

यहां अ, क, १ ये ही तीन संख्यात्मक ध्रुव हैं । यहां भी ऊपर के उदाहरण ही के संकेत से

$$फ_n = अफ_{n-1} - कफ_{n-2}$$

फ<sub>१</sub> और फ<sub>२</sub> के मान यहां उदाहरण से अ और अ<sup>२</sup>-क है । फिर इनके वश से ऊपर के समीकरण से फ<sub>३</sub>, फ<sub>४</sub> इत्यादि के मान जान सकने हो, जैसे फ<sub>३</sub> = अफ<sub>२</sub> - कफ<sub>१</sub> = अ<sup>३</sup> - अक - अक = अ<sup>३</sup> - २ अक । फ<sub>४</sub> = अफ<sub>३</sub> - कफ<sub>२</sub> = अ<sup>४</sup> - २ अ<sup>२</sup>क - क (अ<sup>२</sup> - १) = अ<sup>४</sup> - ३ अ<sup>२</sup>क + क<sup>२</sup> इसलिये साधारण से

$$फ_n = अ^n - (n-1) अ^{n-2}क + \frac{(n-2)(n-3)}{2!} अ^{n-4}क^२ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!} अ^{n-6}क^३ + \dots$$

$$फ_n = \begin{vmatrix} अ + य & ह & ग & . \\ ह & क + य & फ & . \\ ग & फ & ल + य & . \end{vmatrix}$$

यह न अक्षर पंक्ति का तद्रूप कनिष्ठफल है । इसके मान में अ + य प्रधान ध्रुव का जो प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल हो उसे फ<sub>n-१</sub>, कहो और इसमें क + य प्रधान ध्रुव का प्रधान लघु कनिष्ठफल हो उसे फ<sub>n-२</sub>, इसी प्रकार फ<sub>n-३</sub>, फ<sub>n-४</sub> इत्यादि मानो और नीचे एक तिर्यक पंक्ति अन्त में और एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति भी अन्त में और ध्रुवों को बढ़ा दो जिनमें कर्ण गत प्रधान ध्रुव १ और सब शून्य हों क्योंकि ऐसा करने से कनिष्ठफलों



के मान में भेद न पड़ेगा। इस प्रकार से  $n+1$  फल उत्पन्न होंगे जो क्रम से  $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}, \dots, f_2, f_1, f_0$ । ये हैं जिनमें  $y$  के घात उनकी संख्या  $n, n-1$  के समान हैं। ऊपर के फलों में यदि  $y$  के स्थान में  $+\infty$  का उत्थापन दो तो सब धन होंगे जहाँ  $f_0 = 1$  सर्वदा धन ही रहेगा और  $y$  के स्थान में  $-\infty$  का उत्थापन देने से  $f_0$  से गिनती करने में एकान्तर धन और ऋण होंगे; इसलिये यहाँ न व्यत्यास की हानि होगी।

अब यदि  $y$  का कोई ऐसा मान हो कि उसके उत्थापन से  $f_n$  और  $f_0$  को छोड़ कर और कोई शून्य हो जाय तो १२२वें प्रक्रम की युक्ति से उसके आगे और पीछे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे; इसलिये ऊपर जो फलों की श्रेणी लिखी है उसमें  $y$  का मान बढ़ते बढ़ते जब तक उस मान को न लाओगे जिसमें कि  $f_n = 0$  तब तक व्यत्यास की हानि न होगी। इसलिये स्टर्म की युक्ति के ऐसा यहाँ  $-\infty$  और  $+\infty$  इसके बीच  $y$  के मान में न व्यत्यास की हानि होने से  $f_n = 0$  इसमें न अव्यक्त मान अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। और फलों की श्रेणी में सब फलों में वैसा ही धर्म है जैसा कि  $f_n = 0$  इसमें है। इसलिये  $f_{n-1} = 0$  इसमें भी  $n-1$  अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। इसी प्रकार सब फलों में भी यहाँ पर सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे।

$f_n = 0$  इसमें संभव है कि मान समान हो। मान लो कि  $t$  मान प्रत्येक  $a_t$  के तुल्य हैं। तो  $f_{n-1} = 0$  इसमें  $t-1$  मान प्रत्येक  $a_t$  के तुल्य होंगे।  $f_{n-2} = 0$  इसमें  $t-2$  मान  $a_t$  के तुल्य होंगे।

२६। सिद्ध करो कि ऊपर के उदाहरण में यदि  $f_n = 0$  इसमें त मान प्रत्येक  $a_r$  के तुल्य हों तो किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में  $t-1$  और किसी द्वितीय लघु कनिष्ठफल में  $t-2$ , मान प्रत्येक  $a_r$  के तुल्य होंगे।

आ, हा, गा० उत्क्रम कनिष्ठफल में तत्स्थानीय ध्रुवों को मान लो तो उत्क्रम कनिष्ठफल के वश से एक

$$आ का - हा^2 = फ_n - 2 फ_n ।$$

तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटा हटा कर रखने से यह स्पष्ट है कि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल में  $t-1$  बार,  $a_r$  यह समान मान रहेगा। इसलिये ऊपर के समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि हा में भी वह मान  $t-1$  बार आवेगा। और हा यह कोई प्रथम लघु कनिष्ठफल मान सकते हो।

२७। बताओ कैसी स्थिति में

$$\begin{vmatrix} अ + य & ह & ग \\ ह & क + य & फ \\ ग & फ & स + य \end{vmatrix} = 0$$

इसमें  $y$  के तीनों मान समान होंगे।

जब किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में  $t$  मान समान वही हों तो तीनों मान समान होंगे, इसलिये यहां  $h$  के वश से  $y$  तक लघु कनिष्ठफल

$$= h (स + य) - गफ \quad \therefore -y = स - \frac{ग फ}{h}$$

ग के वश, प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$= ग (क + य) - हफ. \therefore - य = क - \frac{हफ}{ग}$$

फ के वश प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$= फ (अ + य) - हग. \therefore - य = अ - \frac{हग}{फ}$$

ये - य जब सब समान होंगे तभी तीनों मान समान हो सकते हैं।

$$\text{इसलिये } अ - \frac{हग}{फ} = क - \frac{हफ}{ग} = ख - \frac{गफ}{ह}$$

२८। १२३ प्रक्रम में (२) प्रकार जो चतुर्धात समीकरण के लिये लिखा है उसमें जो अ, क, ख इत्यादि हैं उनसे दिख-  
लाओ कि।

१	१	०	१	१	०
फ	प'	०	प'	प	०
त.	त'	०	त'	त	०

$$\equiv \begin{vmatrix} २, & प + प', & त + त' \\ प + प', & २ प प', & पत' + प'त \\ त + त', & पत' + प'त, & २ त त' \end{vmatrix} = ०$$

इस सरूप समीकरण से

अ	क	ख + २ ग्रफि
क, ख - अफि,	ग	
ख + २अफि,	ग,	०

$$= २ अ^३ फि^३ - अक्षफि + छा = ०$$

२०३—आज कल प्रायः सर्वत्र नये गणितिको के ग्रन्थों में लाघव से मान दिखलाने के लिये कनिष्ठफल ही का व्यवहार विशेष रूप से रहता है । इसलिये इस अभ्यास में जहां तक हो सका है कुछ फैलाकर कनिष्ठफल के नियम और उदाहरण दिखलाए गए हैं । जितनी बातें इस विषय पर इस अध्याय में लिखी गई हैं उनको अच्छी तरह से सीखने से बुद्धिमान् कनिष्ठफल के विषय में पूर्ण निपुण हो जायगा और इस विषय पर अपने बुद्धिबल से भी अनेक कल्पना और उदाहरण करने की योग्यता सम्पादन कर सकेगा ।

बहुत से गणितिक लोग इस पर हंसेंगे कि इस कनिष्ठफल के नियमों के बिना ही केवल गुणन, भागहार, और योग वियोग ही से सर्वत्र कार्य निर्वाह हो जाता है फिर कनिष्ठ फलों के नये नये सकेत और नियमों से क्या प्रयोजन, क्यों व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ा कर समय नष्ट करना ।

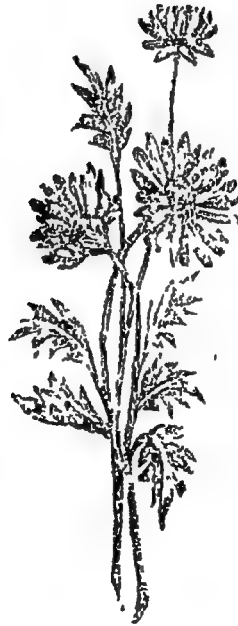
इस पर इतना ही कहना पर्याप्त है कि इस गणित शास्त्र में जितने ही लाघव से गणित का कर्म हो उतनी ही क्रिया की प्रशंसा होती है । इसलिये गुणन, भजन में व्यर्थ जो काल और स्थान खराब होते हैं उसके स्थान में यदि ग्रन्थ में क्रिया की युक्ति दिखलाने के लिये कनिष्ठफल का ग्रहण किया जाय तो बहुत ही अल्प काल और अल्प स्थान में सब युक्तियाँ दिखलाई जा सकती हैं । भास्कराचार्य ने भी अपने बीज-गणित में लिखा है कि

“कचिदादेः कचिन्मध्यात्

क्वचिदन्दितात् क्रिया बुधैः ।

आरभ्यते यथा लब्धी

निर्वहेश्च तथा तथा ॥”



# समीकरणा-मीमांसा

---

दूसरा भाग

---

लेखक

स्वर्गवासी पं० सुधाकर द्विवेदी,

---

सम्पादक

पद्माकर द्विवेदी



प्रकाशक

विज्ञान परिषद्, प्रयाग ।

---

मुद्रक

सूरजप्रसाद खन्ना,

हिन्दी-साहित्य प्रेस, प्रयाग ।

---

श्री जानकीवल्लभो विजयते

# समीकरण-मीमांसा

दूसरा भाग



जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः  
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।  
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय  
वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान् ॥

## १६—लुप्तीकरण

२०४—न ध्रुव शक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हुई  
हो जिनमें न अव्यक्त हों अथवा न अध्रुवशक्तिक समीकरणों  
की परम्परा दी हो जहां न—१ अव्यक्त हों तो उनके परस्पर  
मिलाने से जो एक समीकरण प्र=० ऐसा उत्पन्न हो जो समी-  
करणों के पदों के गुणकों के अकरणीगन और अभिन्नफल के  
रूप में है तो प्र को समीकरणों का प्रत्युत्पन्न कहते हैं। जैसे  
यदि

$$अय^2 + २कय + ख=०,$$

$$अ'य^2 + २क'य + ख'=०$$



दिए हुए ऐसे दो समीकरण हो जहां दोनों में य एक ही है तो दोनों पर से य के मान ले आने से और उनको परस्पर समान करने से

$$-\frac{क}{अ} + \frac{\sqrt{क^2 - अख}}{अ} = -\frac{क'}{अ'} + \frac{\sqrt{क'^2 - अ'ख'}}{अ'}$$

अअ' से गुण कर समशोधन से

$$अक' - अ'क = अ\sqrt{क'^2 - अ'ख'} - अ'\sqrt{क^2 - अख}$$

वर्ग करने से

$$अ^2क'^2 + अ'^2क^2 - 2अअ'कक'$$

$$= अ^2क'^2 - अ^2अ'ख' + अ'^2अ'ख' - अ'^2क^2$$

$$- 2अअ'\sqrt{क'^2 - अ'ख'}\sqrt{क^2 - अख}$$

समशोधन और अअ' के अपवर्त्तन से

$$अख' + अ'ख - 2कक'$$

$$= - 2\sqrt{क'^2 - अ'ख'}\sqrt{क^2 - अख}$$

वर्ग कर एक ओर ले जाने से

$$४(क^2 - अख)(क'^2 - अ'ख') - (अख' + अ'ख - 2कक')^2 = 0 = प्र$$

यह दिए हुए दोनों समीकरणों का प्रत्युत्पन्न हुआ। यहा तो समीकरणों से अव्यक्तमान जान कर तब प्र का मान निकाला गया है। अब ऐसी साधारण क्रिया दिखलाते हैं जिससे बिना अव्यक्तमान निकाले प्रत्युत्पन्न का मान आवे।

२०५—तद्रूपफलों से लुप्रीकरण—कल्पना करो कि एक म घात और दूसरा न घात का समीकरण

$$फ(y) = p_0 \cdot y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + p_3 y^{m-3} + \dots + p_m = 0$$

$$फा(y) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

यह दिया हुआ है। इनमे वह स्थिति जाननी है जब कि अव्यक्त का एक मान दोनों मे एक ही है। इसके लिये मान लो कि  $फ(y) = 0$ । इसमे  $y$  के मान क्रम से  $अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_m$  हैं तो इनका उत्थापन दूसरे मे देने से निश्चय है कि

$$फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3), \dots, फा(अ_m)$$

इनमे कोई न कोई मान अवश्य शून्य के तुल्य होगा अर्थात्

$$फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3) \dots, फा(अ_m)$$

यह अवश्य शून्य के तुल्य होगा क्योंकि  $अ_1, अ_2, अ_3, \dots$  इत्यादि में से कोई न कोई एक संख्या ऐसी होगी जिसके उत्थापन से  $फा(y) = 0$  यह स्थिति सत्य होगी अन्यथा दोनों समीकरण मे एक मान का होना कैसे संभव है। अब  $फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3) \dots, फा(अ_m)$  इसका रूप अकरणीगत अभिन्न जो कि सर्वथा संभव है, क्योंकि यह  $फ(y) = 0$  इसके मानों का एक तद्रूपफल है, बनाने से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

यदि  $फा(y) = 0$  इसमे अव्यक्त मान  $क_1, क_2, क_3, \dots, क_n$  हों तो

$$फा(y) = b_0 (y - क_1) (y - क_2) \dots (y - क_n) = 0$$

इनमें  $y$  के स्थान मे  $अ_1, अ_2, \dots, अ_m$  के उत्थापन से

$$फा(अ_1) = b_0 (अ_1 - क_1) (अ_1 - क_2) \dots (अ_1 - क_n)$$

$$फा(अ_2) = व. (अ_2 - क_1) (अ - क_2) \cdots (अ_2 - क_n) \\ \dots\dots\dots$$

$$फा(अ_m) = व. (अ_m - क_1) (अ_m - क_2) \cdots (अ_m - क_n)$$

प्रत्येक गुण खण्ड का चिन्ह बदल कर परस्पर गुण देने से और गुणनफल में  $(क_1 - अ_1) (क_1 - अ_2) \cdots (क_1 - अ_n)$  इत्यादि के स्थानों में

$$\{ फ(य) = व. (य - अ_1) (य - अ_2) \cdots (य - अ_m) \\ फ(क_1) = व. (क_1 - अ_1) (क_1 - अ_2) \cdots (क_1 - अ_m) \}$$

$$\frac{फ(क_1)}{व.} \text{ इत्यादि का उत्थापन देने से}$$

$$प. फा(अ_1) फा(अ_2) \cdots फा(अ_m) \\ = (-1)^{मनब.म} फ(क_1) फ(क_2) \cdots फ(क_n)$$

इसलिये कह सकते हैं कि

$$प्र = (-1)^{मनब.म} फ(क_1) फ(क_2) \cdots फ(क_n) \\ = प. फा (अ_1) फा (अ_2) \cdots फा(अ_m) \\ \dots\dots\dots (१)$$

क्योंकि प्र के दोनों मान अकरणीगत अभिन्न समीकरणों के पदों के फल हैं ( क्योंकि अव्यक्तमान समीकरण पदों के गुणकों के रूप में आ जाते हैं ) और जो तभी शून्य हो सकते हैं जब कि फ (य) और फा (य) में एक गुण खण्ड, उभय निष्ठ होगा और जब  $अ_1, अ_2 \cdots$  और  $क_1, क_2 \cdots$  के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाए जायेंगे तब दोनों प्र के मान एक ही हो जायेंगे ।

### २०६—प्रत्युत्पन्न के गुण—

( १ ) प्रत्युत्पन्न में समीकरणों के पदों के गुणकों के वश सब से बड़ा घात अर्थात् सोपान मन होगा यह २०५ प्रक्रम के (१) के रूप ही से स्पष्ट होता है और प्रत्युत्पन्न के पहले रूप में  $(-१)^{मन} बम$  यह और दूसरे में  $प$ ,  $बम$  यह एक पद रहेंगे ।

( २ ) यदि दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान  $द$  गुणित हो जायं तो प्रत्युत्पन्न का मान  $दमन$  गुणित हो जायगा क्योंकि प्रत्युत्पन्न के मान में  $मन$  गुणकखण्ड प्रत्येक  $द$  गुणित हो जाने से अब नया प्रत्युत्पन्न  $दमन$  गुणित हो जायगा ।

( ३ ) दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान यदि एक ही संख्या से बढ़ाए जायं तो प्रत्युत्पन्न ज्यो का त्यो रहेगा । क्योंकि प्रत्युत्पन्न में जो  $फ(क_१)$ ,  $फ(क_२)$ , इत्यादि के

$(क_१ - अ_१)$   $(क_१ - अ_२)$  .....  $(क_१ - अ_n)$ ,  $(क_२ - अ_१)$   $(क_२ - अ_२)$  ...  $(क_२ - अ_n)$  इत्यादि मान हैं उनमें  $क_१$ ,  $क_२$  .. और  $अ_१$ ,  $अ_२$  .. ...में एक ही संख्या मिलाने से अन्तर में कुछ विकार न होगा ।

( ४ ) ऊपर  $क_१$ ,  $अ_१$ , इत्यादि के स्थान में यदि  $\frac{१}{क_१}$ ,  $\frac{१}{अ_१}$ , इत्यादि का अर्थात् उनके हरात्मक मान का उत्थापन दें तो  $क_१ - अ_१ = \frac{१}{क_१} - \frac{१}{अ_१} = \frac{अ_१ - क_१}{क_१ अ_१}$ , इसलिये प्रत्युत्पन्न =  $प्र' = पम बम (-१)^{मन} \frac{(अ_१ - क_१) (अ_२ - क_२) \dots}{(अ_१ अ_२ \dots अ_m)^न (क_१ क_२ \dots क_n)^म}$

$$\text{परन्तु } a_1, a_2, \dots, a_m = (-1)^m \frac{p_m}{p_0} \text{ और}$$

$$k_1, k_2, \dots, k_n = (-1)^n \frac{q_n}{q_0} \text{ इनके उत्थापन से}$$

$$p' = p_0 \cdot q_0' \cdot (-1)^{mn} (a_1 - k_1) (a_2 - k_1 \dots) = (-1)^{mn} p$$

इस पर से सिद्ध होता है कि मानों के हरात्मक मानों से जो प्रत्युत्पन्न होता है वह मानों के प्रत्युत्पन्न को  $(-1)^{mn}$  इससे गुण देने से उत्पन्न होगा। यदि  $p = 0$  तो  $(-1)^{mn}$  से गुण देने से भी शून्य होगा, इसलिये कह सकते हो कि दोनों प्रत्युत्पन्न एक ही हैं।

(५) दोनों समीकरणों में  $y$  के स्थान में  $\frac{t'y + d}{t'y + d'}$  इसके

उत्थापन से जो नये दो समीकरण होंगे उनके प्रत्युत्पन्न  $p' = (t'd' - t'd)^{mn}$  ऐसा होगा। इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$f(y) = p_0 \cdot (y - a_1) (y - a_2) \dots (y - a_m)$$

$$f_a(y) = q_0 \cdot (y - k_1) (y - k_2) \dots (y - k_n)$$

और कोई अभिन्न गुणखण्ड पहिले का  $= y - a_y$

$$= (t - t'a_y) \left( y - \frac{d'a_y - d}{t - t'a_y} \right)$$

अभिन्न दूसरे का गुणखण्ड  $= y - k_y$

$$= (t - t'k_y) \left( y - \frac{d'k_y - d}{t - t'k_y} \right)$$

एकट्ठा गुण देने से

प० के स्थान में अब प० (त-त'अ<sub>१</sub>) (त-त'अ<sub>२</sub>) ....  
(त-त'अ<sub>म</sub>) होगा, ब० के स्थान में

ब० (त-त'क<sub>१</sub>) (त-त'क<sub>२</sub>) .. . (त-त'क<sub>न</sub>) होगा और  
अथ और कथ बदल के अब  $\frac{द'अ_{थ}-द}{त-त'अ_{थ}}$  और

$\frac{द'क_{थ}-द}{त-त'क_{थ}}$  ये होंगे ।

$$इसलिये अथ - कथ = \frac{(नद' - त'द) (अथ - कथ)}{(त - त'अ_{थ}) (त - त'क_{थ})}$$

अथ - कथ, में थ के स्थान में १, २ .. . के उत्थापन से  
जितने खण्ड होंगे उनके गुणन फल को यदि भा (अथ - कथ)  
मानो तो

$$\begin{aligned} प्र' &= प० ब० भा (अथ - कथ) \\ &= प० ब० (तद' - त'द) म० भा (अथ - कथ) \\ &= (तद' - त'द) म० प्र । \end{aligned}$$

इसमें,

त' = ०, द' = १, और द = ० तो (१) उपपन्न होगा ।

त = १, त' = ० और द' = १ तो (३) उपपन्न होगा ।

त = ०, द = १, त' = १, द' = ० तो (४) उपपन्न होगा ।

इसलिये (१), (३) और (४) को अलग वालाबवोध के  
लिये लिखा है ।

## २०७—लुप्तीकरण में ओलर (Euler) की रीति—

जब दो समीकरण  $f(y)=0$  और  $f_1(y)=0$ ,  $m$  और  $n$  घात के एक मान समान रखते हैं तो मान लो कि

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= (y-p)f_1(y) \\ f_1(y) &= (y-q)f_2(y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{जहां } f_1(y) = p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_m$$

$$f_2(y) = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \dots + q_n$$

पदों के गुणक इनमें अज्ञात है।

$f_1(y)$  और  $f_2(y)$  से परस्पर गुण देने से (१) से

$$f(y)f_2(y) = f_1(y)f_2(y)$$

यह सरूप समीकरण  $m+n-1$  घात का होगा।

इसलिये  $y$  के समान घातों के गुणक समान करने से  $m+n$  समीकरण  $m+n$  स्थिराङ्क  $p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$  से बनेंगे, जहां १६७ वें प्रक्रम की क्रिया से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

जैसे मान लो कि

$$f(y) = ay^2 + by + c = 0,$$

$$f_1(y) = a_1 y^2 + b_1 y + c_1 = 0$$

ये दो समीकरण दिए हैं तो ऊपर की युक्ति से

$$f_2(y) = p_1 y + p_2$$

$$f_1(y) = q_1 y + q_2$$

$$\therefore (b_1y + b_2) (ay^2 + ky + x) \\ = (p_1y + p_2) (a_1y^2 + k_1y + x_1)$$

वा

$$(b_1a - b_1a_1) y^3 + (b_1k + b_2a - p_1k_1 - p_2a_1) y^2 \\ + (b_1x + b_2k - p_1x_1 - p_2k_1) y + b_2x - p_2x_1 = 0$$

सब गुणकों को शून्य के समान करने से

$$b_1a - p_1a_1 = 0$$

$$b_1k + b_2a - p_1k_1 - p_2a_1 = 0$$

$$b_1x + b_2k - p_1x_1 - p_2k_1 = 0$$

$$b_2x - p_2x_1 = 0$$

इन पर से १६७ प्रक्रम की क्रिया से

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a_1 & 0 \\ k & a & k_1 & a_1 \\ x & k & x_1 & k_1 \\ 0 & x & 0 & x_1 \end{vmatrix} = 0 = \Delta$$

२०८—लुप्तीकरण में सिल्वेस्टर ( Sylvester )  
की युक्ति

यह ओलर ही की ऐसी रीति है। परन्तु इससे कुछ लाघव  
से प्रत्युत्पन्न होता है। मान लो कि

$$f(y) = p_0y^m + p_1y^{m-1} + p_2y^{m-2} + \dots + p_m = 0$$

$$\phi(y) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \dots + b_n = 0$$



पहिले को क्रम से  $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots, y^2, y, y^0$  इनसे और दूसरे को क्रम से

$y^{m-1}, y^{m-2}, \dots, y^2, y, y^0$  इनसे गुण देने से  $m+n$  समीकरण बनेंगे जिनमें  $y$  का सब से बड़ा घात  $m+n-1$  रहेगा। इसलिये इन समीकरणों में  $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \dots, y^2, y$  इतने भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से प्रत्युत्पन्न का मान पूर्ववत् आ जायगा। जैसे  $अय^2 + कय + ख = 0$ ,

$अ_1 y^2 + क_1 y + ख_1 = 0$ । इनमें ऊपर की युक्ति से पहिले को  $y, y^0$  से और दूसरे को भी  $y, y^0$  से गुण देने से

$$अय^3 + कय^2 + खय = 0$$

$$अय^2 + कय + ख = 0$$

$$अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y = 0$$

$$अ_1 y^2 + क_1 y + ख_1 = 0$$

इनमें  $y^3, y^2, y$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से पूर्ववत्

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & 0 \\ 0 & अ & क & ख \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & 0 \\ 0 & अ_1 & क_1 & ख \end{vmatrix} = 0 = प्र।$$

यदि उर्ध्वाधरों को तिर्यक् पंक्तिओं में ले जाव तो यह वही है जो कि ओलर की क्रिया से ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध हुआ है।

२०६—लुप्तीकरण में बेज़ौट की ( Bezout ) क्रिया

पहिले जब दोनों समीकरण तुल्य ही घात के हैं तो

( १ ) कल्पना करो कि समीकरण

$$अय^२ + कय^२ + खय + ग = ०;$$

$$अ, य^२ + क, य^२ + ख, य + ग, = ०$$

ये हैं।

दोनों को क्रम से

अ, और अ;

अ, य + क, और अय + क

अ, य^२ + क, य + ख, और अय^२ + कय + ख

से गुण कर प्रति बार परस्पर घटाने से और १८७ प्रक्रम के सङ्केत से लिखने से

$$(अक, )य^२ + (अख, )य + (अग, ) = ०$$

$$(अख, )य^२ + \{ (अग, ) + (कख, ) \} य + (कग, ) = ०$$

$$(अग, )य^२ + (कग, )य + (खग, ) = ०$$

ये समीकरण हुए, इन्में य^२ और य को भिन्न अव्यक्त मानने से १८७ प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} (अक, ), & (अख, ), & (अग, ) \\ (अख, ), & (अग, ) + (कख, ), & (कग, ) \\ (अग, ), & (कग, ), & (खग, ) \end{vmatrix} = ० = प्र।$$

यह प्रत्युत्पन्न एक तद्रूप कनिष्ठफल के रूप में आया है। प्रत्युत्पन्न जानने के लिये अनुगम निकालने के लिये और एक उदाहरण लेते हैं ;

कल्पना करो कि

$$\text{अय}^4 + \text{कय}^3 + \text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ} = 0,$$

$$\text{अ}_1\text{य}^4 + \text{क}_1\text{य}^3 + \text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1 = 0 \quad |$$

ये समीकरण हैं तो बेजौट ही की युक्ति से

$$\frac{\text{अ}}{\text{अ}_1} = \frac{\text{कय}^3 + \text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ}}{\text{क}_1\text{य}^3 + \text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad |$$

$$\frac{\text{अय} + \text{क}}{\text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1} = \frac{\text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ}}{\text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad |$$

$$\frac{\text{अय}^2 + \text{कय} + \text{ख}}{\text{अ}_1\text{य}^2 + \text{क}_1\text{य} + \text{ख}_1} = \frac{\text{गय} + \text{घ}}{\text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad |$$

$$\frac{\text{अय}^3 + \text{कय}^2 + \text{खय} + \text{ग}}{\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^2 + \text{ख}_1\text{य} + \text{ग}_1} = \frac{\text{घ}}{\text{घ}_1} \quad |$$

समशोधन कर एक ओर सब पदों के ले जाने से पूर्ववत् चार समीकरण बनेंगे जिनमें  $\text{य}^3$ ,  $\text{य}^2$ ,  $\text{य}$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान कर उनका लोप करने से

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ) + (कख <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ) + (कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ) + (कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ) + (खग <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),
(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> ),

यह जो प्रत्युत्पन्न हुआ है वह यदि ध्यान दे कर देखो तो

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> )
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(कख <sub>१</sub> )
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> )
(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> )

इसके मध्यवर्ती चार ध्रुवों में

(ख <sub>१</sub> ),	(ग <sub>१</sub> ),
(क <sub>१</sub> ),	(ख <sub>१</sub> ),

इसके क्रम से चारों ध्रुवों को जोड़ देने से उत्पन्न हुआ है। इसी प्रकार

$$अ<sup>१</sup> + क<sup>१</sup> + ख<sup>१</sup> + ग<sup>१</sup> + घ<sup>१</sup> + ङ<sup>१</sup> = ०$$

$$अ<sup>१</sup> + क<sup>१</sup> + ख<sup>१</sup> + ग<sup>१</sup> + घ<sup>१</sup> + ङ<sup>१</sup> = ०$$

इसका प्रत्युत्पन्न

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> )	(अङ <sub>१</sub> )
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> )	(कङ <sub>१</sub> )
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> )	(खङ <sub>१</sub> )
(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> ),	(खङ <sub>१</sub> )	(गङ <sub>१</sub> )
(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> ),	(खङ <sub>१</sub> ),	(गङ <sub>१</sub> )	(घङ <sub>१</sub> )

इसके मध्यवर्ती नव ध्रुवों में

(क <sub>१</sub> ),	(ग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),
(क <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),
(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> ),

क्रम से इसके नवों ध्रुवों के जोड़ने से और योग के मध्यवर्ती एक ध्रुव में (ख<sub>१</sub>) इसको मिला देने से उत्पन्न होता

है। इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

(२) जहाँ दोनों समीकरण भिन्न भिन्न घात के हैं तहाँ मान लो कि समीकरण

$$अय^४ + कय^३ + खय^२ + गय + घ = ०$$

$$अ, य^२ + क, य + ख, = ० \text{ ये हैं।}$$

दोनों को क्रम से अ, और अय<sup>२</sup>;

$$अ, य + क, \text{ और } (अय + क) य^२$$

से गुण कर अन्तर करने से

$$(अक, ) य^३ + (अख, ) य^२ - गअ, य - घअ, = ०$$

$$(अख, ) य^३ + \{ (कख, ) - गअ, \} य^२$$

$$(गक, + घअ, ) य - घक, = ०$$

और दूसरे को य और १ से गुण देने से

$$अ, य^३ + क, य^२ + ख, य = ०$$

$$अ, य^२ + क, य + ख, = ०$$

अब चार समीकरण हुए जिनमे य<sup>३</sup>, य<sup>२</sup>, य को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से

$(अक,)$	,	$(अख,)$	,	$गअ,$	,	$घअ,$	$= प्र$		
$(अख,)$	,	$(कख,)$	-	$गअ,$	,	$गक, + घअ,$		,	$घक,$
$अ,$	,	$क,$	,	$-ख,$	,	$०$			
$०$	,	$अ,$	,	$-क,$	,	$-ख,$			

इसी प्रकार

$$फ(य) = प_० य^म + प_१ य^{म-१} + प_२ य^{म-२} + \dots + प_m = ०$$

$$फा(य) = ब_० य^n + ब_१ य^{n-१} + ब_२ य^{n-२} + \dots + ब_n = ०$$

इनमे जहाँ  $m > n$  दूसरे समीकरण को  $y^{m-n}$  से गुण देने से  $ब_० य^म + ब_१ य^{म-१} + ब_२ य^{म-२} + \dots + ब_n य^{म-n} = ०$

यह उर्ली घात का हो गया जिस घात का प्रथम समीकरण है। इस समीकरण  $फा(य) = ०$  में  $n$  अव्यक्त मान के साथ  $m-n$  अव्यक्त मान जो शून्य के तुल्य है और मिले है। इसलिये प्रत्युत्पन्न के लिये  $फ(य)$  में  $m-n$  बार शून्य के उत्थापन से  $प_m$  यही रहेगा। फिर उनके परस्पर गुणन से प्रत्युत्पन्न में एक गुण्य गुणक रूप में खराब  $प_m^{m-n}$  यह रहेगा जो कि व्यर्थ है। इसलिये ऊपर के समीकरणों से (१) युक्ति से नीचे लिखे न समीकरण बनेगे।

$$\frac{प_० य^{म-१} + प_१ य^{म-२} + \dots + प_m}{ब_० य^{म-१} + ब_१ य^{म-२} + \dots + ब_n य^{म-n}}$$

$$\frac{प_० य^{म-२} + प_१ य^{म-३} + \dots + प_m}{ब_० य^{म-२} + ब_१ य^{म-३} + \dots + ब_n य^{म-n-१}}$$

.....

$$\frac{प_० य^{म-n} + प_१ य^{म-n-१} + \dots + प_{n-१}}{ब_० य^{म-n} + ब_१ य^{म-n-१} + \dots + ब_{n-१}}$$

$$= \frac{प_n य^{म-n} + प_{n-१} य^{म-n-१} + \dots + प_m}{ब_n य^{म-n}}$$

इनमे छेदगम से  $y$  का सबसे बड़ा  $m-n$  घात होगा। इसलिये

यम<sup>-१</sup>, यम<sup>-२</sup>, ... . य, को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से ऊपर न समीकरणों से और

$$व_० यम^{-१} + व_१ यम^{-२} + व_२ यम^{-३} + \dots = ०$$

$$व_० यम^{-२} + व_१ यम^{-३} \dots \dots \dots = ०$$

.....

$$व_० यन + व_१ यन^{-१} + \dots \dots + व_n = ०$$

इन म—न समीकरणों से म अक्षर पक्ति के कनिष्ठफल के रूप में प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं जिनमें अब ऊपरी गुण्य गुणक रूप खण्ड जो कि म—न मान शून्य के मिलाने से आता था न आवेगा।

यदि फ (य) = ०, फा(य) = ० में जहां दोनों समीकरणों में यात संख्या एक ही म है, प्रत्युत्पन्न प्र हो तो

$$तफ(य) + द'फा(य) = ०,$$

$$त'फ(य) + द'फा(य) = ०।$$

इनमें प्रत्युत्पन्न = प्र' = (तद' - त'द) प्र ऐसा होगा क्योंकि चेज़ौट की युक्ति से पहिले प्रत्युत्पन्न में जो कोई (अ<sub>१</sub>क<sub>स</sub>) यह मान था वही इस स्थिति में

$$\left| \begin{array}{cc} तअ_१ + दक_१ & त'अ_१ + द'क_१ \\ तअ_२ + दक_२ & त'अ_२ + द'क_२ \end{array} \right|$$

$$= (तद' - त'द) (अ_१क_२)$$

इसलिये (तद' - त'द) इस गुणक के म बार आने से

$$प्र' = (तद' - त'द) प्र ऐसा होगा।$$

२१०—२०५वें प्रक्रम से लिख है कि प्रत्युत्पन्न

$$म = प \cdot फा (अ_१), फा (अ_२) \dots फा (अ_म)$$

$$= (-१)^{मन} वम \cdot फ(क_१) फ(क_२) \dots फ(क_न)$$

यह है इसमें  $फा (अ_१), फा (अ_२) \dots$  में  $अ_१, अ_२$  न रहेगा जिनके मान पहिले समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात न ही रहेगा (१६०वां प्रक्रम देखो)। इसी प्रकार  $फ(क_१), फ(क_२),$  इत्यादि में  $क_१, क_२$  इत्यादि के सब से बड़ा घात न के रहने से उनका रूप दूसरे समीकरणों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात न ही रहेगा। और उनमें घातों का परम योग नम रहेगा। इससे लिख होता है कि प्रत्युत्पन्न के मान में घातों का परम योग नम रहेगा और  $फ(य') = ०$  इसके गुणकों का सब से बड़ा घात न और  $फा(य) = ०$  इसके गुणक का सब से बड़ा घात न रहेगा। यदि किसी और क्रिया से ऊपर की स्थिति न आवै तो समझना चाहिए कि वास्तव प्रत्युत्पन्न किसी ऊपरी गुणक से गुणित आया है जिसे ढूँढ़ कर अलग कर देना चाहिए। जैसे

$$अय^२ + कय + ख = ०,$$

$$अ_१ य^२ + क_१ य + ख_१ = ०।$$

इनमें यदि दोनों को क्रम से  $अ_१, अ$  और  $ख, ख$  से गुण कर अन्तर करो तो—

$$(अक_१) य + (अख_१) = ०$$

$$(अख_१) य + (कख_१) = ०$$



ऐसे समीकरण होंगे । इनमें यदि य का लोप करो तो

$$प्र = (अ ख_१)^२ - (अक_१) (कख_१) = ०$$

यहां देखते हैं कि दोनों समीकरणों के गुणक के घात ४ और न के २ के तुल्य होने से दो आए हैं और प्रत्येक पद में घातों का परम योग भी ४ है । इसलिये ऊपर की स्थिति के होने से कहेंगे कि प्रत्युत्पन्न ठीक है ।

परन्तु यदि  $अ_१ य^२ + क_१ य^२ + ख_१ य + ग = ०$ ,

$$अ_१ य^२ + क_१ य^२ + ख_१ य + ग_१ = ० ।$$

इनमें दोनों को क्रम से  $अ_१$ ,  $अ$  और  $ग_१$ ,  $ग$  से गुण कर अन्तर करो ता

$$(अक_१) य^२ + (अख_१) य + (अग_१) = ०,$$

$$(अग_१) य^२ + (कग_१) य + (खग_१) = ० ।$$

ऐसे समीकरण बनेंगे । इनमें  $य^२$  और  $य$  के लोप करने से ऊपर के उदाहरण की युक्ति से

$$प्र = \left| \begin{array}{cc} (अक_१) & (अख_१) \\ (अग_१) & (खग_१) \end{array} \right|^२ - \left| \begin{array}{cc} (अक_१) & (अख_१) \\ (अग_१) & (कग_१) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (अख_१) & (अग_१) \\ (कग_१) & (खग_१) \end{array} \right|$$

यहां देखते हैं कि गुणकों का सब से बड़ा घात ४ अर्थात् दोनों समीकरणों के गुणकों के घात मिलाने से ४ और पद के गुणकों के घातों का योग १२ है, परन्तु प्रत्युत्पन्न के वास्तव मान में तो मिला हुआ घात ६ और पद के गुणकों के घातों का योग ६ चाहिए; इसलिये आए हुए प्रत्युत्पन्न में गुणक

गुणक रूप खण्ड कोई बढ़ गया है जिसे अलग करने से तब वास्तव प्रत्युत्पन्न होगा ।

यहां ढूँढने से तो जान पड़ेगा कि वह खण्ड (अग<sub>१</sub>) यह है जिससे भाग देने से

$$\text{वास्तव प्रत्युत्पन्न} = (\text{अग}_1)^2 - (\text{अक}_1)(\text{खग}_1)(\text{अग}_1) + \text{कग}_1(\text{खअ}_1)(\text{अग}_1) + (\text{खअ}_1)^2(\text{खग}_1) + (\text{अक}_1)(\text{कग}_1)^2 + (\text{अक}_1)(\text{कख}_1)(\text{खग}_1) ।$$

२११—यदि फ(य) = ० इसमें एक मान दो बेर हो तो स्पष्ट है कि फ'(य) = ० इसमें भी वह मान एक बेर होगा वा नफ(य) - य फ'(य) = ० इसमें वह मान एक बेर होगा । यह न-१ घात का समीकरण है; और फ'(य) भी न-१ घात का समीकरण है; इसलिये इन दोनों पर से य<sup>न-१</sup> य<sup>न-२</sup> इत्यादि का लोप करने से जो गुणकों से एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा उसे उत्पन्न कहो । वह जिस समय शून्य होगा उस स्थिति में कहेंगे कि वही प्रत्युत्पन्न होगा और फ(य) = ० इसमें एक मान दो बार आवेगा । जैसे

१ । अ<sub>०</sub>य<sup>३</sup> + ३अ<sub>१</sub>य<sup>२</sup> + ३अ<sub>२</sub>य + अ<sub>३</sub> = ० इसमें उत्पन्न का मान बताओ ।

$$\text{फ}(य) = \text{अ}_०\text{य}^३ + ३\text{अ}_१\text{य}^२ + ३\text{अ}_२\text{य} + \text{अ}_३ = ०$$

$$\text{फ}'(य) = ३\text{अ}_०\text{य}^२ + ६\text{अ}_१\text{य} + ३\text{अ}_२ = ०$$

$$\text{नफ}(य) = ३\text{अ}_०\text{य}^३ + ६\text{अ}_१\text{य}^२ + ६\text{अ}_२\text{य} + ३\text{अ}_३ = ०$$

$$\text{यफ}'(य) = ३\text{अ}_०\text{य}^३ + ६\text{अ}_१\text{य}^२ + ३\text{अ}_२\text{य} = ०$$

$$\text{नफ}' - \text{यफ}'(य) = ३\text{अ}_१\text{य}^२ + ६\text{अ}_२\text{य} + ३\text{अ}_३ = ०$$

$$३ \text{ के अपवर्तन से } \text{अ}_१\text{य}^३ + २\text{अ}_२\text{य} + \text{अ}_३ = ०$$

$$\text{फ}'(य) \text{ में } ३ \text{ के भाग देने से } \text{अ}_०\text{य}^२ + २\text{अ}_१\text{य} + \text{अ}_२ = ०$$

२०४वें प्रक्रम से उत्पन्न

$$= ४(अ. अ_२ - अ_२^२)(अ_१ अ_१ - अ_२^२) - (अ. अ_३ - अ_१ अ_२)^२$$

यही जब शून्य के तुल्य होगा तब फ(य) = ० इसमें एक मान दो बार आवेगा ।

वही प्रत्युत्पन्न २०८ वें प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} अ. & २अ_१ & अ_२ & ० \\ ० & अ. & २अ_१ & अ_२ \\ अ_१ & २अ_२ & अ_१ & ० \\ ० & अ_१ & २अ_१ & अ_१ \end{vmatrix} = ० \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जानना चाहिए ।  
२१२ । २०८ प्रक्रम में जो प्रत्युत्पन्न का मान एक कनिष्ठफल के रूप में आया है उसके प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ संख्यात्मक ध्रुव प. और व. ये ही दो होंगे । और सब शून्य होंगे । इसलिये यदि प. ध्रुव का प्रथम लघु कनिष्ठफल पा. और व. का प्रथम लघु कनिष्ठफल वा. कहो तो प्रत्युत्पन्न = प. पा. + व. वा. ऐसा होगा (१८६ प्रक्रम देखो) जहां पा. और वा. दिष्ट हुए समीकरणों के पद गुणकों के फल हैं ।

$$प. पा. + व. वा. = प्र \dots \dots (१)$$

इसे स्मरण कर रखो ।

२१३—यदि

$$स = प_म य_म + प_{म-१} य_{म-१} + \dots + प. = ०$$

$$स_१ = व_न य_न + व_{न-१} य_{न-१} + \dots + व. = ०$$

इन दोनों का प्रत्युत्पन्न प्र हो तो २१२वें प्रक्रम से

प्र = प\_म पा\_म व\_न वा\_न जहां पा\_म और वा\_न समीकरणों के पद

गुणकों के फल हैं। इनके हरात्मक समीकरणों का प्रत्युत्पन्न = प.पा. + ब.बा. जो कि २०६ प्रक्रम के (४)से इनके प्रत्युत्पन्न के समान है। इस प्रत्युत्पन्न में प. और ब. के स्थान में प. - स और ब. - म का उत्थापन देने से

$$० = प.पा. - सपा. + ब.बा. - स. बा.$$

$$\therefore प.पा. + ब.बा. = प.सपा. + स.बा.$$

पत और पत+१ गुणक के वश तात्कालिक संबंध, चलन-कलन से, निकालने से

$$\frac{ताप्र}{तापत} = यतपा. + स \frac{तापा.}{तापत} + स. \frac{ताबा.}{तापत}$$

$$\frac{ताप्र}{तापत+१} = यत+१पा. + स \frac{तापा.}{तापत+१} + स. \frac{ताबा.}{तापत+१}$$

मान लो कि जब य=अ तो दोनों समीकरण शून्य होते हैं अर्थात् अ यह दोनों समीकरणों में य का एक मान है तब इसका उत्थापन से

$$\frac{ताप्र}{तापत} = अतपा. \text{ और } \frac{ताप्र}{तापत+१} = अत+१पा.$$

$$\therefore अ = \frac{\frac{ताप्र}{तापत+१}}{\frac{ताप्र}{तापत}}$$

त के स्थान में ०, १, २, ३...के उत्थापन से

$$अ = \frac{\frac{ताप्र}{तापत+१}}{\frac{ताप्र}{तापत}} = \frac{\frac{ताप्र}{तापत+२}}{\frac{ताप्र}{तापत}} = \frac{\frac{ताप्र}{तापत+३}}{\frac{ताप्र}{तापत}} = \text{इत्यादि}$$

इस पर से दोनों समीकरणों में जो अव्यक्तमान एक ही है उसका मान जान सकते हो। इस प्रकार  $f(y) = 0$  का यदि एक मूल दो बार हो तो उस मूल का भी पता २११ प्रक्रम के दोनों समीकरणों से लगा सकते हो।

२१४। यदि दिए हुए दो समीकरणों के मूलों के तद्वृत्तफल का मान निकालना हो तो नीचे की क्रिया करो।

कल्पना करो कि

$$f(y) = p_0 y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_m = 0 \quad (1)$$

जिसके मूल  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  हैं।

$$\text{और } f(r) = v_0 r^n + v_1 r^{n-1} + v_2 r^{n-2} + \dots + v_n = 0 \quad (2)$$

जिसके मूल  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  हैं।

कल्पना करो कि एक नया मूल  $l$  ऐसा है कि जिसके वश से  $l = t + d$  ऐसा समीकरण बनता है।

इससे  $l$  और  $y$  के रूप में  $r$  का मान जान (२) में उत्थापन देने से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें  $y$  का सब से बड़ा घात  $n$  रहेगा और जिसमें  $t, d$  और  $l$  के भी सब से बड़े घात  $n$  होंगे।

अब (१) और इस नये समीकरण में ऊपर के प्रक्रमों की किसी युक्ति से  $y$  का लोप करो तो एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें  $l$  का सब से बड़ा घात  $m$  होगा; इसलिये  $l$  का मान जो  $t + d$ , इस प्रकार का है वह  $m$  न विध होगा।

अब यदि ऐसी इच्छा हो कि  $f(y)$  और  $f(r)$  के पद गुणकों के रूप में यौ  $\alpha_1^y, k_1^y$  इसका मान जानें तो  $l$  के वश से ओ समीकरण बना है उसमें अव्यक्तमानों के  $(\psi + \phi)$

ज्ञात के योग का मान निकालें उसमें त<sup>य</sup>द<sup>य</sup> का जो गुणक होगा वही स्पष्ट है कि यौ अ, क<sup>य</sup>, का मान होगा।

### उदाहरण

$$१। अय^१ + कय^१ + खय^२ + गय + घ = ० \quad | य^२ = १$$

इनमें य का लोप करो।

पहिले समीकरण

$$अय^१ + कय^१ + खय^२ + गय + घ = ० \text{ इसे य से गुण देने से}$$

$$\text{और } य^२ = १ \text{ से } अ + कय^१ + खय^१ + गय^२ + घय = ०$$

$$\text{फिर य से गुणने से, } अय + क + खय^१ + गय^१ + घय^२ = ०$$

$$\text{फिर य से } " \quad अय^२ + कय + ख + गय^१ + घय^१ = ०$$

$$\text{फिर य से } " \quad अय^१ + कय^२ + खय + ग + घय^१ = ०$$

घात क्रम से लिखने से

$$अय^१ + कय^१ + खय^२ + गय + घ = ०$$

$$कय^१ + खय^१ + गय^२ + घय + अ = ०$$

$$खय^१ + गय^१ + घय^२ + अय + क = ०$$

$$गय^१ + घय^१ + अय^२ + कय + ख = ०$$

$$घय^१ + अय^१ + कय^२ + खय + ग = ०$$

इनमें य<sup>१</sup>, य<sup>१</sup>, य<sup>२</sup> और य के लोप करने से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & घ \\ क & ख & ग & घ & अ \\ ख & ग & घ & अ & क \\ ग & घ & अ & क & ख \\ घ & अ & क & ख & ग \end{vmatrix} = ०$$

नीचे से तिर्यक् पंक्तिओं को एक एक उठा कर ऊपर की तिर्यक् पंक्ति के नीचे रखो तो वह ठीक २०२ प्रक्रम के २०वें उदाहरण के ऐसा हो जायगा ।

२। ऊपर ही की युक्ति से दिखलाओ कि  $अय^२ + कय + ख = ०$  और  $य^२ = १$

इनका प्रत्युत्पन्न

$$= \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} = ०$$

३। ओलर की रीति से दिखलाओ कि किस स्थिति में

$$फ(य) = अय^२ + कय^२ + खय + ग = ०$$

$$फा(य) = अ'य^२ + क'य^२ + ख'य + ग' = ०$$

इतमें दो अव्यक्तमान उभयनिष्ठ होंगे ।

यहां (य-१) (य-१) इस प्रकार के दो खण्ड दोनों में उभयनिष्ठ होंगे । इसलिये तीसरा खण्ड क्रम से दय + त और द'य + त' मान लिये जायँ तो

$$(द'य + त') फ(य) = (दय + त) फा(य)$$

जहां द, त, द' और त' अज्ञात हैं । ऊपर के सरूप समीकरण से

$$द'अ \quad - दअ' \quad = ०$$

$$द'क + त'अ \quad - दक' \quad - तअ' \quad = ०$$

$$द'ख + त'क \quad - दख' \quad - तक' \quad = ०$$

$$द'ग + त'ख \quad - दग' \quad - तख' \quad = ०$$

$$तन' \quad - तग' \quad = ०$$

इन पांचो समीकरणों में से कोई चार लेकर द', त', द और त का लोप कर सकते हो। इस प्रकार लोप करने में पांच कनिष्ठफल बनेंगे जिनके मान शून्य होनेसे उदाहरण की स्थिति ठीक होगी। पांचों कनिष्ठफलों को लाघव से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & ० \\ ० & अ & क & ख & ग \\ अ' & क' & ख' & ग' & ० \\ ० & अ' & क' & ख' & ग' \end{vmatrix} = ०$$

यहां यह दिखलाता है कि एक एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को मिटा देने से जो पांच कनिष्ठफल होंगे उनके मान शून्य हैं।

४। सिद्धकरो कि

$$\begin{vmatrix} अ^२ & २ अक & क^२ \\ अअ' & अक' + अ'क & कक' \\ अ'^२ & २ अ'क' & क'^२ \end{vmatrix} \equiv (अक' - अ'क)^२ = कक$$

$$अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ०।$$

इन दोनों से १४६ प्रक्रम की युक्ति से

$$(अक' - अ'क) य = \begin{vmatrix} ० & क \\ ० & क' \end{vmatrix} = ०$$

$$\therefore (अक' - अ'क) य^२ = ० \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{और } (अय + कर)^२ = ०,$$

$$(अय + कर) (अ'य + क'र) = ०$$

$$(अ'य + क'र)^२$$



इन तीनों में  $y^1$ ,  $y^2$  और  $y^3$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से १६६ प्रक्रम की युक्ति से

$$क फ य^1 = ०$$

$$\therefore क फ य^1 = ० \dots\dots\dots (१)$$

(१) और (२) के समता से ऊपर का सरूप समीकरण सिद्ध हो जायगा।

५। ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{cccc} अ^1 & ३ अ^२क & ३ अक^२ & क^३ \\ अ^१अ' अ'^क' + २ अअ'क' २ अक' + अ'क'^२ & कक' & & \\ अअ'^२ अ'^क + २ अअ'क' २ अ'क' + अक'^२ & कक'^२ & & \\ अ'^३ & ३ अ'^२क' & ३ अ'क'^२ & क'^३ \end{array} \right| \equiv \begin{pmatrix} अक' \\ -अक \end{pmatrix}^३$$

$$\text{यहाँ } अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ०।$$

इन समीकरणों से

$$(अय + कर)^३ = ०,$$

$$(अय + कर)^२(अ'य + क'र) = ०$$

$$(अय + कर)(अ'य + क'र)^२ = ०$$

$$(अ'य + क'र)^३ = ०$$

ये चार समीकरण बना कर इनमें  $y^1$ ,  $y^2$ ,  $y^3$ ,  $y^4$  का लोप करो तो बाई ओर का कनिष्ठफल उत्पन्न होगा फिर पिछले उदाहरण की युक्ति से और बातें जानो।

$$३। फ(य) = ०, फ'(य) + फ''(य) \frac{१}{१.२} + फ'''(य) \frac{१^२}{१.१.१} + \dots = ०$$



कल्पना करो कि उन दोनों समीकरणों के रूप  $आ = ०$ ,  $का = ०$  ऐसे हैं जहां  $आ$  और  $का$  दोनों  $य$  और  $र$  के फल हैं और गुण्य गुणक रूप खण्डों में  $आ = स$   $स' = स'$  और  $का = श$   $श'$  ऐसा हो जाता है तो दिए हुए समीकरणों के सब मूल  $स = ०$ , और  $श = ०$ ,  $स = ०$  और  $श' = ०$ ,  $स' = ०$  और  $श = ०$   $स' = ०$  । और  $श' = ०$ ,  $स'' = ०$  और  $श = ०$ ,  $म'' = ०$  और  $श' = ०$  इन समीकरणों से आ जायंगे जो कि पहिले दोनों समीकरणों की अपेक्षा अल्प घात के होंगे ।

संभव है कि दोनों समीकरण के गुण खण्डों में कोई समान हों जैसे ऊपर के उदाहरण में संभव है कि  $म = श$  ऐसा हो, ऐसी स्थिति में जो  $य$  और  $र$  के मान  $आ = ०$  इसे सत्य रखेंगे वे  $का = ०$  इसे भी सत्य रखेंगे; इसलिये  $स = ०$  इसमें चाहे  $र$  का जो मान मान उसके उत्थापन से तत्सम्बन्धी  $य$  का मान जान सकते हैं । इस प्रकार कुट्टक की युक्ति से यहाँ अनेक  $य$  और  $र$  के मान आवेंगे । यदि इस स्थिति में  $स = ०$  इसमें एक ही अव्यक्त हो तो बसका मान तो  $स = ०$  इससे परिमित होंगे और दूसरे का मान चाहे जो मान सकते हो ।

२१६—कल्पना करो कि  $फ_1(य, र) = ०$  और  $फ_2(य, र) = ०$  इनमें  $य = अ_1$ ,  $र = क_1$  तो समीकरण ठीक रहते हैं । तो  $फ_1(य, क_1) = ०$  और  $फ_2(य, क_1) = ०$  ये दोनों  $य$  के  $अ_1$  तुल्यमान में सत्य रहेंगे । इसलिये दोनों समीकरण  $य = अ_1$  इससे निःशेष होंगे अर्थात्  $फ_1(य, क_1)$  और  $फ_2(य, क_1)$  का महत्तमापवर्त्तन अवश्य  $य = अ_1$  होगा । अर्थात्  $फ_1(य, क_1)$  और  $फ_2(य, क_1)$  का महत्तमापवर्त्तन जो हो उसे शून्यके

समान करने से  $y$  का एक मान  $\alpha$ , वा अनेक मान ऐसे आवेंगे जिनके वश से जब  $r = \alpha$ , तब दोनों समीकरण ठीक रहेंगे।

कल्पना करो कि  $f_1(y, r)$  और  $f_2(y, r)$  में  $y$  के अपचित घात क्रम से पदों को रख कर महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये क्रिया करना आरम्भ किया और करते करते अन्त में ऐसा शेष बचा जो केवल  $r$  का फल है अर्थात् शेष  $= f(r)$  ऐसा हुआ तो जब तक  $f(r) = 0$  ऐसा न होगा तब तक  $f_1(y, r)$ ,  $f_2(y, r)$  का कोई महत्तमापवर्त्तन न होगा; इसलिये  $y$  के एक ही मानमें दोनों शून्य के समान नहीं हो सकते। यह कुछ नियम नहीं कि  $f(r) = 0$  इसमें जितने  $r$  के मान आवेंगे सब से दोनों समीकरणों को सत्यता ठीक रहेगी क्योंकि संभव है कि क्रिया करने में  $y$  के किसी घात का गुणक जो  $r$  के रूप में है भिन्न हो और  $r$  का कोई फल हर में हो जिसमें  $f(r) = 0$  इसके एक अव्यक्त मान के उत्थापन से फल शून्य के समान हो ऐसी दशा में उस राशि का मान अनन्त होगा जो कि यहाँ पर उचित नहीं। जैसे यदि

$$f_1(y, r) = \alpha f_2(y, r) + f(r)$$

तो यदि  $\alpha = 0$  अर्थात् अभिन्न हा तो परिमिति के मान के उत्थापन से अनन्त नहीं होगा; इसलिये  $f(r) = 0$  और  $f_2(y, r) = 0$  इन पर से जो  $y$ , और  $r$  के मान होंगे उनके उत्थापन से  $f_1(y, r) = 0$  यह ठीक शून्य ही होगा; इसलिये कहेंगे कि  $y$  और  $r$  के मान ठीक हैं। परन्तु यदि  $\alpha$  भिन्न हो और उसके हर में  $r$  का कोई फल हो तो संभव है कि  $f(r) = 0$ ,  $f_2(y, r) = 0$  इनसे जो  $r$  का मान हो उसके

उत्थापन से  $\text{लफ}_2(y, r) = \infty$  वा  $\text{लफ}_2(y, r) = \frac{\infty}{\infty}$  ऐसा हो, ऐसी स्थिति में  $\text{फ}_1(y, r) = \infty$  वा  $\text{फ}_1(y, r) = \frac{\infty}{\infty}$  ऐसा होगा जो कि समीकरण की स्थिति से अशुद्ध है। यदि एक गुणक  $x$ , जो कि केवल  $r$  का फल है इससे  $\text{फ}_1(y, r)$  को गुण  $\text{फ}_2(y, r)$  इसका भाग दे जिसमें लब्धि अभिन्न आवे तो अब

$x, \text{फ}_1(y, r) = \text{लफ}_2(y, r) + \text{फ}(r)$  ऐसी स्थिति होगी। यहां  $\text{फ}(r) = 0$ ,  $\text{फ}_2(y, r) = 0$  इनसे जां य और  $r$  आवेंगे उनके उत्थापन से अवश्य अब  $\text{ल}$  के अभिन्न होने से  $\text{लफ}_2(y, r) + \text{फ}(r) = 0$  ऐसा होगा; इसलिये  $x, \text{फ}_1(y, r)$  यह भी शून्य के समान होगा परन्तु यह नहीं कह सकते कि  $\text{फ}_1(y, r) = 0$  ऐसा हो क्योंकि संभव है कि  $x = 0$  हो। इसलिये यहां पर यह विचारणीय है कि कौन  $y$  और  $r$  के मान ठीक होंगे।

$y$  और  $r$  के मान जानने के लिये M. M. Labatie and Sarrus की रीति दिखलाते हैं। महत्तमावर्तन जानने के लिये यदि लब्धि भिन्न आती हो तो खजा कि  $r$  का कोई फल है उससे भाज्य को गुण कर तब भाग दो और शेष में यदि शि जो कि  $r$  का फल है इसका निःशेष भाग जाता हो तो उससे भाग दे कर लब्धि को शेष कहो।

२१८—मान ली कि  $आ = 0$ ,  $का = 0$  ये दो समीकरण हैं जिन दोनों में ऐसे कई गुण खण्ड नहीं हैं जा केवल  $r$  के फल हों और  $आ$  की अपेक्षा का में  $y$  का अल्प घात है।  $x$  गुणक से  $आ$  को गुणने से और  $का$  का भाग देने से लब्धि  $x$  और शेष शिसे जहां शि  $r$  का कोई फल है।

फिर शे से का में भाग देने से ऊपर के सब पदार्थ स<sub>१</sub>, स<sub>२</sub>, शि<sub>१</sub>, शे<sub>१</sub> समझो। इस तरह क्रिया करते करते मान लो कि चौथे बार शि<sub>३</sub> और शे<sub>३</sub>=१ तो

$$\left. \begin{aligned} स_३ आ &= ल_३ का + शि_३ शे \\ स_३ का &= ल_३ शे + शि_३ शे_१ \\ स_३ शे &= ल_३ शे_१ + शि_३ शे_२ \\ स_३ शे_१ &= ल_३ शे_२ + शि_३ \end{aligned} \right\} \dots \dots (१)$$

अब मान लो कि स और शि का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>१</sub>,  $\frac{स_३}{ग_१}$  और शि<sub>३</sub> का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>१</sub>,  $\frac{स_३, स_२}{ग_१}$  और शि<sub>३</sub>

का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>२</sub> और  $\frac{स_३, स_२, स_१}{ग_१, ग_२}$  और शि<sub>३</sub> का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>३</sub> है तो

$$\left. \begin{aligned} \frac{शि_३}{ग_१} &= ०, \text{ और } का = ० \\ \frac{शि_२}{ग_१} &= ०, \text{ और } शे = ० \\ \frac{शि_१}{ग_२} &= ०, \text{ और } शे_१ = ० \\ \frac{शि_३}{ग_३} &= ०, \text{ और } शे_२ = ० \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (२)$$

इन समीकरणों से य और र के जो मान होंगे वे ही आ=० और का=० इन दोनों में भी य और र के मान होंगे।

(२) इन में से पहिले समीकरण में ग का भाग देने से

$$\frac{स}{ग} आ = \frac{ल}{ग} का + \frac{शि}{ग} शे \dots \dots \dots (३)$$

ख और शि का महत्तामपवर्त्तन ग है; इसलिये  $\frac{ख}{ग}$ ,  $\frac{शि}{ग}$  के

अभिन्न होने से  $\frac{ल}{ग}$  भी अभिन्न होगा क्योंकि ग केवल र का फल है और का में केवल र के फल का गुणखण्ड नहीं है ऐसा पहले ही मान लिया है, इसलिये का और ग परस्पर दृढ़ हैं।

(३) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि}{ग} = ०$ , का = ० य और र के जितने मान

आवेंगे उनके उत्थापन से  $\frac{ख}{ग}$  आ यह भी शून्य होगा परन्तु

न के महत्तामपवर्त्तन होने से  $\frac{ख}{ग}$  और  $\frac{शि}{ग}$  इनमें अब उभय-

निष्ठ गुणखण्ड कोई न होंगे। इसलिये जिस मान में  $\frac{शि}{ग}$  शून्य होगा उस मान में  $\frac{ख}{ग}$  यह शून्य न होगा; इसलिये

(३) के सत्य होने से आ = ० ऐसा होगा; इसलिये  $\frac{शि}{ग} = ०$  और का = ० इनमें के सब अव्यक्त मान आ = ०, का = ० इनमें भी रहेंगे। (३) के दोनों पक्षों को ख, से गुण देने

से और ख, का के स्थान में (१) के दूसरे समीकरण का उत्थापन देने से  $\frac{ख}{ग} \cdot ख, - आ = \frac{ख, शि + ल ल, शे}{ग} + \frac{ल शि, शे}{ग}$

शि और ल के ग से अभिन्न होने से  $\frac{ख, शि + ल ल, शे}{ग}$  यह

अभिन्न होगा और दोनों पक्षों में ग, के भाग से पूर्ववत् सिद्ध

कर सकते हो कि  $\frac{ख, शि + ल ल, शे}{म ग,}$  यह भी अभिन्न होगा।

$$मा = \frac{ख}{ग} \text{ और } \frac{ख, शि + ल ल,}{ग ग,} = मा, \text{ मान लेने से}$$

$$\frac{ख ख,}{ग ग,} आ = मा, शे + \frac{शि, मा शे,}{ग,} \dots \dots (४)$$

(१) के दूसरे समीकरण को  $\frac{ख}{ग}$  से गुण देने से

$$\frac{ख ख,}{ग} का = \frac{ख ल,}{ग} शे + \frac{ख}{ग} शि, शे,$$

ग,,  $\frac{ख ल,}{ग}$  और शि, को निःशेष करता है, इसलिये शे के

केवल र का फल न होने से  $\frac{ख ल,}{ग}$  को ली ग, निःशेष करेगा,

इसलिये लाघव से  $\frac{ख}{ग} = ना, \frac{ख ल,}{ग ग,} = ना, \text{ मान लेने से}$

$$\frac{ख ख,}{ग ग,} का = ना, शे + \frac{शि,}{ग,} ना शे, \dots (५)$$

(४) और (५) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि,}{ग,} = ० \text{ अ } = ०$ । इनसे  
, य और र के जितने मान होंगे सब के उत्थापन से ऊपर की  
'युक्ति से आ = ० और का = ० ठीक रहेंगे, इसलिये  $\frac{शि,}{ग,} = ०$ ,  
शे = ०, इनके सब मूल आ = ०, का = ० इनमें होंगे।

(४) के दोनों पदों को  $ख,$  से गुण देने से  $ख,$  का उत्था-  
पन (१) के तीसरे समीकरण से देने से



$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१} आ = \left( ल_२ मा_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} मा \right) शे_१ + जि_२ मा_१ शे_२$$

महत्तमापवर्त्तन होने से ग<sub>१</sub> प्रथम पक्ष और शि<sub>१</sub> को निःशेष करता है; इसलिये ऊपर ही की युक्ति से ग<sub>२</sub>, शे<sub>१</sub> में केवल र का फल गुण खण्ड न होने से,  $\left( ल_२ मा_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} मा \right)$  को निःशेष करेगा।

मान लो कि निःशेष करने से लब्धि मा<sub>२</sub> है तो

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१ ग_२} आ = मा_२ शे_१ + \frac{शि_२}{ग_२} मा_१ शे_१ \dots (६)$$

(५) के दोनों पक्षों को ख<sub>२</sub> से गुण देने से और ख<sub>२</sub> के के स्थान में (१) के तीसरे समीकरण का उत्थापन देने से

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१} का = \left( ल_२ ना_१ + \frac{ख_२ जि_१}{ग_१} ना \right) शे_१ + शि_२ ना_१ शे_२$$

पूर्ववत् फिर सिद्ध कर सकते हो कि  $\left( ल_२ ना_१ + \frac{ख_२ जि_१}{ग_१} ना \right)$  यह ग<sub>२</sub> से निःशेष होगा और मान लो कि लब्धि ना<sub>२</sub> आई तो

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१ ग_२} का = ना_२ शे_१ + \frac{शि_२}{ग_२} ना_१ शे_२ \dots (७)$$

( ६ ) और ( ७ ) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि_1}{ग_1} = 0$ ,  $शे_1 = 0$ , इनमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे सब  $आ = 0$  और  $का = 0$  इनमें भी होंगे ।

इसी प्रकार ( ६ ) और ( ७ ) के दोनों पक्षों को ख<sub>१</sub> से गुण्य कर और ख<sub>१</sub> शे<sub>१</sub> का उत्थापन ( १ ) के चौथे समीकरण से देने से पूर्ववत् क्रिया करने से

$$\frac{ख_1 ख_2 ख_3}{ग_1 ग_2 ग_3} आ = मा_1 शे_1 + \frac{शि_1}{ग_1} मा_2 \dots \dots (८)$$

$$\frac{ख_1 ख_2 ख_3}{ग_1 ग_2 ग_3} का = ना_1 शे_1 + \frac{शि_1}{ग_1} ना_2 \dots \dots (९)$$

ऐसे समीकरण बनेंगे जिन से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि  $\frac{शि_1}{ग_1} = 0$  और  $शे_1 = 0$  इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब  $आ = 0$  और  $का = 0$  इनमें भी अव्यक्तमान होंगे । इससे सिद्ध हुआ कि ( २ ) समीकरण परम्परा से जितने अव्यक्तमान आँगे सब के उत्थापन से  $आ = 0$  और  $का = 0$  ये दोनों समीकरण सत्य रहेंगे ।

अब इतना और दिखाना है कि  $अ = 0$ ,  $इ = 0$ , इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब ( २ ) समीकरण परम्परा के अव्यक्तमानों के अन्तर्गत है ।

( ३ ) को थोड़ा परिवर्तन करने से =

$$अ आ — मा का = \frac{शि}{ग} शे \dots \dots \dots (१०)$$

ऐसे लिख सकते हो।

(४) को का और (५) वें को आ से गुण कर घटा देने से  
 $(मा_1 का - ना_1 आ) शे_1 + (मा_1 का - ना_1 आ) \frac{शि_1}{ग_1} शे_1 = 0$

(१०) वें से

$$(मा_1 का - ना_1 आ) शे_1 - \frac{शि_1 शि_1}{ग_1 ग_1} शे_1 शे_1 = 0$$

इसलिये

$$मा_1 का - ना_1 आ = \frac{शि_1 शि_1}{ग_1 ग_1} शे_1 \dots\dots\dots (११)$$

(६) वें को का से और (७) वें को आ से गुण कर घटा देने से

$$(मा_2 का - ना_2 आ) शे_1 + (मा_1 का - ना_1 आ) \frac{शि_2}{ग_2} शे_2 = 0$$

और (११) वें से

$$(मा_2 का - ना_2 आ) शे_1 + \frac{शि_1 शि_2}{ग_1 ग_2} शे_1 शे_2$$

इसलिये

$$मा_2 का - ना_2 आ = - \frac{शि_1 शि_2}{ग_1 ग_2} शे_2 \dots\dots\dots (१२)$$

इसी प्रकार (८) वें और (९) वें से

$$मा_3 का - ना_3 आ = \frac{शि_1 शि_2 शि_3}{ग_1 ग_2 ग_3} \dots\dots\dots (१३)$$

(१३) वें से स्पष्ट है कि जितने श और र के मान में आ

और वा शून्य होंगे उतने मानों में  $\frac{\text{शिशि}, \text{शि}_2, \text{शि}_3}{\text{गग}_1, \text{ग}_2, \text{ग}_3}$  यह भी शून्य

होगा, इसलिये इसके गुण खण्डों  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}, \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}, \frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}$  और  $\frac{\text{शि}_3}{\text{ग}_3}$  में

एक एक अवश्य शून्य होंगे।

इसलिये  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0, \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}=0, \frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}=0$  और  $\frac{\text{शि}_3}{\text{ग}_3}=0$ , इनसे जितने  $r$  के मान आवेगें उनके अन्तर्गत ही  $\text{आ}=0$  और  $\text{का}=0$  के  $r$  के मान होंगे।

कल्पना करो कि जब  $y=अ$ , और  $r=क$  तब  $\text{आ}=0$  और  $\text{का}=0$  ये ठीक हो जाते हैं तो यदि  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0$  इसमें भी एक मान क हो तां  $y=अ$ , और  $r=क$  में  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0$  और  $\text{का}=0$  ऐसा होगा।

यदि क,  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0$  इसमें का अव्यक्त मान न हो किन्तु  $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}=0$

इसमें का एक अव्यक्त मान हो तो क के उत्थापन से  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}$  के न

शून्य होने से (१०) वे से  $y=0$  और  $r=क$  में  $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}=0$

और  $\text{शे}=0$  होगा।

यदि क,  $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0, \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}=0$ , इन दोनों में अव्यक्त मान न

हो किन्तु  $\frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}=0$  इसमें का एक अव्यक्त मान हो तो ऊपर ही

की युक्ति से और (११) वें से  $y = अ$ , और  $r = क$  में  $\frac{शि_०}{ग_१} = ०$   
और  $शे_१ = ०$  होगा।

फिर कल्पना करो कि  $\frac{शि}{ग} = ०, \frac{शि_१}{ग_१} = ०, \frac{शि_२}{ग_२} = ०$

इन में का अव्यक्त मान नहीं है किन्तु  $\frac{शि_१}{ग_१} = ०$  इसमें का अव्यक्त मान है तो  $y = अ$  और  $r = क$  में (१२) वें से  $\frac{शि_०}{ग_१} = ०$  और  $शे_१ = ०$  होगा। इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है।

$\frac{शि}{ग} \frac{शि_१}{ग_१} \frac{शि_२}{ग_२} \frac{शि_३}{ग_३} = ०$  इस समीकरण को जिस पर से  $r$  के सब मान आते हैं  $r$  के रूप में प्रधान समीकरण कहते हैं।

### उदाहरण

१।  $(r-1)y^2 + r y + r^2 - १ = ०$ ,  $(r-1)y + r = ०$   
इन में  $y$  और  $r$  का मान बताओ।

$$\text{यहां आ} = (r-1)y^2 + r y + r^2 - १ = ०$$

$$\text{का} = (r-1)y + r$$

$$\text{स} = १, \text{क} = y, \text{शि} = r^2 - २r, \text{शे} = ०$$

∴ स और शि का महत्तमापवर्त्तन  $ग = १$

(२) समीकरण परम्बरा से

$$\frac{\text{शि}}{\text{ग}} = २^२ - २२ = ० \text{ और } का = (२ - १) य + २ = ० \text{ इन से}$$

य और २ का मान जान लो ।

$$२। (२ - १) य^२ + २(२ + १) य^३ + (३ २^२ + २ - २) य + २ = ० \dots (१)$$

$$\text{और } (२ - १) य^३ + २(२ + १) य + ३ २^३ - १ = ० \dots (२)$$

इनमें य और २ के मान के लिये समीकरण बनाओ ।

(१) को आ और (२) का का कहो तो

$$\text{ख} = १, \text{ज} = य, \text{शिशे} = (२ - १) य + २२ \therefore \text{शि} = १ \text{ और } \text{शे} = (२ - १) य + २२।$$

$$\text{फिर } ख_१ = १, \text{ज}_१ = य + २, \text{शि}_१, \text{शे}_१ = २^२ - १ \therefore \text{शि}_१ = २^२ - १, \text{शे}_१ = १।$$

ख और शि का महत्तमापवत्तन  $ग = १$ , परन्तु २ के न रहने से यह व्यर्थ है ।

$$\frac{\text{खल}}{\text{ग}} = \frac{१}{१} = १ \text{ और } \text{शि}_१ = २^२ - १ \text{ का महत्तमापवत्तन}$$

$$ग_१ = १$$

$$\text{इसलिये } \frac{\text{शि}_१}{\text{ग}_१} = २^२ - १ = ०, \text{शे} = (२ - १) य + २२ = ०।$$

इन पर से य और २ के मान जान लो ।

$$३। २य^२ - (२^२ - २२ - १)य + २ = ०, य^२ - २२ + ३ = ०$$

$$\text{इनमें } ख = १, \text{ज} = य, \text{शि} = १, \text{शे} = य + २।$$

$$ख_1 = 1, ल_1 = य - 1, शि_1 = 1, शे_1 = 1$$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन  $ग = 1$  और  $\frac{ख_1}{ग} = 1$  और

शि<sub>1</sub> = 1 का महत्तमापवर्त्तन  $ग_1 = 1$ , इसलिये यहाँ  $\frac{शि_1}{ग} = 1 = 0$  यह

असंभव और  $\frac{शि_1}{ग_1} = 1 = 0$  यह भी असंभव होने से कहेंगे कि प्रश्न खिल है।

$$४। य^३ + ३रय^२ - ३य^२ + ३र^२य - ६रय - य + १^३ - ३र^२ - १ + ३ = ० = का,$$

$$\text{और } य^३ - ३रय^२ + ३य^२ + ३र^२य - ६रय - य - १^३ + ३र^२ + १ - ३ = ० = का$$

इनमें ख=१, पहिला शेष अर्थात् शिशे =  
३(१-१) (३य^२र^२ - २र - ३)

$$. शि=१-१, शे=३य^२+१^२-२र-३।$$

$$ख_1 = ३, शि_1, शे_1 = ८(१^२ - २र)य, . शि_1 = १^२ - २र, शे_1 = ८य$$

$$ख_2 = ८, शि_2, शे_2 = १^२ - २र - ३ \therefore जि_2 = १^२ - २र - ३,$$

शे<sub>2</sub> = १, ख=१ और शि=१-१ का महत्तमापवर्त्तन  $ग=१$  और  $\frac{ख_1}{ग} = ३$  और

$$शि_1 = १^२ - २र का महत्तमापवर्त्तन  $ग_1 = १$  और  $\frac{ख_1, ख_2}{ग, ग_1}$$$

$= 1 \times 3 \times 4 = 12$  का और  $शि_2 = r^2 - 2r - 1$  का महत्तमापवर्त्तन  $ग_2 = 1$  हुआ।

$$\text{इसलिये } \frac{शि}{ग} = 1 - 1 = 0, \text{ का } = 0, \frac{शि_1}{ग_1} = r^2 - 2r - 1 = 0, \text{ शे}$$

$$= 1r^2 + r^2 - 1r - 1 = 0 \text{ और } \frac{शि_2}{ग_2} = r^2 - 2r - 1 = 0. \text{ शे,}$$

$$= 0 \text{ वा } 0 = 0$$

और प्रधान समीकरण  $r$  के रूप में

$$(r - 1)(r^2 - 2r)(r^2 - 2r - 1) = 0 \text{ यह हुआ।}$$

$$५। (r - 1) r^2 - 2r + 4r - 2 = 0 = \text{आ}$$

और  $r^2 - 2r - 4r + 2 = 0$  का इनमें  $r$  और  $r$  के लिये समीकरण परम्परा बनाओ।

यहां आ को  $r$  से गुणकर तब का के भाग देने से ल अभिन्न आता है, इसलिये  $ख = r$  और  $शि = (1r - 10)r + r^2 + 1r$   $शि = 1$ ,  $शे = (1r - 10)r + r^2 + 1r$ । शे का भाग वा में देने के लिये और ल का अभिन्न होने के लिये वा को पहिले  $1r - 10$  से गुण देने से फिर  $1r - 10$  से गुण देने से अर्थात् का को  $(1r - 10)^2$  से गुण देने से  $ख_1 = (1r - 10)^2$ ,

$$शि, शे_1 = r^2 + 10r^2 + 100r^2 - 200r^2 + 100r$$

$$\text{इसलिये } शि_1 = r^2 + 10r^2 + 100r^2 - 200r^2 + 100r \text{ और } शे_1 = 1$$

$$\text{ख और शि का महत्तमापवर्त्तन } ग = 1 \text{ और } \frac{ख}{ग} =$$



$\frac{r(1r-10)^2}{1} = r(1r-10)^2$  और शि<sub>1</sub> का महत्तमापवर्त्तन  
ग<sub>1</sub> = १ है ।

इसलिये  $\frac{\text{शि}}{ग} = \frac{१}{१} = १=०$  असंभव होने से

$$\frac{\text{शि}_1}{ग_1} = \frac{३२ + १२१ + ८७१ - २००१ + १००१}{१}$$

$$= ११ + १२१ + ८७१ - २००१ + १००० = ०, \text{ शि} =$$

$$/ (३२ - १०) य + ११ + ६१ = ०$$

इनसे य और १ के मान विदित हो जायंगे ।

२२० । २१६ प्रक्रम के (३) से जब सिद्ध है कि  $\frac{ग}{ग}$  यह अन्तिम  
ग' के बराबर होगा तब कह सकते हो कि ख का एक छोटा मान  
ऐसा हो सकता है कि जिसके वश से सर्वदा ग=१ हो । इसी  
प्रकार ख<sub>१</sub>, ख<sub>२</sub>, ..... के मान ऐसे ले सकते हैं जिसमे ख<sub>१</sub>,  
और शि<sub>२</sub> का, ख<sub>२</sub> और शि<sub>२</sub> का, इत्यादि का महत्तमाप-  
वर्त्तन १ ही हो । इसलिये  $\frac{\text{ख ख}_1}{ग}$  और शि<sub>१</sub> का महत्तमापव-  
र्त्तन = ग<sub>१</sub> (ग = १ और ख<sub>१</sub> और शि<sub>१</sub> के परस्पर दृढ़ होने से)  
बही होगा जो कि ख और शि<sub>१</sub> को होगा । और  $\frac{\text{ख ख}_1}{ग_1}$  और  
शि<sub>१</sub> का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>१</sub> होगा । इस प्रकार आगे भी जान  
लेना चाहिए ।

यदि अन्त में शि जैसा कि २१६ वें प्रक्रम में मान लिया

है कि शि, यह य से स्वतन्त्र है, शून्य के तुल्य हाता शे, यह आ और का का महत्तमापवर्त्तन होगा। इसलिये शे<sub>२</sub>=० इस पर से २१७ प्रक्रम की युक्ति से य और र के अनन्त मान आ सकने हैं, और  $\frac{आ}{श_२} = ०$ , और  $\frac{का}{श_२} = ०$  इन समीकरणों से पूर्ववत् क्रिया करने से य और र के परिमित मान भी आबेगं और तब (२) की समीकरण परम्परा में श<sub>२</sub> के भाग दे देने से

$$\frac{शि}{ग} = ० \text{ और } \frac{का}{श_२} = ०, \frac{शि_१}{ग_१} = ० \text{ और } \frac{शे}{श_२} = ०, \frac{शि_२}{ग_२} = ० \text{ और } \frac{शे_१}{श_२} = ०$$

इन्से य और र के उन परिमित मानों का पता लगा सकते हो।

$$\begin{aligned} \text{जैसे } य^३ + ४ य^२ - (२२ + १) य + ४ - २^३ &= ० = आ \\ य^३ - ४ य^२ - (२^३ + ६४ + ६) य + २^३ + ६४ + ६४ &= ० = का \\ \text{यहां का से आ में भाग देने से ख} &= १ \text{ और पहिला शेष} \\ &= ४४ य^२ + (३४ + ६) य - २^३ + ३४ + ६४ \end{aligned}$$

$$\text{इसलिये शि} = २, \text{ शे} = ४ य^२ + (३४ + ६) य - (२^३ + ३४ + ६४)$$

शे से का में भाग देने में का को र से गुण देने से फिर एक बार भाग दे देने पर अभिन्न लब्धि के लिये र से गुण देने से अर्थात् का को र<sup>२</sup> से गुण देने से।

$$\text{ख}_२ = -, \text{ शि}_१, \text{ शे}_१ = -(२^२ + ३४ + २)(य - २)$$

$$\text{इसलिये शि}_१ = ८(२^२ + ३४ + २) \text{ और शे}_१ = ४ - ४$$

शे, से शे में भाग देने से शेष कुछ नहीं बचता इसलिये  
 $\text{शि}_2 = 0$  तब ऊपर की क्रिया से  $\text{शे}_1 = \text{य} - \text{र} = 0$  इसपर से य और  
 र के अनेक मान आवेंगे और  $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} = 6(1^2 + 1 + 1) = 0$

वा  $1^2 + 1 + 1 = 0$  और  $\frac{\text{शे}}{\text{ग}_1} = \text{य} + 1^2 + 1 + 1 = 0$  इनसे परि-  
 मित य और र भी आवेंगे।

२१८ प्रक्रम की क्रिया में यह मान लिया गया है कि य और  
 र के अनन्त मान नहीं हैं। अर्थात् आ और का के महत्तमा-  
 पवर्त्तन से आ और का को भाग देकर जो लब्धि आवे उसे  
 आ और का के स्थान में रख कर तब २१८ वें प्रक्रम से सर्वदा  
 क्रिया का आरम्भ करें।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि  $\text{य} + 1 = 0$ ,  $\text{य}^2 - \text{र}^2 + 1 = 0$  ऐसे दो  
 समीकरण नहीं हो सकते।

२।  $\text{य} + \text{र} - 4 = 0$ ,  $\text{य}^4 + \text{र}^4 - 12 = 0$  इनमें य और र के मान  
 बताओ।

$$\text{यहाँ शि} = (4 - \text{र})^4 + \text{र}^4 - 12, \text{ख} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{शि}}{\text{ग}} = (4 - \text{र})^4 + \text{र}^4 - 12 = 0, \text{का} = \text{य} + \text{र} - 4 = 0$$

३।  $\text{य}^3 + \text{य} \text{र} + \text{र}^3 - 48 = 0$ ,  $\text{य}^4 + \text{य}^2 \text{र}^2 + \text{र}^4 - 64 = 0$   
 इनमें य और र के मान बताओ।

$$\text{यहाँ ख} = 1, \text{शि} = -48, \text{शे} = \text{य} \text{र} - 12, \text{ख}_1 \text{र}^2,$$

$$\text{शि}_1 = \text{र}^4 - 14\text{र}^2 + 224,$$

शे, = १, च और जि का महत्तामापवर्तन ग = १,

$\frac{\text{ख ख}}{\text{ग}} = १^२, \text{शि}_1 = १^२ - ३४२^२ + २६५$  का महत्तामापवर्तन ग, = १

$$\therefore \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} = १^२ - ३४२^२ + २६५ = ० \text{ और शे} = \text{य र} - १५ = ०$$

४।  $\text{य}^२ + \text{र}^२ - (\text{य} + \text{र}) - \text{अ} = ०, \text{य}^२ + \text{र}^२ + \text{य} + \text{र} - २(\text{य}^२ + \text{र}^२) - \text{क} = ०$  इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ ख = १, शि = ० ( $\text{र}^२ - \text{र} - \text{अ},^२ + २अ \text{ र}^२ - \text{र} - \text{अ}) + \text{अ}^२ - \text{अ} - \text{क}, \text{शे} = १, \text{च और जि का महत्तामापवर्तन ग} = १$

$$\therefore \frac{\text{शि}}{\text{ग}} = २ (\text{र}^२ - \text{र} - \text{अ},^२ + २अ \text{ र}^२ - \text{र} - \text{अ}) + \text{अ}^२ - \text{अ} - \text{क} = ०$$

$$\text{और का} = \text{य}^२ + \text{र}^२ - (\text{य} + \text{र}) - \text{अ} = ०$$

यदि समीकरण को तोड़ कर अथ्यल के मान ले आओ तो

$$\text{य} (\text{य} - १) = \frac{१}{३} \{ \text{अ} \pm \sqrt{(१ \text{ अ} + २ \text{ क} - \text{अ}^२)} \}$$

$$\text{र} (\text{र} - १) = \frac{१}{३} \{ \text{अ} \mp \sqrt{(१ \text{ अ} + २ \text{ क} - \text{अ}^२)} \}$$

$$५। \text{य}^२ + ३४५^२ + (३२^२ - \text{र} + १)\text{य} + \text{र}^२ - \text{र}^२ + २२ = ०,$$

$\text{य}^२ + २२य + \text{र}^२ - \text{र} = ०$ , इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ  $\text{र}^२ - \text{र} = ०, \text{य} + २२ = ०$  ऐसे समीकरण बनेंगे।

$$६। \text{य}^२ + २२य^२ + २२(\text{र} - १)\text{य} + \text{र}^२ - ४ = ०$$

$\text{य}^२ + २२य + २२\text{र}^२ - \text{र} + २ = ०$  इनमें य और र के मान जानने के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ  $x-2=0$ ,  $x^2-2xy+2x^2-2x+2=0$  और  $x^2-4x+6=0$ ,  $y+1+2=0$  ऐसे समीकरण बनेंगे। और  $x$  के रूप में प्रधान समीकरण

$$(x-2)(x^2-2x+2)=0 \text{ ऐसा होगा।}$$

## १७—प्रकीर्णक ।

२२१। चलस्पद्धि, अचलस्पद्धि ।

१२६ वें प्रक्रम में जो  $n$  का मान है उस लाघव से

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) (y, 1)^n$$

इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं ।

इसी प्रकार  $(a_0, a_1, a_2; \dots, a_n) (y, 1)^n$

$$= a_0 y^n + n a_1 y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 y^{n-2} + \dots$$

+ ..... +  $n a_n y^{1-n} + a_n$  ऐसा मान सकते हैं ।

$x_n = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) (y, 1)^n$  इसमें अव्यक्त मान क्रम से  $i, i_2, i_3, \dots, i_n$  समझो तो यदि इनके अन्तर से बना एक तद्रूप और ध्रुवशक्तिक फल का हो जिसमें सोपान की संख्या से हो तो फा में  $i_1, i_2, \dots, i_n$  के स्थान में

$$\frac{1}{i_1 - y}, \frac{1}{i_2 - y}, \dots, \frac{1}{i_n - y} \text{ इनके उत्थापन से जो फा का}$$

मान हो उसे अभिन्न करने के लिये  $s_n^{(0)}$  इससे गुण देनेसे यदि गुणनफल में  $y$  रहे तो गुणनफल को  $s_n$  का चलस्पर्शी और यदि  $y$  न रहे तो उसे  $s_n$  का अचलस्पर्शी कहते हैं।

यदि  $f_n$  में प्रत्येक अव्यक्तमान का समान ही घात हो तो ऊपर की परिभाषा से  $s_n$  का अचलस्पर्शी  $f_n$  (अ, अ, , ... अ) ऐसा होगा।

यदि  $s = 0$ ,  $s = 0$ ,  $s_n = 0$  इत्यादि के मूलों के अन्तर का तद्रूपफल  $f_n$  हो जिनमें  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  इत्यादि सोपान हों तो ऊपर की परिभाषा से प्रत्येक अव्यक्त मान  $s$  इत्यादि के स्थानमें  $\frac{1}{s-y}$  इत्यादि के उत्थापन से और अभिन्न के लिये।  $s \rightarrow s_0, s \rightarrow s_1, s \rightarrow s_2$

इत्यादि से गुण देने से यदि गुणन फल में  $y$  रहे तो  $s_0, s_1, s_2$  इत्यादि परम्परा का चलस्पर्शी और  $y$  न रहे तो उन्हीं परम्परा का वह गुणन फल अचलस्पर्शी होगा। ( सोपान के लिये १६६ वाँ प्रक्रम देखो )  
२२१। कल्पना करो कि

अ<sup>०</sup>  $f_n$  (१, ३, ५, ७, ... २५) = फि  $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots s_n$  इनमें अव्यक्त मानों ३, ५ इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मान के उत्थापन से और  $s_0, s_1, s_2, \dots$  इत्यादि के स्थानों में

अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>n-१</sub> इत्यादि के उत्थापन से अ<sub>०</sub> सो फि(इ<sub>१</sub>, इ<sub>२</sub>, ... इ<sub>n</sub>)  
= फी(अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>n</sub>) जहाँ अथक मानों का कोई तद्रूप फल फि है और फी तत्संबन्धी समीकरण के गुणकों के रूप में मान है।

अब फिर इ<sub>१</sub>, इ<sub>२</sub>, ... इत्यादि के स्थान में इ<sub>१</sub>-य, इ<sub>२</sub>-य, ... इ<sub>n</sub>-य इत्यादि के उत्थापन से और अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... इत्यादि के स्थानों में १२६ वें प्रक्रम से स<sub>१</sub>, स<sub>२</sub>, ... इत्यादि के उत्थापन से स<sub>n</sub> का चलस्पर्शी

अ<sub>०</sub> सो फि(इ<sub>१</sub>-य, इ<sub>२</sub>-य, ... इ<sub>n</sub>-य) = फि(स<sub>१</sub>, स<sub>२</sub>, ... स<sub>n</sub>) ऐसा होगा। जैसे

$$१। \quad स_१ = अ_० य^१ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३ = ०$$

इसमें यदि य के मान इ<sub>१</sub>, इ<sub>२</sub>, इ<sub>३</sub> मान लो तो इनके अन्तर का फल

फा = अ<sub>०</sub>² { (इ<sub>१</sub> - इ<sub>२</sub>)² + (इ<sub>१</sub> - इ<sub>३</sub>)² + (इ<sub>२</sub> - इ<sub>३</sub>)² }  
ऐसा हो तो १७१ वें प्रक्रम से

$$फा = १८ (अ_१² - अ_० अ_३)।$$

इसलिये मानों को उनके हरात्मक मानों में बदल देने से और अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ... इत्यादि के स्थानों में अ<sub>n</sub>, अ<sub>n-१</sub>, ... के रखने से

$$अ_०² \left\{ \frac{इ_१² (इ_२ - इ_१)²}{इ_१² इ_२² इ_३²} + \frac{इ_२² (इ_३ - इ_१)²}{इ_१² इ_२² इ_३²} + \frac{इ_३² (इ_३ - इ_२)²}{इ_१² इ_२² इ_३²} \right\}$$

$$= अ_०² \{ इ_३² (इ_२ - इ_१)² + इ_२² (इ_२ - इ_१)² + इ_१² (इ_३ - इ_२)² \}$$

$$= 12 (अ_1^2 - 1 - अ_1 अ_2 - 2) = 12 (अ_2 - अ_1 अ_2)$$

इसमें  $इ_1, इ_2, इ_3$  इनके स्थान में  $इ_1 - य, इ_2 - य, इ_3 - य$  इनके उत्थापन से

$$अ_0 \{ (इ_2 - य)^2 (इ_2 - इ_1)^2 + (इ_2 - य)^2 (इ_3 - इ_1)^2 + (इ_1 - य)^2 (इ_3 - इ_2)^2 \} = 12 (स_2^2 - स_1 स_3)$$

इसके दूसरे पक्ष में  $स_2, स_1, स_3$  इनका उत्थापन  $१२६$  प्रक्रम से देने से और लाघव के लिये  $१८$  को निकाल देने से

$$स_2^2 - स_1 स_3 = (अ_1 अ_2 - अ_2^2) य^2 + (अ_1 अ_3 - अ_1 अ_2) य + (अ_1 अ_3 - अ_3^2) यह  $स_3$  का चलस्पद्धि हुआ।$$

२। इसी प्रकार चतुर्घात समीकरण में अर्थात्  $स_4 = 0$  इस में यदि  $य$  के मान  $इ_1, इ_2, इ_3, इ_4$  हों और इन के अन्तर का फल  $= फा = अ_0$  यौ  $(इ_2 - इ_3)^2 (इ_2 - इ_4)^2$  तो १७१ वें प्रक्रम से

$फा = २४ (अ_४ अ_३ - ४ अ_४ अ_१ + ३ अ_३^२) = २४ का (१२२ प्र. देखो)।$  इसमें  $इ_1, इ_2$  इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मानों का और  $अ_0, अ_१, ...$  इत्यादि के स्थानों में उनके स्पद्धि  $अ_१, अ_१ - १ ..$  इत्यादि का उत्थापन दें तो  $फा$  ज्यों का त्यों रहता है; इसलिये यहां  $फा = फि$ , पुनः  $फि$  में  $इ_१, इ_२, ..$  इत्यादि के स्थानों में  $इ_१ - य, इ_२ - य ..$  इत्यादि के उत्थापन से भी अन्तर करने से  $इ_१, इ_२ ..$  इत्यादि के अन्तर के रहने से और  $य$  के न रहने से  $स_४$  का अवलस्पद्धि  $अ_४ अ_३ - ४ अ_४ अ_१ + ३ अ_३^२ = का$  यह होगा।

३। इसी प्रकार यदि चतुर्घात समीकरण  $स_४ = 0$  इसमें



$$\begin{aligned} \text{फा} = & \text{अ}_1^2 \{ (\text{इ}_3 - \text{इ}_1) (\text{इ}_2 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_1 - \text{इ}_2) (\text{इ}_3 - \text{इ}_4) \\ & \{ (\text{इ}_1 - \text{इ}_2) (\text{इ}_3 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_2 - \text{इ}_3) (\text{इ}_1 - \text{इ}_4) \} \\ & \{ (\text{इ}_2 - \text{इ}_3) (\text{इ}_1 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_3 - \text{इ}_1) (\text{इ}_2 - \text{इ}_4) \} \} \end{aligned}$$

$$= -\text{अ}_2 \text{अ}_3 \text{अ}_4 + 2 \text{अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3 - \text{अ}_1 \text{अ}_3^2 - \text{अ}_1^2 \text{अ}_2 - \text{अ}_1^3$$

= छा (१२२ वां प्र. देखो)

तो यहाँ स<sub>४</sub> का अचलस्पर्द्धी होगा।

२२२। चलस्पर्द्धी वा अचलस्पर्द्धी में अव्यक्त मानों के ध्रुव शक्तिक फल फा होता है और उनके अन्तर का भी यही फल होता है। इसलिये चलस्पर्द्धी का रूप

$$\frac{\text{स}}{\text{य ध्रु}} \text{फा} \left( \frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \dots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_n - \text{य}} \right) \text{ ऐसा हो सकता है जहाँ}$$

सो सोपान और ध्रु ध्रुवशक्ति का द्योनक है।

अव्यक्त के मानों के अन्तर का फल फा होने से प्रत्येक ध्रुव  $\frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}$  इत्यादि में एक जोड़ने से भी फा में भेद न होगा; इसलिये १ जोड़ने से और प्रत्येक को य से गुण और भाग देने से चलस्पर्द्धी

$$\frac{\text{स}}{\text{य ध्रु}} \text{फा} \left( \frac{\text{इ}_1 \text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{इ}_2 \text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \dots, \frac{\text{इ}_n \text{य}}{\text{इ}_n - \text{य}} \right) \text{ ऐसा होगा।}$$

जिसका लघुतम रूप

$$(-1)^{\text{धु न सो—२ धु}} \text{फा} \left( \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_1} - \text{य}}, \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_2} - \text{य}}, \dots \right)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_n} - \text{य}} \text{) ऐसा होगा जहाँ}$$

$$\text{सल} = \text{अन} \left( \frac{1}{\frac{1}{\text{य}} - \frac{1}{\text{इ}_1}}, \frac{1}{\frac{1}{\text{य}} - \frac{1}{\text{इ}_2}}, \dots, \frac{1}{\frac{1}{\text{य}} - \frac{1}{\text{इ}_n}} \right)।$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

$$\text{चलस्पद} \frac{\text{सो}}{\text{य धु}} \text{फा} \left( \frac{\text{य}}{\frac{1}{\text{इ}_1} - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\frac{1}{\text{इ}_2} - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\frac{1}{\text{इ}_3} - \text{य}}, \dots, \frac{\text{य}}{\frac{1}{\text{इ}_n} - \text{य}} \right)$$

$$= \text{सो फा} \left( \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_1} - \text{य}}, \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_2} - \text{य}}, \dots, \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_n} - \text{य}} \right)$$

यह अविकृत रहता है यदि  $\text{इ}_1, \text{इ}_2, \dots, \text{इ}_n, \text{य}$  इनके स्थान में इनके हरात्मक मानों का उत्पादन दें और  $\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n$  इनके स्थान में  $\text{अ}_n, \text{अ}_{n-1}, \text{अ}_{n-2}, \dots, \text{अ}_0$  का उत्पादन धु न सो—२ धु

दे और उत्पन्न फल को  $(-1)^{\text{य}}$  इलते गुण दें।

इसलिये यदि  $\text{म}$  घात के किसी चलस्पदों का एक

## समीकरण-सीमांसा

(का<sub>०</sub>, का<sub>१</sub>, का<sub>२</sub>, ..., का<sub>म</sub>) य, १)<sup>म</sup>... (१)

ऐसा हो तो अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..., अ<sub>न</sub>, य के स्थान में अ<sub>न</sub>

न-१, ..., अ<sub>०</sub>, य के उत्पादन से वही

(-१)<sup>य</sup> नसो-२ ध्रु (खा<sub>०</sub>, खा<sub>१</sub>, ..., खा<sub>म</sub>)(य, १)<sup>म</sup>... (२)

इस रूप का होगा। इसे (१) के साथ तुलना करते से

म=न सो-२ ध्रु, का<sub>०</sub> = (-१)<sup>ध्रु</sup> खा<sub>म</sub>, ..., का<sub>त</sub> = (-१)<sup>ध्रु</sup> खा<sub>म-त</sub>

(२) को (१) का संबद्ध कहते हैं और (१) को (२) का संबद्ध कहते हैं।

(३) से सिद्ध होता है कि यदि (१) के किसी पद का गुणक

फी (अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..., अ<sub>न</sub>) = का<sub>त</sub> हो तो इसके संबद्ध

रूप खा<sub>म-त</sub> = फी (अ<sub>न</sub>, अ<sub>न-१</sub>, ..., अ<sub>०</sub>) (-१)<sup>ध्रु</sup> यह होगा

(१) यदि अ<sub>०</sub> से फी यह अचलस्पर्द्धी हो तो इसका संबद्ध भी अचलस्पर्द्धी होगा; इसलिये म=०=नसो-२ ध्रु ∴ नसो=२ ध्रु

(२) विषमघात समीकरण के अचलस्पर्द्धी में सम सोपान रहेगा। क्योंकि (१) से यहां पर नसो=२ ध्रु ऐसा होगा। परन्तु न विषम है, इसलिये सो अवश्य सम होगा। और ध्रु न का अपवर्त्य होगा।

(३) समघात समीकरण का चलस्पद्धि भी समघात का होगा। क्योंकि न के सम होने से चलस्पद्धि का घात

$m = n$  से— $2\mu$  यह भी सम ही होगा।

(४) दो चलस्पद्धियों का प्रत्युत्पन्न भी सम ही घात का मुख्य समीकरण के पद गुणकों के रूप में होगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न के घात की संख्या यदि दोनों चलस्पद्धियों में सोपान और ध्रुवशक्ति को क्रम से से, से, 'ध्रु, ध्रु' माने तो

से (नसे'— $2\mu'$ ) + से' (नसे— $2\mu$ — $2$ (नसेसे'—सेध्रु'—से'ध्रु)  
यही होगी जो सम है।

### उदाहरण।

१। दिखलाओ कि दो समीकरणों का प्रत्युत्पन्न उन दोनों का अवलस्पद्धि है। (२१६ प्र० देखो)

२। यदि  $s = ax^2 + 2axy + y^2 = 0$  इसमें अव्यक्त मान  $a_1, a_2, a_3$  हों और  $s' = a'y^2 + 2x'y + x^2 = 0$  इसमें अव्यक्तमान  $a'_1, a'_2$  हों तो

$$(a_2 - a_3)^2 a_1 - a_1^2 (a_2 - a_3) + (a_2 - a_3)^2 (a_2 - a_1) (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)^2 (a_2 - a_1) (a_2 - a_3)$$

$(a_3 - a'_2) = 0$  इसका मान समीकरण के पद गुणकों के फल में ले आओ।

यहां १६८ वें प्रक्रम से

$$-a^2 a' k' = 6 \{ a' (k_1 - k^2) - k' (a_1 - k^2) + k' (a_1 - k^2) \}$$

२२० वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से दोनों समीकरणों का यही चलस्पदर्शी होगा ।

२२३ ।  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, १)^n = ०$  इसमें अव्यक्त मान  $इ_१, इ_२, \dots, इ_n$  हों तो

सो  $फा (इ_१, इ_२, \dots, इ_n) = फी (अ_०, अ_१, \dots, अ_n)$   
इसमें  $इ_१, इ_२, \dots, इ_n$  के स्थान में  $इ_१ - य, इ_२ - य, \dots, इ_n - य$  इत्यादि के उत्थापन देने से १२६ वें प्रक्रम से

$$\begin{aligned} \text{सो } फा (इ_१ - य, इ_२ - य, \dots, इ_n - य) \\ = फी (स_०, स_१, स_२, \dots, स_n) \end{aligned}$$

चलनकलन के ६८ वें प्रक्रम से और फी में  $य^२$  इत्यादि के छोड़ देने से

$$\begin{aligned} स_० &= अ_०, \quad स_१ = अ_१ + अ_० य, \quad स_२ = अ_२ + २ अ_१ य, \dots \\ स_n &= अ_n + न अ_{n-१} य \text{ ऐसा मानने से } \frac{ता फा}{ता इ_१} + \frac{ता फा}{ता इ_२} + \frac{ता फा}{ता इ_३} + \\ &\dots + \frac{ता फा}{ता इ_n} = \left( \frac{ता}{ता इ_१} + \frac{ता}{ता इ_२} + \dots + \frac{ता}{ता इ_n} \right) फा \\ \text{इस सङ्केत से प्रकाश करने से और } \frac{ता}{ता इ_१} + \frac{ता}{ता इ_२} + \dots \\ &+ \frac{ता}{ता इ_n} = -वि मान लेने से और \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} अ_० \frac{ता फी}{ता अ_१} + २ अ_१ \frac{ता फी}{ता अ_२} + ३ अ_२ \frac{ता फी}{ता अ_३} + \dots + \\ न अ_{n-१} \frac{ता फी}{ता अ_n} \end{aligned}$$

$$= \left( \text{अ}_0 \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_1} + २ \text{अ}_1 \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_2} + \dots + \right. \\ \left. \text{न अ}_{\text{न}-1} \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_\text{न}} \right) \text{फी और}$$

$$\text{अ}_0 \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_1} + २ \text{अ}_2 \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_2} + \dots + \\ \text{न अ}_{\text{न}-1} \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_\text{न}} = \text{वी}$$

ऐसा हां तो यदि फा<sub>०</sub> = फा (इ<sub>१</sub>, इ<sub>२</sub>, इ<sub>३</sub>, ..... इ<sub>न</sub>)

और फी<sub>०</sub> = फी (अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..... अ<sub>न</sub>)

$$\text{तो } \frac{\text{ता}}{\text{अ}_0} \left( \text{फा}_0 + \text{य वि फा}_0 + \frac{\text{य}^2}{१ \cdot २} \text{वि}^2 \text{फा}_0 + \dots \right)$$

= फी<sub>०</sub> + य वी फी<sub>०</sub> + ... ..... दोनों समीकरणों में य के गुणक मान करने से

$$\frac{\text{अ}_0 \text{ता}}{\text{वी फी}} \text{वि फा (इ}_1, \text{इ}_2, \dots \text{इ}_\text{न}) = \\ \text{वी फी (अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_\text{न})$$

यह समीकरण दिखलाता है कि फा के वि से अव्यक्त मानों के रूप में जो तद्रूप फल होगा वही फी के वी से समीकरण के पदगुणकों के रूप में आवेगा ।

फा और फी के स्थान में वि फा और वी फी के लेने के रूपर ही की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि वि<sup>२</sup>फा = वी<sup>२</sup>फी, इत्यादि उत्पन्न होंगे ।

यदि वि  $\text{फा} = 0$  तो  $\text{फा}$  इत्यादि भी शून्य होंगे; इसलिये ऐसी स्थिति में

$\text{फा}$  ( $\text{इ}_1 - \text{य}$ ,  $\text{इ}_2 - \text{य}$ , ....  $\text{इ}_n - \text{य}$ ) इसमें  $\text{य}$  का नाश हो जायगा, परन्तु  $\text{य}$  का न रहना तभी समभव है जब कि  $\text{फा}$  ( $\text{इ}_1$ ,  $\text{इ}_2$ ,  $\text{इ}_3$ , ....  $\text{इ}_n$ ) यह अव्यक्तमानों के अन्तर का फल हो।

इस पर से सिद्ध होता है कि यदि अ. <sup>सो</sup>  $\text{फा} = \text{वी फी} = 0$

वा अ. <sup>सो</sup>  $\text{वी फी} = 0$  तो कहेंगे कि अव्यक्तमानों के उत्तर का फल यह  $\text{फा}$  है। जैसे

### उदाहरण

१। अव्यक्तमानों के अन्तर के उस फल का मान बताओ जिसमें सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तीन हैं।

मान लो कि वह फल  $= \text{फ} = \text{आ अ}_1 \text{अ}_2 + \text{का अ}_1 \text{अ}_2 + \text{खा अ}_1$  (१६६ प्र० देखो)।

तो वी  $\text{फ} = (\text{३आ} + \text{का}) \text{अ}_1 \text{अ}_2 + (\text{२का} + \text{३खा}) \text{अ}_1 \text{अ}_2 = 0$

इसलिये  $\text{३आ} + \text{का} = 0$ ।  $\text{२का} + \text{३खा} = 0$ ।

यदि मान लो कि  $\text{अ} = १$  तो  $\text{का} = -३$ ,  $\text{खा} = २$ । इनके उत्थापन से

$\text{फअ} = \text{० अ}_1 - ३ \text{अ}_1 \text{अ}_2 + २ \text{अ}_2$ ।

यदि  $\text{अ}_1 \text{अ}_2 + ३ \text{अ}_1 \text{अ}_2 + ३ \text{अ}_2 \text{अ}_1 + \text{अ}_1 = 0$ ..... (१)

इस पर से ३८ वें प्रश्न की युक्ति से एक ऐसा नया समी-

करण बनाओ जिसमे दूसरा एद न रहे तों वह समीकरण

$$r^2 + \frac{3}{a_2^2} (a_0 a_2 - a_1^2) r + \frac{1}{a_2^2} (a_0^2 a_1 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) \dots \dots (2)$$

देता होगा। इसमें यदि

$a_0 a_2 - a_1^2 = 0$  और  $a_0^2 a_1 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 = 0$   
तो ऊपर जो फू आया है वह गा के तुल्य ही है। ऊपर के  
घन समीकरण में यदि  $a_0 r = l$  तो  $r = \frac{l}{a_0}$ , इसके उत्थापन से

$$\frac{l}{a_0^3} + \frac{3}{a_0^3} l a_2 + \frac{1}{a_0^3} l^2 = 0 \quad \text{वा } l^3 + 3 l a_2 + a_1 = 0 \dots (3)$$

हा और गा ये घन समीकरणों में बड़े उपयोगी हैं।

२२४। २.१ वें प्रक्रम से सन का चलस्पष्टी फी ( $s_n, s_{n-1}, \dots, s_0$ ) यह है जिसे यदि फी कहें और जब  $y=0$  तब फी को  $फी_0 = फी$  ( $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ ) कहें और ऊपर के प्रक्रम का सङ्केत वी ग्रहण करें जिसका नाम कारक कहो तो चलमकलन से और वी कारक से

$$फी = फी_0 + y वी फी_0 + \frac{y^2}{2!} वी^2 फी_0 + \dots + \frac{y^n}{n!} वी^n फी_0 + \dots$$

यहां  $फी_0$  का बार बार वी लेने से मान बदलता बदलता जब  $फी$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$ ) ऐसा होगा तब यह अव्यक्त



के मानों का अन्तर होगा। २२३ वें प्रक्रम की युक्ति से फिर आगे इसका वी शून्यके तुल्य होगा और फी के श्रेढी रूप मान में आगे के सब पद उड़ जायँगे। इसका मान फी (६, ६, ... .. ६) के वि कारक से जान सकते हैं। जैसे

### उदाहरण

१।  $अ_०य^१ + ३अ_०य^२ + १अ_२य + अ_१ = ०$  इसमें यदि  $अ_०अ_१ - अ_२ = ६$  और १२० वें प्रक्रम के उदाहरण को लेने से

$$अ_०यौ ६ (६ - ६)^२ = १८ (अ_२ - अ_१अ_१)$$

तो यहां फि\_० =  $अ_०यौ ६ (६ - ६)^२ = फी_०$

$$= १८ (अ_२ - अ_१अ_१) = फी_०$$

बायें पक्ष का वि और दहिने पक्षका वी लेने से

$$-अ_०यौ २६ (६ - ६)^२ = १८ (अ_१अ_२ - अ_०अ_१) = बीफी_०$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से

$$(अ_०यौ १ (६ - ६)^२ = ३६ (अ_१ - अ_०अ_२) = बी^२फी_०$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से दोनों पक्ष शून्य के तुल्य होंगे। इनका उत्थापन फी में देने से और -१८ का भाग दे देने से

$$(अ_१अ_१ - अ_२^२) + (अ_०अ_१ - अ_१अ_२)य + (अ_०अ_२ - अ_१^२)य^२$$

यह चलस्पद्धी का रूप हुआ जो कि १२० वें प्रक्रम के उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। देखो ऊपर के चलस्पद्धी के  $य^२$  का गुणक ६ है और ६ का वी शून्य होता है; इसलिये ६ को

प्रधान गुणक कहते हैं। इसी प्रधान हा से फी ( $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ) यह बना है। इसी में  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  इत्यादि के स्थान में इनके स्पर्द्धी  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  इत्यादि के उत्थापन से फी बनता है। फिर फी में  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  इत्यादि के स्थान में  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  इत्यादि के उत्थापन से चलस्पर्द्धी का रूप होता है।

२।  $\alpha_0 y^4 + 4 \alpha_1 y^3 + 6 \alpha_2 y^2 + 4 \alpha_3 y + \alpha_4 = 0$  इस चतुर्घात समीकरण का वह चलस्पर्द्धी बनाओ जिसमें प्रधान गुणक हा हो।

हा  $= \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2$ , और चलस्पर्द्धी चतुर्घात का समीकरण होगा। क्योंकि यहा सो  $= 2$  और ध्रु  $= 2$ ; इसलिये  $2 \times 2$  वे प्रक्रम से  $m = n$  सो  $-2$  ध्रु  $= 4 \times 2 - 2 \times 2 = 4$ ।

$\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$  इनके स्थान में इनके स्पर्द्धी  $\alpha_4, \alpha_2, \alpha_0$  के उत्थापन से

$$\text{फी}_0 = \alpha_4 \alpha_2 - \alpha_0^2$$

$$\text{वी फी}_0 = 2 \alpha_1 \alpha_4 - 4 \alpha_2 \alpha_3 - 4 \alpha_4 \alpha_2 - 2 \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_4$$

$$\begin{aligned} \text{वी}^2 \text{फी}_0 &= 2 (\alpha_0 \alpha_4 - 2 \alpha_1 \alpha_3 - 3 \alpha_2^2 + 4 \alpha_3 \alpha_1) \\ &= 2 (\alpha_0 \alpha_4 + 2 \alpha_1 \alpha_3 - 3 \alpha_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{वी}^3 \text{फी}_0 &= 2 (4 \alpha_0 \alpha_3 + 2 \alpha_0 \alpha_3 - 12 \alpha_1 \alpha_2 + 6 \alpha_1 \alpha_2) \\ &= 4 (3 \alpha_0 \alpha_3 - 3 \alpha_1 \alpha_2) = 12 (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{वी}^{\text{४}} \text{फी}_0 &= 12(3 \text{अ}_0 \text{अ}_2 - 2 \text{अ}_1^2 - \text{अ}_0 \text{अ}_2) \\ &= 24 (\text{अ}_0 \text{अ}_2 - \text{अ}_1^2) \end{aligned}$$

इनके उत्थापन से चलस्पद्धी

$$(\text{अ}_0 \text{अ}_2 - \text{अ}_1^2) \text{य}^{\text{४}} + 2(\text{अ}_0 \text{अ}_3 - \text{अ}_1 \text{अ}_2) \text{य}^{\text{३}} + (\text{अ}_0 \text{अ}_4 + 2 \text{अ}_1 \text{अ}_3 - 3 \text{अ}_2^2) \text{य}^2$$

$$+ 2(\text{अ}_1 \text{अ}_4 - \text{अ}_2 \text{अ}_3) \text{य} + (\text{अ}_2 \text{अ}_4 - \text{अ}_3^2) = 0$$

२२५। कल्पना करो कि  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n)$   $(\text{य}, \text{र})^n$  के दो चलस्पद्धी

$$(\text{का}_1, \text{का}_1, \text{का}_2, \dots, \text{का}_n) (\text{य}, \text{र})^p \equiv \text{का}_0 (\text{य} - \text{का}_1 \text{र}) (\text{य} - \text{का}_2 \text{र}) \dots \text{य} - \text{का}_n \text{र}$$

$$\text{और } (\text{खा}_0, \text{खा}_1, \text{खा}_2, \dots, \text{खा}_n) (\text{य}, \text{र}) \equiv \text{खा}_0 (\text{य} - \text{खा}_1 \text{र}) (\text{य} - \text{खा}_2 \text{र}) \dots (\text{य} - \text{खा}_n \text{र}) \text{ है तो}$$

$$\begin{aligned} \text{का}_0 \text{का}_1 \text{र} + \text{पका}_1 \text{का}_1 \text{य}^{-1} \text{र} + \frac{\text{प}(\text{प}-1)}{2!} \text{का}_2 \text{का}_1 \text{य}^{-2} \text{र}^2 + \\ \dots + \text{का}_p \text{र}^p = 0 \end{aligned}$$

र का भाग दे देने से

$$\begin{aligned} \text{का}_0 \text{का}_1 + \text{पका}_1 \text{का}_1 \text{य}^{-1} + \frac{\text{प}(\text{प}-1)}{2!} \text{का}_2 \text{का}_1 \text{य}^{-2} + \dots + \text{का}_p = 0 \dots (1) \end{aligned}$$

२२३ वे प्रक्रम की युक्ति से  $\text{का}_0, \text{का}_1, \dots, \text{का}_p$  को मुख्य समीकरण  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_n) (\text{य}, \text{र})$  के अव्यक्त मानों के फल

होने से  $\text{विका}_0 = 0$ ,  $\text{पविका}_1 = \text{पका}_1 \frac{p(p-1)}{2!}$   $\text{विका}_2 = \text{पका}_2 (p-1)$

सलिये

$$\text{वि} \left\{ \text{का}_0 \text{कत}^{p-1} + \text{पका}_1 \text{कत}^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!} \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} + \dots + \text{का}_p \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \text{पका}_0 \text{कत}^{p-1} \text{विकत} + \text{पका}_1 \text{कत}^{p-2} + \\ &+ (p-1) \text{का}_1 \text{कत}^{p-2} \text{विकत} + p(p-1) \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} + \dots \\ &= \text{पका}_0 \text{कत}^{p-1} (1 + \text{विकत}) + \{p(p-1) \text{का}_1 \text{कत}^{p-2}\} \\ &\quad (1 + \text{विकत}) + \dots \end{aligned}$$

$$p \left\{ \text{का}_0 \text{कत}^{p-1} + (p-1) \text{का}_1 \text{कत}^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2!} \right\}$$

$$\times \text{का}_2 \text{कत}^{p-3} + \dots + \text{का}_{p-1} \text{कत}^1 \} (1 + \text{विकत}) = 0$$

$$\text{इसलिये विकत} + 1 = 0 \quad \therefore \text{वि कत} = -1$$

$$\text{इसी प्रकार वि खथ} + 1 = 0 \quad \text{विखथ} = -1$$

$$\therefore \text{वि (कत - खथ)} = 0$$

परन्तु  $\text{कत} - \text{खथ}$  का वि तमी शून्य होगा जब  $\text{कत} - \text{खथ}$  यह मुख्य समीकरण के मानों के अन्तर का फल होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि

दो चलस्पद्धियोंआवेक्य मानों के अन्तर का फल

मुख्य समीकरण के अव्यक्त मानों के अन्तरों का फल होगा।

२२६। वर्णान्तर के उत्थापन से स<sub>n</sub> का मान जो स'<sub>n</sub> होता है उसका अचलस्पर्द्धी स<sub>n</sub> के अचलस्पर्द्धी को  $\left| \begin{array}{cc} द & त \\ द' & त' \end{array} \right|$  इस कनिष्ठफल के ध्रु घात से गुण देने से होता है।

कल्पना करो कि स<sub>n</sub> के  $y = \frac{द'य' + त}{द'य' + त'}$  ऐसा मान कर समी-

करण का रूपान्तर किया और स<sub>n</sub> का अचलस्पर्द्धी

$$अ = अ_0 \text{ से } (इ_1 - इ_2) (इ_2 - इ_3) \text{ के } \dots (इ_1 - अ_n)^2$$

जहाँ प्रत्येक अव्यक्त मान के से तुल्य परमघात आए हैं।  
तो रूपान्तर किए हुए समीकरण को से'<sub>n</sub> कहे तो इसमें किसी दो अव्यक्त इ'<sub>ध</sub> और इ'<sub>ध</sub> के मान ऊपर के य मान से जो

$$य' = \frac{त'य - त}{द - द'य} \text{ यह सिद्ध होता है उसमें उत्थापन देने से}$$

$$इ'_{ध} = \frac{त'इ_{ध} - त}{द - द'इ_{ध}}, \quad इ'_{ध} = \frac{त'इ_{ध} - त}{द - द'इ_{ध}}$$

$$\therefore इ'_{य} - इ'_{ध} = \frac{(द'य' - द'त) (इ_{ध} - इ'_{ध})}{(द - द'इ_{य}) (द - द'इ_{ध})}$$

और स'<sub>n</sub> = अ<sub>0</sub> (य' - इ'<sub>१</sub>) (य' - इ'<sub>२</sub>) ..... (य' - इ'<sub>n</sub>)  
(यदि अभिन्न में रूप बनाओ तो)

$$जहाँ अ_0 = अ_0 (द - द'इ_१) (द - द'इ_२) \dots (द - द'इ_n)$$

अब यदि इ'य-इ'घ इसमें थ और घ के स्थान में १, २, २, ३ इत्यादि के उत्थापन से स'न का अचलस्पर्द्धी आ' बनाओ और अ० के स्थान में अ'० का उत्थापन दो तो हर के उड़ जाने से

आ'=(दत'-द'क)ध्रु आ .....(१)

ऐसा होगा ।

इसी प्रकार यदि स का चलस्पर्द्धी

फी (य)=अ०<sup>सो</sup> यौ (इ<sub>१</sub>-इ<sub>२</sub>)अ(इ<sub>२</sub>-इ<sub>३</sub>)क... ..  
(य-इ<sub>१</sub>)<sup>प</sup>(य-इ<sub>१</sub>)<sup>व</sup>

जो कि फी (य) के आधार अव्यक्त मानोंके फल फीमें इ<sub>१</sub>, इ<sub>२</sub>, . . इन इत्यादि के स्थान में—य+इ<sub>१</sub>, -य+इ<sub>२</sub>, .. ....  
-य+इ<sub>३</sub> के उत्थापन से उत्पन्न हुआ है । (२१ वाँ प्र० देखो)

तो स' का चलस्पर्द्धी=(दत'-द'त)ध्रु फी (य) होगा । क्योंकि ऊपर की युक्ति से जब फी (य) के आधार फल फि में इ'१, इ'२,.....इत्यादि का उत्थापन दोगे तो हर में

(द-द'इ<sub>१</sub>), (द-द'इ<sub>२</sub>).....(व-द'इ<sub>३</sub>) इसका तो घात रहेगा जो अ०<sup>सो</sup> इस गुणक के कारण नाश हो जायगा । केवल गुणक अ०<sup>नो</sup> यह रह जायगा और (दत'-द'त) का ध्रु घात गुणक होगा । २२४ वे प्रकरण में फी० के बी से जो चलस्पर्द्धी आया है उस से भी यही लिख होता है ।

२२७। यदि

$$s_n = a_0 y^n + n a_1 y^{n-1} r + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 y^{n-2} r^2 + \dots$$

+  $a_n r^n$ 

ऐसा ध्रुवशक्तिक फल हो तो

$$\frac{dy' + t}{d'y' + t'r'} = y \text{ इसके स्थान से } s_n \text{ को अभिन्न करने के लिये}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{dy' + nr'}{d'y' + t'r'} = \frac{dl' - t}{d'l' + t'} \text{ ऐसा मानना चाहिये}$$

जहाँ  $y = dy' + tr'$  और  $r = d'y' + t'r'$  और

$$s_n = r^n (a_0 l^n + n a_1 l^{n-1} r + \dots + a_n)$$

$$= (d'y' + t'r')^n \left\{ \frac{a_0 (dy' + tr')^n}{(d'y' + t'r')^n} + \frac{n a_1 (dy' + tr')^{n-1}}{(d'y' - t'r')^{n-1}} \right.$$

$$\left. + a_0 (dy' + tr')^n + n a_1 (dy' + tr')^{n-1} (d'y' + t'r') + \dots \right\}$$

इस पर से कह सकते हो कि एक अव्यक्त के फलों को दो वर्णान्तरों के ध्रुवशक्तिक फलों के रूप में बदल सकते हैं।

अर्थात् यदि  $s = a_0 y \times n a_1 y^{n-1} r + \dots + r$  इसका अचलस्पर्द्धी आ हो और  $y = \frac{dy' + tr'}{d'y' + t'r'}$  ऐसा मान कर उत्थापन से  $s'$  का अचलस्पर्द्धी आ' बनाओ तो

$आ' = (दत' - द'त) \frac{ध्रु}{}$  आ इसमें  $t$  और  $t'$  के स्थान में  $t$  और  $t'r$  के उत्थापन से

$\Delta' = (\text{द'त}' - \text{द'त}) \frac{\Delta}{r} \Delta$  ऐसा होगा ।

$$\Delta_n = r^n (\Delta_0 \Delta_n + n \Delta_1 \Delta_n^{n-1} + \dots + \Delta_n) = 0$$

तो  $r^n$  के अपवर्त्तन से  $\Delta_0 \Delta_n + n \Delta_1 \Delta_n^{n-1} + \dots + \Delta_n = r$   
इसमें  $\Delta$  के वै ही मान होंगे जो  $\Delta_0 \Delta_n + n \Delta_1 \Delta_n^{n-1} + \dots + \Delta_n = 0$  इसमें होंगे ; इसलिये

$(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n) (y, 1)^n$  इसका जो अवलम्ब है होगा  
वही  $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n) (\Delta, 1)^n$  इसका अवलम्ब होगा :

$(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) (y, 1)^n$  इसके  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$   
के मानों के गुणित तुल्य मान  $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n) (y, 1)^n$   
इसके होंगे । इसलिये इसका अवलम्ब पहिले अवलम्ब  
को  $r \Delta$  इससे गुण देने से होगा ।

$$\Delta_0 \Delta_n + n \Delta_1 \Delta_n^{n-1} + \dots + \Delta_n = 0 \quad \text{इसमें } \Delta = \frac{y}{r} \text{ के}$$

स्थान में  $\frac{\Delta y' + r \Delta'}{\Delta y + r \Delta'}$  अर्थात्  $y$  के स्थान में  $\Delta y' + r \Delta'$  का  
और  $r$  के स्थान में  $\Delta y + r \Delta'$  का उत्पादन देने से इस  
नये समीकरण का अवलम्ब  $= (\text{द'त}' - \text{द'त}) \frac{\Delta}{r} \Delta$  जहाँ  
 $\Delta_0 \Delta_n + n \Delta_1 \Delta_n^{n-1} + \dots + \Delta_n$  का अवलम्ब  $\Delta$  है ।  
इससे नीचे लिखी बातें सिद्ध होती हैं :—

(१) किसी बहुपद अव्यकराशि का अवलम्ब पदों के  
गुणकों का ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं को व्यक्ता  
गुणित युत वर्णान्तरों से उत्पादन दें तो नये समीकरण के  
पद गुणकों का वैसा ही फल, पहिले फल को  $\text{द'त}' - \text{द'त}$  इसके



एक कोई घात ध्रु से गुण देने से जो गुणनफल होगा उसके तुल्य होगा ।

(२) चलस्पृष्टी बहुपद अव्यक्तराशि के पदों के गुणकों का और अव्यक्तों का एक ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं के स्थान में व्यक्ताङ्कगुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दे' तो इसमें उसी फल के ऐसा पद गुणकों का और नये अव्यक्त राशिओं का जो फल हो वह पूर्वफल को दत् - द'त के ध्रु घात से गुण देने से जो हो उसके तुल्य होगा ।

दत् - द'त इसे समीकरणों के परिपत्तिन का मध्यस्थ कहते हैं ।

### उदाहरण

१ । यदि  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$  और  $अय^२ + २कय + खर^२ = आया^२ + २कायारा + खारा^२$  तो पहिले का अवचल-स्पृष्टी अल - क<sup>२</sup> यह होगा, क्योंकि २२२वें प्रक्रम के पहिले उदाहरण में यही हा है और हा का वी शून्य होता है । इसलिये ऊपर (१) नियम से ध्रुवशक्ति दो होने से  $आखा - का^२ = (दत, - द'त)^२ (अल - क^२)$  ऐसा होगा ।

२ ।  $(अ, क, ख, ग, घ) (य, र)^४ = (आ, का, खा, गा, घा) (या, रा)^४$

जहां  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$  ।

यहां २१० प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से पहिले का अवचल-स्पृष्टी अघ - ४कग + ३ख<sup>२</sup> यह है और ध्रु = ४ और मध्यस्थ =  $(दत, - द'त)$ ,

इसलिये  $आघा - ४कागा + ३खा^२ = (दत, - द'त)^४$

$\times (अघ - ४कग + ३ख^२)$

३। दूसरे उदाहरण में २२० प्रक्रम के तीसरे उदाहरण से अखघ + २कखग - अग<sup>२</sup> - क<sup>२</sup>घ - ख<sup>३</sup> यह भी पहिले का अचलरूपर्द्धी है जहां ध्रु = ६ ; इसलिये

$$\begin{aligned} & \text{आखाघा} + २काखागा - आगा<sup>२</sup> - का<sup>२</sup>घा - खा<sup>३</sup> \\ & = (दत, - द, त)^३ (अखघ + २कखग - अग<sup>२</sup> - क<sup>२</sup>घ - ख<sup>३</sup>) \end{aligned}$$

४। ऊपर ही के रूपान्तर से यदि

$$\text{अप<sup>२</sup> + २कयर + खर<sup>२</sup> = आया<sup>२</sup> + २कायारा + खारा<sup>२</sup> ..... (१)}$$

$$\begin{aligned} \text{अ, य<sup>२</sup> + २क, यर + ख, र<sup>२</sup> = आ, या<sup>२</sup> + २का, यारा} \\ + \text{खा, रा<sup>२</sup> ..... (२)} \end{aligned}$$

तो (१) में ६ गुणित (२) को जोड़ देने से

$$\begin{aligned} & (\text{अ} + ६\text{अ,})\text{य<sup>२</sup> + २(क + ६क, यर + (ख + ६ख, )र<sup>२२</sup> + २(का + ६का, )यारा + (खा + ६खा, )रा<sup>२</sup>$$

(१) उदाहरण सं

$$\begin{aligned} & \{दत, - द, त\}^३ \{(\text{अ} + ६\text{अ,})(\text{ख} + ६\text{ख,}) - (\text{क} + ६क, )^२\} \\ & = (\text{आ} + ६\text{आ,})(\text{खा} + ६\text{खा,}) - (\text{का} + ६का, )^२ \end{aligned}$$

दोनों पक्षों में ६ के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$\begin{aligned} \text{आखा,} + \text{अ, खा} - २काका, & = (दत, - द, त)^२ \\ & \times (\text{अख,} + \text{अ, ख} - २कक, ) \end{aligned}$$

और आ, खा, - का<sup>२</sup> = (दत, - द, त)<sup>२</sup>(अ, ख, - क<sup>२</sup>) जो कि प्रथम उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है।

५। अय<sup>२</sup> + क<sup>२</sup> + खल<sup>२</sup> + २फल + २गयल + २हयर इस ध्रुव शक्ति समीकरण में य = द, या + त, रा + थ, का, र = द, या +

त<sub>१</sub>रा + थ<sub>२</sub>ला और ल = द<sub>१</sub>या + त<sub>१</sub>रा + थ<sub>१</sub>ला ऐसे मानों से समीकरण को बदलने से यदि समीकरण का रूपान्तर आया<sup>२</sup> + कारा<sup>२</sup> + खाला<sup>२</sup> + २फाराख + २गाणख + २हायाह ऐसा हो तो सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline द_१ & द_२ & द_३ & २ \\ \hline त_१ & त_२ & त_३ & \\ \hline थ_१ & थ_२ & थ_३ & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline अ & ह & ग \\ \hline ह & क & फ \\ \hline ग & क & ख \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline आ & हा & गा \\ \hline दा & का & फा \\ \hline गा & फा & खा \\ \hline \end{array}$$

पहिले समीकरण में अव्यक्त के नये मानों का उत्थापन देकर गुणकों का परस्पर सम्बन्ध जान कर ऊपर के कनिष्ठ-फलों की समता सहज में जान सकते हो। इससे यह भी जान पड़ता है कि दिए हुए तीन अव्यक्त सम्बन्धी समीकरणों का

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline अ & ह & ग \\ \hline ह & क & फ \\ \hline ग & क & ख \\ \hline \end{array} \text{ यह अचलस्पर्द्धी है।}$$

२२८—यदि  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, र)^n = स_n$  इसमें  $य = या + चरा$ ,  $य = ०या + रा$  तो  $स_n$  का रूपान्तर  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (या, रा)^n$  ऐसा होगा जहाँ १२६वें प्रक्रम से  $आ_० = अ_०$ ,  $आ_१ = अ_१ + अ_०च$ ,  $आ_२ = अ_२ + २अ_१च + अ_०च^२$ , इत्यादि।

अब यदि  $स_n$  का चलस्पर्द्धी फी  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$  यह हो तो १२६वें प्रक्रम के (२) नियम से मध्यस्थ दत्त - दत्त के १ के तुल्य होने से

$$\begin{aligned} & \text{फी } (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n, य, र) \\ &= \text{फी } (आ_०, आ_१, आ_२, \dots, आ_n, या, रा) \\ &= \text{फी } (आ_०, आ_१, आ_२, \dots, आ_n, य - चर, र) \end{aligned}$$

दहिने पक्ष का रूप चलनकलन के द्वां प्रक्रम से च के घात वृद्धि में ले आने से

$$फी = फी + च(वीफी - \frac{ताफी}{ताय} + हा_2 च^2 + हा_3 च^3 + \dots)$$

अहां हा\_2, हा\_3, इत्यादि च^2, च^3 इत्यादि के गुणक हैं।

च के किसी मान में यह समीकरण ठीक होगा। इसलिये फी को दोनों पक्षों में घटाकर च का भाग देकर लब्धि में च को शून्य मानने से वीफी - \frac{ताफी}{ताय} = 0

$$\therefore \frac{ताफी}{ताय} = वीफी = अ_0 \frac{ताफी}{ताअ_1} + अ_1 \frac{ताफी}{ताअ_2} + अ_2 \frac{ताफी}{ताअ_3} + \dots + अ_{n-1} \frac{ताफी}{ताअ_n} \dots (1)$$

यदि फी को (का\_0, का\_1, का\_2, का\_3, ..... का\_m) (य, र)^m ऐसा कल्पना करें तो

$$\frac{ताफी}{ताय} = मका_0 य^{म-1} + म(म-1) का_1 य^{म-2} र + \dots + मका_{m-1} र^{m-1}$$

$$= वीफी = वीका_0 य^म + मवीका_1 य^{म-1} र + \dots + वीका_{m-1} र^म$$

य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$वीका_0 = 0, वीका_1 = का_0, वीका_2 = मका_1, \dots, वीका_m = मका_{m-1}$$

यही बात २२३वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुई है।

यदि ऊपर के स<sub>n</sub> के मान में  $y = ०या + ११, २ = या + ०१$  ऐसा मानें तो यहां मध्यस्थ - १ होगा और  $(अ_०, अ_१, \dots, अ_n)$   $(य, १)^n = (अ_n, अ_{n-१}, \dots, अ_०) (या, १)_n$  और तब स<sub>n</sub> का चलस्पर्द्धी

$$\begin{aligned} (-१)^{\text{ध्रु}} \text{फी}(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n, य, १) \\ = \text{फी}(अ_n, अ_{n-१}, \dots, अ_०, या, १) \\ = (-१)^{\text{ध्रु}} \text{फी}(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n, १, या) \end{aligned}$$

इस पर से सिद्धि होता है कि

चलस्पर्द्धी के आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक, संख्या में समान होंगे (यदि ध्रु विषम होगा तो विरुद्ध चिन्ह के होंगे)।

यदि किसी एक मान में  $अ_०, अ_१$  इत्यादि के स्थान में उनके स्पर्द्धी  $अ_n, अ_{n-१}$  इत्यादि रख दिए जायं। १ के स्थान में  $y$  और  $y$  के स्थान में १ को रख देने से और  $अ_०, अ_१, \dots$  इत्यादि के स्थान में  $अ_n, अ_{n-१}$  इत्यादि के ग्रहण करने से (१) समीकरण से

$$\begin{aligned} y \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } १} &= अ_n \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } अ_{n-१}} + १अ_{n-१} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } अ_{n-२}} + १अ_{n-२} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } अ_{n-३}} \\ &+ \dots + १अ_१ \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } अ_०} \end{aligned}$$

यदि स<sub>n</sub> का फी(अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..., अ<sub>n</sub>) यह अचलस्पर्द्धी हो तो ऊपर जो  $y$  और १ के परिवर्तन से नया स<sub>n</sub> = स'<sub>n</sub> ऐसा बनेगा, उसको अचलस्पर्द्धी, मध्यस्थ का मान एक होने से

२२५ प्रक्रम के (१) समीकरण से  $s'_n$  और  $s_n$  के अचल-स्पष्टिओं में

फी  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{फी}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n)$   
 ऐसा समीकरण बनेगा ।

और ऊपर के (१) समीकरण से अब

$$\alpha_0 \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_1} + 2\alpha_1 \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_2} + 3\alpha_2 \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_3} + \dots + n\alpha_{n-1} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_n} = 0$$

$$\alpha_n \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_{n-1}} + 2\alpha_{n-1} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_{n-2}} + 3\alpha_{n-2} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_{n-3}} + \dots + n\alpha_1 \frac{\text{ताफी}}{\text{ता}\alpha_0} = 0$$

और  $s'_n$  में यदि  $y = \alpha$ ,  $r = \alpha$  तो मध्यस्थ का मान  $-1$  होगा; इसलिये तब दोनों के अचलस्पष्टिओं में

$$\text{फी}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0) = (-1)^n \text{फी}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

इससे सिद्ध हाता है कि

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  इत्यादि के स्थान में यदि  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}$  इत्यादि का उत्पादन दें तब जो  $s'_n$  होगा उसका अचलस्पष्टि  $s_n$  के अचलस्पष्टि के समान ही होता है । जब  $\alpha$  विषम होता है तब केवल दोनों, संख्या में तुल्य, विरुद्ध चिन्ह के होंगे ।

२२९—इस प्रक्रम में चलस्पद्धी और अचलस्पद्धियों के विषय में जो कुछ लिख आए हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण किया समेत दिखाताते हैं।

### उदाहरण

१।  $s_2 = a_0 y^2 + 2a_1 y + a_2 = 0$  इसमें अव्यक्त मान  $d_1, d_2$  हों तो सिद्ध करो कि किसी वर्ग समीकरण में एक ही प्रधान अचलस्पद्धी होता है और चलस्पद्धी उस वर्ग समीकरण को छोड़ कर और कोई नहीं होता।

$$\text{यहां } s_2 = a_0(y - d_1)(y - d_2)$$

$$\text{और } d_1 - d_2 = 2\sqrt{\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}}$$

इसलिये यहाँ अचलस्पद्धी वा चलस्पद्धी  $(d_1 - d_2)^{2p}$  इस रूप से होगा क्योंकि अव्यक्त के मानान्तर का विषम घात समीकरण के पद गुणकों का अकरणयोगत फल नहीं होता। इसलिये  $(d_1 - d_2)^{2p}$  इसमें  $d_1, d_2$  के स्थान में  $d_1 - y, d_2 - y$  के उत्थापन से और भिन्न को दूर करने के लिये  $s_2^p$  से गुण देने से स्पद्धी का रूप  $s_2^p \left( \frac{1}{d_1 - y} - \frac{1}{d_2 - y} \right)^{2p}$

$$= \frac{a_0^{2p}(d_2 - d_1)^{2p}}{(d_1 - y)^{2p}(d_2 - y)^{2p}} (d_1 - y)^{2p}(d_2 - y)^{2p}$$

$$= a_0^{2p}(d_2 - d_1)^{2p} = 2^{2p} a_0^{2p} (a_1^2 - a_0 a_2)^p$$

स्थिर गुणकों को हटा देने से अचलस्पद्धी  $\text{अ.अ.} - \text{अ.}^2$  यह होगा ।

इसके घात  $y$  के तुल्य जो ऊपर अचलस्पद्धी है वह इसी से बना है । इसलिये प्रधान अचलस्पद्धी  $\text{अ.अ.} - \text{अ.}^2$  यही होगा और यदि  $\text{फी.} = \text{अ.}$  तो  $223^{\text{वें}}$  प्रक्रम से  $\text{फी.} = \text{अ.}$ ,  $\text{बीफी.} = 2\text{अ.}$ ,  $\text{वी}^2\text{फी.} = 2\text{अ.}$  । इसलिये  $s_2$  का चलस्पद्धी  $\text{फी} = \text{फी.} + y \text{ बीफी.} + \frac{y^2}{1.2} \text{ वी}^2\text{फी.} = \text{अ.} + 2\text{अ.}y + \text{अ.}y^2$ , यह  $s_2$  ही है ।

२। घन समीकरण में चलस्पद्धियों के रूपों को बताओ, जहाँ  $s_2 = \text{अ.}y^3 + 2\text{अ.}y^2 + 2\text{अ.}y + \text{अ.} = 0$  और अव्यक्त मान  $इ_1, इ_2, इ_3$  हैं ।

यहाँ अव्यक्त के कोई दो मान  $इ_1$  और  $इ_2$  के अन्तर  $इ_1 - इ_2$

में  $\frac{1}{इ_1 - y}, \frac{1}{इ_2 - y}$  इनके उत्थापन से

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{इ_1 - y} - \frac{1}{इ_2 - y} &= \frac{इ_2 - इ_1}{(y - इ_1)(y - इ_2)} \\ &= \frac{-(इ_2इ_3 + इ_1y) + (इ_1इ_3 + इ_2y)}{(y - इ_1)(y - इ_2)(y - इ_3)} \end{aligned}$$

भिन्न को हटाने के लिये  $s_2$  से गुण देने से

$\text{अ.}\{-(इ_2इ_3 + इ_1y) + (इ_1इ_3 + इ_2y)\}$  ऐसा होगा । यहाँ बृहत्कोष्ठकान्तर्गत जो राशि है वह देखो  $इ_1 - इ_2$  इसमें



—इ<sub>१</sub>, और इ<sub>२</sub> के स्थान में इ<sub>२</sub>इ<sub>१</sub> + इ<sub>१</sub>य और इ<sub>१</sub>इ<sub>१</sub> + इ<sub>२</sub>य के उत्थापन से बनी है। इसी इकार इ<sub>२</sub>—इ<sub>१</sub> इसमें भी —इ<sub>१</sub> के स्थान में इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> + इ<sub>१</sub>य और इ<sub>२</sub> के स्थान में ऊपर जो लिख आए हैं उनके उत्थापन से तत्सम्बन्धी ऊपर का फल बन जायगा। इसलिये घन समीकरण के चलस्पद्धिओं के लिये —इ<sub>१</sub>, —इ<sub>२</sub> और —इ<sub>१</sub> इनके स्थान में ऊपर की राशिओं का बत्थापन दे सकते हैं।

( १ ) यदि अव्यक्त मानों के अन्तर का फल हा वा गा हो ( २२२ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो ) तो सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तुल्य होंगे। और अ<sub>०</sub> यौ (इ<sub>१</sub>—इ<sub>२</sub>)<sup>२</sup>

$$= २अ<sub>०</sub><sup>२</sup> (इ<sub>१</sub><sup>२</sup> + इ<sub>२</sub><sup>२</sup> + इ<sub>३</sub><sup>२</sup> - इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> - इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub>)$$

$$\therefore अ<sub>०</sub><sup>२</sup> (इ<sub>१</sub><sup>२</sup> + इ<sub>२</sub><sup>२</sup> + इ<sub>३</sub><sup>२</sup> - इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> - इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub>)$$

$$= अ<sub>०</sub><sup>२</sup> (इ<sub>१</sub> + घाइ<sub>२</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>३</sub>) (इ<sub>१</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>२</sub> + घाइ<sub>३</sub>)$$

$$= ६(अ<sub>१</sub><sup>२</sup> - अ<sub>०</sub>अ<sub>२</sub>)$$

जहां घा, घा<sup>२</sup>, १ के घनमूल हैं।

चलस्पद्धि बनाने के लिये ऊपर लिखे हुए मानों से बदलनेसे

$$अ<sub>०</sub><sup>२</sup> \{ (इ<sub>१</sub> + घाइ<sub>२</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>३</sub>) य + इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub> + घाइ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> \}$$

$$\times \{ इ<sub>१</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>२</sub> + घाइ<sub>३</sub> \} य + इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub> + घा<sup>२</sup>इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> + घाइ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> \}$$

$$= ६(स<sub>२</sub><sup>२</sup> - स<sub>१</sub>स<sub>३</sub>)$$

२२०वें प्रक्रम के उदाहरण से स<sub>३</sub>—स<sub>१</sub>स<sub>३</sub> का रूप बनाने से और

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1\mathbb{E}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_2\mathbb{E}_1 &= \mathbb{T}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_2 = \mathbb{T}\mathbb{A} \\ \mathbb{E}_2\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_2\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_2 &= \mathbb{M}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_2\mathbb{E}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1 = \mathbb{M}\mathbb{A} \end{aligned}$$

ऐसा मानने से  $\mathbb{H}$  से चलस्पद्धी

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{A} &\equiv (\mathbb{A}_0\mathbb{A}_2 - \mathbb{A}_1^2)\mathbb{Y}^2 + (\mathbb{A}_0\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2)\mathbb{Y} \\ &\quad + (\mathbb{A}_1\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2^2) \\ &= (\mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{T}\mathbb{A}_1)(\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{M}\mathbb{A}_1) \end{aligned}$$

इस प्रकार  $\mathbb{H}\mathbb{A}$  को दो गुण्य गुणक रूप खण्डों में बना सकते हैं।

यदि स, किसी राशि का पूरा घन हो तो  $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_3$  ऐसा होने से  $\mathbb{H}\mathbb{A}$  के प्रत्येक पद के गुणक शून्य होंगे।

(२) यदि २२२ प्रक्रम के ग से चलस्पद्धी  $\mathbb{H}\mathbb{A}$  बनाओ तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 \{ (\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_2)^2 + (\mathbb{E}_1 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1\mathbb{E}_2 + \mathbb{V}\mathbb{A}_1)^2 \} \\ = -२७ \mathbb{A}_0^2\mathbb{A}_1 + २\mathbb{A}_1^3 - ३\mathbb{A}_0\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \end{aligned}$$

इसे बदल देने से

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 \{ (\mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{T}\mathbb{A}_1)^2 + (\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{Y} + \mathbb{M}\mathbb{A}_1)^2 \} \\ = -२७ ( \mathbb{S}_1\mathbb{S}_0 + २\mathbb{S}_2^2 - ३\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2\mathbb{M}_1 ) = २७\mathbb{H}\mathbb{A}\mathbb{H} \end{aligned}$$

२२३ प्रक्रम की युक्ति से जिसमें प्रधान गुणक गा हो ऐसा चलस्पद्धी बनाओ तो

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{A} &= (\mathbb{A}_0^2\mathbb{A}_2 - ३\mathbb{A}_0\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + २\mathbb{A}_1^3)\mathbb{Y}^3 + \\ &\quad ३ ( \mathbb{A}_0\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1^3\mathbb{A}_2 - २\mathbb{A}_0\mathbb{A}_2^2 )\mathbb{Y}^2 \end{aligned}$$

$$-(\alpha_1^2 \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3^2)$$

$$-2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3^2 \alpha_1 - 2\alpha_1 \alpha_2^2) \gamma$$

ऊपर के ता और मा से

$$\text{ता}^2 - \text{मा}^2 = \sqrt{-2\alpha(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

ऊपर ही की युक्ति से  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  को दूसरे  $\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma$  इत्यादि मानों से बदल देने से और मानों के अन्तरों को पद शुणकों के रूप में लाने से

$$(\text{ता} + \text{ता}_1)^2 - (\text{मा} + \text{मा}_1)^2 = 2\alpha \frac{\sqrt{\text{मा}^2 + 4\alpha_1^2}}{\alpha_1^2}$$

$$= 2\alpha \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha_1^2}, \text{ यदि } \sqrt{\text{मा}^2 + 4\alpha_1^2} = \alpha_1 \sqrt{\Delta}$$

(४) अव्यक्त मानों के अन्तरादि वर्गों के घात को पद शुणकों के रूप में ले आने से

$$\alpha_0^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

$$= -2\alpha(\text{मा}^2 + 4\alpha_1^2) = -2\alpha\alpha_1^2 \Delta$$

इसे ऊपर के उदाहरणों के ऐसा बदल देने से

$$\alpha_0^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\gamma - \alpha_1)^2$$

$$\gamma - \alpha_1^2(\gamma - \alpha_1)^2 = 2\alpha(\text{मा}^2 + 4\alpha_1^2)$$

इसलिये

$$\Delta \alpha_1^2 = \text{मा}^2 + 4\alpha_1^2$$

(५), (२) और (३) उदाहरणों से

$$2\alpha_0^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 = 2\alpha_0(\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_1\alpha_2)$$

$$\text{वा } -2\alpha_0^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 = -2\alpha_0(\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_1\alpha_2)$$

$$\text{दोनों के योग से स्पष्ट है कि } (\alpha_1\sqrt{\Delta} + \alpha_1\alpha_2)^{\frac{1}{2}} \\ + (\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_1\alpha_2)^{\frac{1}{2}} \text{ इससे}$$

$$(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2 \text{ यह अर्थात् } \frac{2\alpha_0\alpha_1\sqrt{\Delta}}{\alpha_0^2}$$

यह वा स, यह निःशेष हो जायगा।

३-चतुर्थांश समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्द्धी।

१२०वें प्रक्रम के (२) उदाहरण में दिखला आया है कि चतुर्थांश समीकरण का दो अचल स्पर्द्धी का और छ हैं। और २२२ प्रक्रम के हा प्रधान गुणक से २२३वें प्रक्रम में चलस्पर्द्धी हा का भी साधन कर चुके हैं। उसी प्रकार यदि गा प्रधान गुणक से चलस्पर्द्धी गा बनावे तो

$$\alpha_1\alpha_2 \equiv 1\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_2 - 1\alpha_1^2$$

यदि स, स, इत्यादि के मानों का इत्थान दो तो

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

जहां २२३वें प्रक्रम की क्रिया से

$$\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1^2\alpha_2$$

$$\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$आ_५ = -५अ_५अ_५अ_० - १०अ_३अ_५ + १५अ_५अ_५अ_५,$$

$$आ_६ = -१०अ_०अ_६ + १०अ_३अ_६,$$

$$आ_७ = ५अ_०अ_५अ_५ + १०अ_३अ_६ - १५अ_०अ_२अ_३,$$

$$आ_८ = अ_०अ_५ + २अ_०अ_५अ_३ + ६अ_३अ_२ - ६अ_०अ_२,$$

$$आ_९ = अ_०अ_६ - २अ_०अ_५अ_२ + २अ_३.$$

यहां  $आ_३, आ_५, आ_६, आ_७$  के मान जान लेने पर २२७ प्रक्रम की युक्ति से ध्रुवशक्ति ३ विषम होने से चिन्ह बदल देने से  $आ_३, आ_५$  और  $आ_०$  के मान बिना गणना किए ही आ जायेंगे।

गा के मान को यदि  $स_५$  के अव्यक्त मानों अर्थात्  $इ_१, इ_२, इ_३, इ_४$  के रूप में लाओ तो स्पष्ट है कि गा में गुण्य गुणक खण्ड  $इ_२ + इ_३ - इ_१ - इ_४, इ_३ + इ_१ - इ_२ - इ_४, इ_१ + इ_४ - इ_३ - इ_२$  ये होंगे और  $इ_१, इ_२, इ_३$  और  $इ_४$  के स्थान में

$$\frac{१}{य-इ_१}, \frac{१}{य-इ_२}, \frac{१}{य-इ_३} \text{ और } \frac{१}{य-इ_४} \text{ क्रम से}$$

इनके उत्थापन से और हर को हटाने के लिये प्रत्येक को  $\frac{स_५}{अ_५}$  इससे गुण देने से गा में गुण्य गुणक रूप खण्ड

$$स_५ \left( \frac{१}{य-इ_२} + \frac{१}{य-इ_३} - \frac{१}{य-इ_१} - \frac{१}{य-इ_४} \right) = अ_०अ$$

$$स_५ \left( \frac{१}{य-इ_३} + \frac{१}{य-इ_१} - \frac{१}{य-इ_२} - \frac{१}{य-इ_४} \right) = अ_०अ$$

$$s_1 \left( \frac{1}{y-d_1} + \frac{1}{y-d_2} - \frac{1}{y-d_3} - \frac{1}{y-d_4} \right) = \text{अ.म}$$

ये होंगे। इन पर से और  $s_1 = \text{अ.म} (y-d_1) (y-d_2)$   
( $y-d_1$ ) ( $y-d_2$ ) मान लेने से

$$n = (d_2 - d_3) (y-d_1) (y-d_4) - (d_1 - d_3) (y-d_2) (y-d_4)$$

$$m = (d_1 - d_4) (y-d_2) (y-d_3) - (d_2 - d_4) (y-d_1) (y-d_3)$$

$$m = (d_1 - d_4) (y-d_2) (y-d_3) + (d_2 - d_3) (y-d_1) (y-d_4)$$

और  $3\text{राग}_y = \text{अ.म} \text{ बमम} \mid \text{हय} = - \frac{\text{अ.म}^2}{4\text{म}} (n^2 + m^2 + m^2)$

इन पर से अनेक और उपयोगी समीकरण बना सकते हो।

५—न घात के एक भ्रूशक्तिक बहुपद राशि  $f(y, r)$  में यदि  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$  इनका उत्थापन देते हैं तो  $f(y, r)$  का मान  $f_a(या, रा)$  होता है और  $(y, r)$  का एक दूसरा फल जो  $s$  है वह उसी उत्थापन से  $s$  होता है तो सिद्ध करो कि

$$\text{मान } f \left( \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \right) = f_a \left( \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \right)$$

जहां मा परिवर्तन में मध्यस्थ है अर्थात्  $मा = दत' - द'त$ ।

यहां  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$

इसलिये माया = त'य - तर, मारा = - द'य + देर ।

और चलनकलन से

$$\text{या } \frac{\text{ताया}}{\text{ताय}} = \text{त', मा } \frac{\text{माया}}{\text{मारा}} = - \text{त, मा } \frac{\text{मारा}}{\text{ताय}} = - \text{द', मा } \frac{\text{मारा}}{\text{तार}} = \text{द ।}$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तासा ताया}}{\text{ताया ताय}} + \frac{\text{तासा तारा}}{\text{तारा तार}}$$

$$= - \left\{ \text{द' } \left( \frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{ताया}}{\text{तारा}} \right) + \text{त' } \left( - \frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \right) \right\}$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तासा ताया}}{\text{ताया तार}} + \frac{\text{तासा तारा}}{\text{तारा तार}}$$

$$= \text{द' } \left( \frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}} \right) + \text{त' } \left( - \frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \right)$$

और फ (दया + तर, द'या + त'रा) = फा(या, रा)

इसमें या और रा के स्थान में  $\frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}$  और  $-\frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}$

क्रम से इनके उत्थापन से भ्रुवशक्ति न होने से

$$\text{मान } \left( \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, - \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \right) = \text{फा} \left( \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}, - \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \right) \dots \dots \dots (१)$$

यदि या और रा के स्थान में क्रम से  $\frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{ता}}{\text{तारा}}$  और  $-\frac{१}{\text{मा}} \frac{\text{ता}}{\text{ताया}}$

इनका उत्थापन हूँ तो

$$\begin{aligned} \text{मान फ} \left( \frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \right) \text{ स} \\ = \text{फा} \left( \frac{\text{ता}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ता-१}} \right) \text{ सा} \dots \dots \dots (२) \end{aligned}$$

यहां फ  $\left( \frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \right)$ , फा  $\left( \frac{\text{ता}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \right)$  से गतिपरम्परासम्बन्धी फओं का ग्रहण किया है अर्थात् फ और फि के मान के उत्थापन से  $\frac{\text{ता}}{\text{तार}}$ ,  $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}$ , इत्यादि के तो  $\frac{\text{तान}}{\text{तारन}}$ ,  $\frac{\text{तान}}{\text{तारन-१}}$  इत्यादि मान आवेंगे उनसे उतनी बार उन चलराशियों के वश से तात्कालिक सम्बन्ध के मान समझो (चलनकलन का ७० वां प्रक्रम देखो)

(२) यदि तीसरी बहुपद राशि के फ (य, र) और स चल-स्पर्द्धा हों जहां मान लो कि दोनों चलस्पद्धियों में से एक के समान श हो जाता है और वे हो दोनों चलस्पद्धियों के मान या और स और नये पदगुणकों के वश से क्रम से फा<sub>३</sub> (या, रा) और सा<sub>३</sub> होता है जब य और र के परिवर्तन से श का एक नया रूप होगा। तो चलस्पद्धि क्रम से २२५वें प्रक्रम से

$$\text{मान फा (या, रा) = फा}_{३} (या, रा) \text{ और मान सा = सा}_{३}$$

इस रूप के होंगे। (१) इन समीकरणों से आप हुए स्वरूपों का उत्थापन (१) में देने से

$$\text{मान फ} \left( \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \right) = \text{फा}_{३} \left( \frac{\text{तासा}_{३}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{तासा}_{३}}{\text{ताया}} \right)$$



इस पर से सिद्ध होता है कि श का एक चलस्पद्धी

$$फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right) \text{ यह है।}$$

इसी प्रकार (२) से सिद्ध होगा कि  $फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right) स$ ।

यदि यह स न घात का हो तो श का अचलस्पद्धी होगा और यदि स न से अधिक घात का होगा तो वही श का चलस्पद्धी होगा। यहां श के घात का द्योतक न है अर्थात् श के मान में अव्यक्त का जो सब से बड़ा घात है उसका द्योतक न है।

(१) यदि  $फ(य, र) = (अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)(य, र)^४$  और  $फ = फा$ ,  $स = सा$  तो श का एक अचलस्पद्धी

$$(अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)^४ सा$$

$$= ४८ (अ_० अ_४ - ४ अ_१ अ_३ + २ अ_२^२) = भा।$$

(२) यदि स को चतुर्घात समीकरण का चलस्पद्धी हाय मान लें और  $फ(य, र) = (अ_०, अ_१, ..., अ_४)(य, र)^४$  तो ऊपर की श्रुति से जब  $फ(य, र) = श$  तो

$$(अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right) हाय$$

$$= ७२ (अ_० अ_२ अ_४ + २ अ_१ अ_२ अ_३ - अ_० अ_३^२ - अ_१ अ_३^२ - अ_२^३) = छा।$$

(३) सिद्ध करो कि यदि  $(अ, क, ख, ग)(य, र)^४$  का चलस्पद्धी गाय हो तो

$$(\alpha, \kappa, \lambda, \eta) \left( \frac{\alpha}{\kappa}, -\frac{\alpha}{\lambda} \right) \text{ गोच}$$

$$= -12 (\alpha^2 \eta^2 - 6 \alpha \kappa \lambda \eta + 2 \alpha \lambda^2 + 4 \kappa \eta^2 - 3 \kappa^2 \eta^2)$$

६—यदि  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $(\eta, \kappa)$  का अचलत्पद्धि  
फि  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  हो और स कोई  $(\eta, \kappa)$  का फल न वा  
न से अधिक घात का हो तो

$$\text{फि} \left( \frac{\alpha_0 \eta}{\alpha_1 \kappa}, \frac{\alpha_1 \eta}{\alpha_2 \kappa}, \frac{\alpha_2 \eta}{\alpha_3 \kappa}, \dots, \frac{\alpha_{n-1} \eta}{\alpha_n \kappa} \right) =$$

यह स का अचल वा चलत्पद्धि होगा ।

इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$\eta = \eta' + \kappa', \quad \kappa = \kappa' + \eta', \quad \eta' = \eta' + \kappa'.$$

फिर (५) वे उदाहरण ही की युक्ति से इन मानों से समी-  
करणों के बदलने से और उत्थापन से  $\eta = \kappa$ .

$$\eta' \frac{\eta}{\kappa} + \kappa' \frac{\eta}{\kappa} = \eta' \frac{\eta}{\kappa} + \kappa' \frac{\eta}{\kappa}$$

$$\text{इसलिये उन्हीं संकेतों से} \left( \eta' \frac{\eta}{\kappa} + \kappa' \frac{\eta}{\kappa} \right) \eta$$

$$= \left( \eta' \frac{\eta}{\kappa} + \kappa' \frac{\eta}{\kappa} \right) \eta$$

दोनों पदों को फैलाने से

$$\text{फि} ( \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n ) ( \varphi', \varphi' )^n \\ = ( \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n ) ( \varphi', \varphi' )^n$$

इसलिये २२५ प्रक्रम से

$$\text{फि} ( \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n ) = \text{मा}^n \text{फि} ( \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n )$$

इससे सिद्ध होता है कि  $\text{फि} ( \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n )$  यह

ब का अचल वा चलस्पर्द्धी जहां  $\varphi_0 = \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{ताय}^n}$ ,  $\varphi_1 = \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{ताय}^{n-1}}$

इत्यादि हैं।

यहां इस प्रकार के जो  $( \varphi, \varphi )$  और  $( \varphi', \varphi' )$  हैं इन्हें स्पर्द्धी चल कहते हैं।

( १ ) कल्पना करो कि  $\text{अ}_0 \varphi^2 + 2 \text{अ}_1 \varphi + \text{अ}_2$  यह  $\varphi$  के रूपान्तर से  $\text{आ}_0 \varphi^2 + 2 \text{आ}_1 \varphi + \text{आ}_2$  ऐसा हुआ तो २२६वें प्रक्रम के (१) उदाहरण से

$$\text{आ}_0 \text{अ}_2 - \text{आ}_1^2 = \text{मा}^2 ( \text{अ}_0 \text{अ}_2 - \text{अ}_1^2 ) = 0$$

और ऊपर के समीकरण से

$$\begin{aligned} \varphi_1'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया}^2} + 2 \varphi_1' \varphi_0' \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया} \cdot \text{तासा}} + \varphi_0'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तासा}} \\ = \varphi_1'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{ताय}^2} + 2 \varphi_1' \varphi_0' \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तायतासा}} + \varphi_0'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तासा}} \end{aligned}$$

अब ऊपर के उ से

$$\begin{aligned} \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया}^2} \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{तासा}^2} - \left( \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{तायातासा}} \right)^2 \\ = \text{मा}^2 \left\{ \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{ताय}^2} \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तासा}^2} - \left( \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तायतासा}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

इसे सा का हा सम्बन्धी चलस्पष्टी कहते हैं।

(२) ऊपर के उदाहरण में यदि स = (अ, क, ख, ग) (य, र)<sup>३</sup> हो तो चलस्पष्टी कैसा होगा।

यहां स = अय<sup>३</sup> + ३कय<sup>२</sup>र + ३खय<sup>२</sup>र + गर<sup>३</sup>। इसलिये चलन-कलन से

$$स = अय^३ + ३कय^२र + ३खय^२र + गर^३$$

$$\frac{तास}{ताय} = ३अय^२ + ६कयर + ३खर^२; \frac{ता^२स}{ताय^२} = ६अय + ६र$$

$$\frac{तास}{तार} = ३गर^२ + ६खयर + ३कय^२; \frac{ता^२स}{ताय^२} = ६गर + ६खय$$

$$\frac{ता^२स}{तायतार} = ६कय + ६खर, \frac{ता^२स}{ताय^२} \frac{ता^२स}{तार^२} = ३६ \{ (अग + कख) यर + अखय^२ + कगर^२ \}$$

$$\frac{ता^२स}{ताय^२} \frac{ता^३स}{तार^२} - \left( \frac{ता^२स}{तायतार} \right)^२ = ३६ \{ (अख - क^२) य^२ + (अग - कख) यर + (कग - ख^२) र^२ \}$$

(३) इसी प्रकार सिद्ध करो यदि स = (अ, क, ग, घ) (य, र)<sup>३</sup> तो चलस्पष्टी

$$= (अख - क^२) य^३ + २ (अग - कख) य^२र + (अघ + २कग - ३ख^२) य^२र^२ + २ कघ - खग) यर^३ + (ख + घ - ग^२) र^४।$$

७- यदि अव्यक्त राशि शा = सा + अ (यर' - य'र)<sup>न</sup> ऐसी हो जहां

सा = (अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub> ...., अ<sub>न</sub>) (य, र)<sup>न</sup> और (य, र) और (य', र') परस्पर स्पष्टीत्रल है।

यदि श का कोई अचलस्पर्द्धी बनाया जाय तो उसमें अ के भिन्न भिन्न घातों के गुणक य' और र' के ध्रुवशक्तिक फल होंगे वे सब अलग अलग सा के चलस्पर्द्धी होंगे। क्योंकि गुण-गुणित युत वर्णान्तर जब य, और र को बदलेंगे तो

$$\begin{aligned} \text{सा} &= (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n) (य, र)^n \\ &= (\text{आ}_0, \text{आ}_1, \text{आ}_2, \dots, \text{आ}_n) (या, रा)^n \end{aligned}$$

और यर'—य'र = म (यारा'—या'रा)। इसलिये सा + अ(यर'—य'र)<sup>n</sup> यह (आ<sub>0</sub>, आ<sub>1</sub>, ..., आ<sub>n</sub>) (या, रा)<sup>n</sup> + अमा<sup>n</sup> (यारा'—या'रा)<sup>n</sup> ऐसा होगा।

इसलिये कोई अचलस्पर्द्धी फा दोनों के बनाए जायँ तो अ के घात वृद्धि में २२६ वें प्रक्रम से

$$\begin{aligned} &(\text{फा}_0, \text{फा}_1, \text{फा}_2, \dots, \text{फा}_p) (१, ज) \\ &= \text{मा}^j (\text{फि}_0, \text{फि}_1, \text{फि}_2, \dots, \text{फि}_p) (१, \text{मान}^j) \end{aligned}$$

जिनसे सिद्ध है कि फा<sub>p</sub> = मा<sup>n</sup> फि<sub>p</sub> ऐसा होगा। इसलिये फा<sub>p</sub> यह एक चलस्पर्द्धी है।

यदि (यर'—य'र)<sup>n</sup> इसके स्थान में (न<sub>0</sub>, क<sub>1</sub>, क<sub>2</sub>, ..., क<sub>n</sub>) (य, र)<sup>n</sup> को रखें तो ऊपर ही की क्रिया से यह सिद्ध कर सकते हो कि

यदि फा (अ<sub>0</sub>, अ<sub>1</sub>, अ<sub>2</sub>, ..., अ<sub>n</sub>) यह (अ<sub>0</sub>, अ<sub>1</sub>, अ<sub>2</sub>, ..., अ<sub>n</sub>) (य, र)<sup>n</sup> इसका अचलस्पर्द्धी हो तो फा (अ<sub>0</sub> + नक<sub>0</sub>, अ<sub>1</sub> + नक<sub>1</sub>, ..., अ<sub>n</sub> + नक<sub>n</sub>)

इसमें ज के भिन्न भिन्न घातों के गुणक  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$   $(य, र)^n$  और  $(क_०, क_१, क_२, \dots, क_n)$   $(य, र)^n$  इन दोनों के अचलस्पर्द्धी होंगे।

चलनकलन से यदि ज का घात वृद्धि में फा को ले आओ और

$$\begin{aligned} & क_० \frac{ताफा}{ताअ_०} + क_१ \frac{ताका}{ताअ_१} + \dots + क_n \frac{ताफा}{ताअ_n} = बी, \text{ तो} \\ & फा (अ_० + जक_०, अ_१ + जक_१, \dots, अ_n + जक_n) \\ & \quad = फा (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) + जबी, \\ & \quad + \frac{ज^२}{२!} बी^२ + \frac{ज^३}{३!} बी^३ + \dots + \frac{ज^थ}{थ!} बी^थ + \dots \end{aligned}$$

ऐसा होगा। इस पर से सब अचलस्पर्द्धियों का पता लग जायगा।

—यदि फे  $(य, र)$  और फै  $(य, र)$  भुवशक्तिक फल हों तो

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{ताफे}{ताय} & \frac{ताफे}{तार} \\ \frac{ताफै}{ताय} & \frac{ताफै}{तार} \end{array} \right|$$

यह कनिष्ठ फल दोनों का चलस्पर्द्धी होगा। क्योंकि यदि दोनों फलों में

य = दया + तरा, र = द'या + त'रा इनका उत्थापन दो तो

फो  $(या, रा) =$  फे  $(य, र)$ , फौ  $(या, रा) =$  फै  $(य, र)$

$$\text{जिनसे } \frac{\text{नाफो}}{\text{ताया}} = \frac{\text{ताफे ताय}}{\text{ताय तारा}} + \frac{\text{ताफे तार}}{\text{तार ताया}} = \text{द } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$$

$$\frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}} = \frac{\text{ताफे ताय}}{\text{ताय तारा}} + \frac{\text{ताफे तार}}{\text{तार ताया}} = \text{त } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताया}} + \text{त' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{त फो}}{\text{ताया}} = \text{द } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} = \text{त } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{त' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसलिये

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{\text{नाफो}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}} \\ \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{नाफौ}}{\text{तारा}} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} \text{द } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}, & \text{त } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{त' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \\ \text{द } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, & \text{त } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{त' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}} \end{array} \right| \\ &= \text{म' } \left( \frac{\text{ताफे ताफै}}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ताफे नाफै}}{\text{तार ताया}} \right) \end{aligned}$$

इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है ।

इसे जकोबी ( Jacobi ) ने निकाला है । इसलिये इसे जकोबी का चलस्पद्धी कहते हैं ।

न चलराशियों के यदि भिन्न भिन्न न फल हों तो भी ऊपर की युक्ति से न संख्या पंक्ति से जो कनिष्ठ फल होगा वह उन समीकरण परम्पराओं का चलस्पद्धी होगा ।

२२९—चलराशियों का अकरणोगत और ध्रुव-शक्तिक एक फल न है जहाँ ध्रुवशक्ति दो है । इसे एक

ध्रुवशक्ति संवन्धी वर्णों के पृथक् पृथक् फलों के वर्ग योग रूप में प्रकाश कर सकते हैं ।

कल्पना करो कि वह फल  $y_1, y_2, \dots, y_n$  राशियों का  $भा = पा_1 y_1^2 + २ बा_1 y_1 + गा_1$  हैं, जहां  $पा_1$  कोई स्थिर सख्या,  $बा_1$  एक ध्रुवशक्ति संवन्धी पृथक् पृथक्  $y_2, y_3, \dots, y_n$  चलराशियों का फल और  $ता_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है तो

$$\begin{aligned} भा &= पा_1 y_1^2 + २ बा_1 y_1 + ता_1 \\ &= \left( y_1 \sqrt{पा_1} + \frac{बा_1}{\sqrt{पा_1}} \right)^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1} \\ &= \left\{ \left( y_1 + \frac{बा_1}{पा_1} \right) \sqrt{पा_1} \right\}^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1} \\ &= \left( या_1 \sqrt{पा_1} \right)^2 + गा_1 \end{aligned}$$

$$\text{यदि } या_1 = y + \frac{बा_1}{पा_1}, \text{ भा}_1 = ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1}$$

यहां  $भा_1, गा_1$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है।  $ता_1, गा_1$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है और  $बा_1$  का जो  $n-1$  चलराशियों का एक घात का ध्रुवशक्तिक फल है, वर्ग करने से वर्ग  $n-1$  चलराशियों का दो घात का ध्रुवशक्तिक फल होगा। इसलिये

$भा_1 = पा_2 y_2^2 + २ बा_2 y_2 + ता_2$  इस प्रकार लिख सकते हों और ऊपर की युक्ति से



$$\begin{aligned} \text{भा}_1 &= \left\{ \left( y_2 + \frac{b_2}{p_2} \right) \sqrt{p_2} \right\}^2 + t_2 - \frac{b_2^2}{p_2} \\ &= \left( y_2 \sqrt{p_2} \right)^2 + \text{भा}_2 \end{aligned}$$

$$\text{यदि } y_2 = y_2 + \frac{b_2}{p_2} \text{ और } \text{भा}_2 = t_2 - \frac{b_2^2}{p_2} \text{ ।}$$

इसी प्रकार भा<sub>2</sub> से या<sub>3</sub> और भा<sub>3</sub> इत्यादि बनेंगे ।

$$\begin{aligned} \text{इसलिये भा} &= (y_1 \sqrt{p_1})^2 + (y_2 \sqrt{p_2})^2 \\ &+ (y_3 \sqrt{p_3})^2 + \dots + (y_n \sqrt{p_n})^2 \end{aligned}$$

जहाँ  $y_n = y_n$  । इसपर से सिद्ध हुआ कि भा को न राशियों के वर्गयोग के समान बना सकते हो ।

$$\begin{aligned} 230-\text{फ (य)} &= y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots \\ &+ p_{n-1} y + p_n = 0 \end{aligned}$$

इसमें  $y^n, y^{n-1}, y^{n-2}$  इत्यादि के मान  $y^{n-1}$  और इससे अल्पघातों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं क्योंकि

$$\begin{aligned} \text{फ(य)} &= 0 = y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n \\ \therefore y^n &= -p_1 y^{n-1} - p_2 y^{n-2} - \dots - p_{n-1} y - p_n \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

य से गुण देने से

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= -p_1 y^n - p_2 y^{n-1} - \dots - p_{n-1} y^2 \\ &- p_n y \end{aligned}$$

$$= -p_1 \left( p_2 \frac{y^{n-1}}{y} - p_3 \frac{y^2}{n} - \dots \dots \dots p_{n-1} y - p_n \right) \\ - p_2 y^{n-1} - p_3 y^{n-2} - \dots \dots \dots - p_{n-1} y - p_n y \quad (1) \text{ ले}$$

$$= (p_1^2 - p_2) y^{n-1} + (p_1 p_2 - p_3) y^{n-2} + \dots \dots \dots \\ + (p_1 p_{n-1} - p_n) y - p_n$$

इस प्रकार से  $y^{n+1}$  का मान  $y^{n-1}$  और इससे अल्प घातों के रूप में आया।

फिर दोनों पक्षों को  $y$  से गुण देने से  $y^{n+2}$  का मान  $y^n$  और  $y^{n-1}$  इत्यादि एकापचित घातों के रूप में आवेगा। उसमें  $y^n$  के स्थान में (१) के उत्थापन से  $y^{n+2}$  का मान  $y^{n-1}$  और इससे अल्प घातों में आवेगा। इस प्रकार आगे क्रिया फैलाने से  $y$  का  $n$  से आगे चाहे जौन का अभिन्न घात का मान  $y$  के  $n-1$  और इससे अल्प घात के रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

२३१—कल्पना करो कि

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots \dots \dots + p_{n-1} y + p_n \\ = 0 \dots \dots \dots (1)$$

यह एक समीकरण है और मान लो कि

$$r = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots \dots + a_m y^m \dots \dots \dots (2)$$

जहां  $a$  से अक्षर  $m$  है और  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  ये स्थिर संख्या हैं जो अभी अविदिन हैं।



$$\left. \begin{aligned} \text{सा}_1 &= \text{नअ}_0 + \text{अ}_1\text{स}_1 + \text{अ}_2\text{स}_2 + \dots + \text{अ}_{\text{म}-1}\text{स}_{\text{म}-1} + \text{अ}_{\text{म}}\text{स}_{\text{म}} \\ \text{सा}_2 &= \text{नक}_0 + \text{क}_1\text{स}_1 + \text{क}_2\text{स}_2 + \dots + \text{क}_{\text{न}-1}\text{स}_{\text{न}-1} \\ \text{सा}_3 &= \text{नख}_0 + \text{ख}_1\text{स}_1 + \text{ख}_2\text{स}_2 + \dots + \text{ख}_{\text{न}-1}\text{स}_{\text{न}-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \text{सा}_n &= \text{नज}_0 + \text{ज}_1\text{स}_1 + \text{ज}_2\text{स}_2 + \dots + \text{ज}_{\text{न}-1}\text{स}_{\text{न}-1} \end{aligned} \right\} \text{४}$$

इस प्रकार  $r$  के  $n$  विध मानों के एकादि घातों के योग के मान आ गए जिनसे  $1 \times 10^6$  प्रक्रम की युक्ति से  $r^1 + r^{n-1} + r^2 + r^{n-2} + \dots + r^{n-1} + r + r^n = 0$  इस अभीष्ट समीकरण में  $r_1, r_2$  इत्यादि गुणकों के मान व्यक्त हो जायेंगे।

इस प्रकार  $r$  के रूप में अपना अभीष्ट समीकरण बन गया। अथवा (३) में यदि  $y, y^2, \dots, y^{n-1}$  इत्यादि को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लो तो १६६ वे प्रक्रम से  $r^2, r^3$  इत्यादि के रूप में  $y, y^2$  इत्यादि आ जायेंगे। फिर उनका उत्थापन (१) में देने से अभीष्ट समीकरण  $r$  के रूप में बन जायगा जिससे  $r$  के मान व्यक्त होने से  $y$  के मान भी व्यक्त हो जायेंगे। इस विधि का Toichirnhausen ने निकाला है।

२३२—अब श.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  जो अभी अविदित हैं इनको इस प्रकार ले सकते हैं जिनके वश से ऊपर २ के रूपमें जो समीकरण बना है उसमें कई पद गुप्त हो जायँ । जैसे यदि इच्छा हो कि प्रथम पदके आगे दूसरा, तीसरा, .....म संख्यक पद उड़ जायँ तो मान लेना चाहिए कि  $s_1 = 0, s_2 = 0, \dots, s_{n-1} = 0$

परन्तु (8) से जब  $a_1, a_2$  इत्यादि के मान शून्य मान कर  $a_3, a_4, \dots, a_n$  के मान के लिये जब अभीष्ट समीकरण बनाओगे

तब देखोगे कि सा<sub>१</sub> में अ<sub>०</sub>, अ<sub>२</sub> इत्यादि के एक घात हैं। सा<sub>२</sub> में दो घात, सा<sub>३</sub> में तीन घात, ... और सा<sub>n</sub> में n घात हैं। इसलिये सा<sub>१</sub> से अ<sub>०</sub> का मान अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... के रूप में आवेगा। इसका उत्थापन सा<sub>२</sub> में देने से अ<sub>१</sub> का मान द्विविध अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, के रूप में आवेगा। सा<sub>३</sub> में इन दोनों मानों का उत्थापन देने से अ<sub>२</sub> का मान ६ विध आवेगा।

अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>m</sub> में किसी एक अ<sub>m</sub> का मान व्यक्त माने तो अ<sub>m-१</sub> का मान (m-१) ! इतना विध आवेगा।

$$२३३—य^n + प_१ य^{n-१} + प_२ य^{n-२} + \dots + प_n = ०$$

इसमें मान लो कि

$$२=अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + अ_३ य^३ + अ_४ य^४$$

और पिछले प्रक्रमों की युक्ति से कल्पना करो कि २ रूप में

$$२^n + व_१ २^{n-१} + व_२ २^{n-२} + \dots + व_n = ०$$

ऐसा समीकरण बना जिसमें २३१ प्रक्रम से स्पष्ट है कि व<sub>१</sub>, अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ..., अ<sub>n</sub> का एक घात का, व<sub>२</sub> दो घात का, और व<sub>३</sub> तीन घात का भ्रूशक्तिक फल है। कल्पना करो कि अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ..., अ<sub>n</sub> ऐसे हों जिनसे

व<sub>१</sub> = ०, व<sub>२</sub> = ०, व<sub>३</sub> = ०। अब मांगो कि व<sub>१</sub> = ० इससे अ<sub>०</sub> का मान अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, अ<sub>४</sub> इनके रूप में जो आया उसका उत्थापन व<sub>२</sub> और व<sub>३</sub> में देने से व<sub>१</sub> = ०, व<sub>२</sub> = ० ऐसा हुआ। जहां व<sub>१</sub>, दो घात का और व<sub>२</sub> तीन घात का अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..., अ<sub>n</sub> के भ्रूशक्तिक फल हैं। इसलिये २२६ वें प्रक्रम से

$v'_2 = f^2 + g^2 + h^2 + j^2 = 0$  ऐसी कल्पना कर सकते हैं। जहाँ  $f, g, h, j$  अलग अलग  $a_1, a_2, a_3, a_4$  के एक घात सम्बन्धी फल हैं।

कल्पना करलो कि  $f = g\sqrt{-1}, h = j\sqrt{-1}$

जहाँ दोनों समीकरणों में अलग अलग  $a_1, a_2, \dots, a_4$  के एक ही घात सम्बन्धी फल हैं। मानलो कि इन दोनों से  $a_1$  और  $a_2$  के मान जो  $a_3$  और  $a_4$  के रूप में आए उनके उत्थापन से  $v'_2$  का रूप  $v''_2 = 0$  ऐसा हुआ जो कि  $a_3$  और  $a_4$  का तीन घात का भुवशक्तिक फल है। इसमें  $a_3$  और  $a_4$  में से किसी एक का मान कोई इष्ट मान ले' तो दूसरे का मान एक घन समीकरण से आ जायगा।

यदि दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ाना हो तो ऊपर ही को ऐसी दिया करने से अन्त में एक चतुर्घात समीकरण बनेगा।

$r_n + b_1 r_{n-1} + b_2 r_{n-2} + \dots + b_n = 0$  इसमें यदि  $r$  के स्थान में  $\frac{1}{r_1}$  रख दें तो  $b_n r_1^n + b_{n-1} r_1^{n-1} + b_{n-2} r_1^{n-2} + \dots + 1 = 0$  ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ऊपर ही की युक्ति से अन्त पद से दूसरा, तीसरा और चौथा वा दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ा सकते हो।

२३४—२३३ वें प्रक्रम में जो  $n$  घात का समीकरण है जिस पर से  $r$  के  $n$  घात का समीकरण उत्पन्न हुआ है, उसमें यदि  $n=4$  हो तो उसी प्रक्रम की युक्ति से दूसरे, तीसरे और चौथे वा पाँचवे पद को उड़ाने से किसी पंचघात समीकरण का

$x^2 + 4x + 4 = 0, x^2 + 4x + 4 = 0$  ऐसे दो रूप बना सकते हैं। इसमें यदि  $x = \frac{1}{2}$  ऐसा माना जाय तो दो रूप और  $x^2 + 4x + 4 = 0,$

$x^2 + 4x + 4 = 0$  इस प्रकार के होंगे। इस प्रकार किसी पंचघात समीकरण का चार रूपान्तर कर सकते हो। यह मिस्टर सीरेट ( M<sup>r</sup> Serret ) की कल्पना है। ( See his cours d'Algebre Superneure, Vol 1, Art 192)

२३५—यदि पंचघात समीकरण  $(x, a_1, a_2, \dots \dots a_n)(y, r)^2$  ऐसा हो और इसे  $k, (y + d_1, r)^2 + k_2 (y + d_2, r)^2 + k_3 (y + d_3, r)^2$  इसके तुल्य करें जहाँ  $d_1, d_2$  और  $d_3, p_1, y^2 + p_2, y^2 + p_3, y + p_0 = 0$  इसमें के अव्यक्त मान हैं। तब तीनों पंच घातात्मक पदों को फैलाने से और दोनों पक्षों में  $y$  के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$a_0 = k_1 + k_2 + k_3, a_1 = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3, a_2 = k_1 d_1^2 + k_2 d_2^2 + k_3 d_3^2,$$

$$a_3 = k_1 d_1^3 + k_2 d_2^3 + k_3 d_3^3, a_4 = k_1 d_1^4 + k_2 d_2^4 + k_3 d_3^4, a_5 = k_1 d_1^5 + k_2 d_2^5 + k_3 d_3^5.$$

इनपर से

$$p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 = 0$$

$$p_0 a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + p_3 a_4 = 0$$

$$p_0 a_2 + p_1 a_3 + p_2 a_4 + p_3 a_5 = 0$$

इन तीनोंके साथ  $p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 = 0$  इसको मिलाने से

$$\begin{vmatrix} 1 & y & y & y \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & x_1 & x_3 & x_4 \\ y_2 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

यह कनिष्ठ फल के रूप में एक समीकरण हुआ जिससे  $y$  के मान विदित होने से  $x_1, x_2$  और  $x_3$  व्यक्त होंगे तब

$$x_0 = k_1 + k_2 + k_3$$

$$x_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$x_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$$

इनसे  $k_1, k_2$  और  $k_3$  भी व्यक्त हो जायेंगे।

इस प्रकार दिया हुआ पंचघात समाकरण तीन अव्यक्त राशियों के पंचघात के योग के समान हो सकता है।

इसी प्रकार  $(y, r)$  के  $2n-1$  घात का ध्रुव शक्तिरूप फल,

$$k_1(y + x_1 r)^{2n-1} + k_2(y + x_2 r)^{2n-1} + \dots + k_n(y + x_n r)^{2n-1}$$

इसके समान हो सकता जहाँ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  •

$p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + p_{n-2} y^{n-2} + \dots + p_0 = 0$  इसमें अव्यक्त के मान हैं।

यह डाक्टर सिल्वेस्टर (Dr. Sylvester) की कल्पना है।

१३६—फ  $(y) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0$  इस समीकरण के धन मूलों की प्रधान सामा जाननी है।



कल्पना करो कि अ यह प्रथम पद का गुणक वा उससे अल्प संख्या है और उसके आगे लगातार जितने पदों के धन गुणक हैं उनमें सब से छोटे गुणक के तुल्य वा उससे भी अल्प क है। और आगे जितने ऋण और धन पद हैं उनमें सब से बड़े ऋण गुणक के तुल्य वा उस से बड़ा ग है तो स्पष्ट है कि फ (य) अवश्य धन ही रहेगा।

$$\text{यदि } अयन + क(य^{न-१} + \dots\dots\dots + य^{न-ज}) [-ग$$

$$य^{न-ज-१} + \dots\dots\dots + १$$

जहाँ सबसे पहिला ऋण पद  $य^{न-ज-१}$  है। ऊपर का मान गुणोत्तर श्रेढीसे

$$अयन + क \frac{य^{न-यन-ज} - य^{न-ज} + \dots\dots + १}{य - १} - ग \frac{य^{न-ज} + \dots\dots + १}{य - १} \text{ यह होगा।}$$

यदि  $य > १$  तो इसका मान तब धन होगा यदि

$$\{अ(य - १) + १\} य^{न} - (क) य^{न-ज} + ग \text{ यह अथवा}$$

$$\{अ(य - १) + क\} य^{ज} - (क + ग) \text{ यह शून्य वा धन हो}$$

(१) इसमें यदि  $क = ०$  और सब से बड़ा ऋण गुणक  $= ग$

तो फ (य) धन होगा

यदि  $अ(य - १) य^{न} - (क + ग) \text{ यह वा } अ(य - १) - ग \text{ धन हो अर्थात् यदि}$

$$य = १ + \frac{ग}{अ} \text{ वा } य, १ + \frac{ग}{अ} \text{ इससे बड़ा हो। इससे पृ६ के}$$

प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(२) मान लो कि  $क = ०$  और सब से बड़ा ऋण गुणक  $= ग$  तो फ (य) धन होगा।

यदि  $अ(य-१)य^n - ग$  यह धन हो अर्थात् यदि  $अ(य-१)^{n+१} - ग$  यह धन हो

अर्थात् यदि  $य, १ + \left(\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{n+१}}$  इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। इससे ५वें प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(३) मान लो कि  $अ = ०$  तो फ (य) धन होगा यदि  $कय^n - (क+ग)$  यह धन हो अर्थात् य,  $\left(१ + \frac{ग}{क}\right)^{\frac{१}{n}}$  इसके तुल्य वा इससे अधिक हो। यह एक नई सीमा है जो (२) से अल्प होगी यदि अ अर्थात् प्रथम पद के गुणक १ से क बड़ा होगा।

(४) यदि क से अ बड़ा न हो तो क के स्थान में अ के उत्थापन से फ (य) धन होगा यदि  $\{ अ(य-१) + अ \} य^n - (अ+ग)$  यह धन वा शून्य हो अर्थात् यदि य,  $\left(१ + \frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{n+१}}$  इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। यदि अ से छोटा क हो तो (३) से जो सीमा होगी उससे यह अल्प आवेगी।

(५) यदि  $अ > ग$  तो (२) से सीमा  $१ + (१)^{\frac{१}{n+१}} = २$  होगी।

(६) यदि  $क > ग$  तो (३) से सीमा  $२^{\frac{१}{n}}$  यह होगी।

(७) यदि  $अ > ग$  और  $क > ग$  तो (४) से सीमा  $२^{\frac{१}{n+१}}$  यह होगी।

यह प्रोफेसर डिमार्गन की कल्पना है।

२३७— $अ + क \sqrt{-१} = इ$  (कोज्याअ, + ज्या अ,  $\sqrt{-१}$ )



∴ मू मा = इ कोज्या अ, = अ = भुज ।

मू आ मा = इ ज्या अ, = क = कोटि ।

ऊपर हो की परिभाषा से अ' + 'क' का मध्यस्थ इ' और उपकरण अ' हो तो मू ओ का मान = इ' और ओ मू या = अ', ।  
और अ + 'क + अ' + 'क' = अ + अ' + ' (क + क' )

इसलिये कहेंगे कि दोनों असंभवों के योग रूप असंभव में भुज = अ + अ' और कोटि = क + क' होगी । जिस बिन्दु के ये भुज, कोटि हैं उस बिन्दु के जानने के लिये आ से आ का रेखा मूओ के समानान्तर और तुल्य बनाओ और का से मू या पर लम्ब काना और आ से काना पर लम्ब आपा करो तो आपा = अ' और कापा = क' । इसलिये का बिन्दु दोनों असंभव संख्या के योग को प्रकाश करेगा और ऊपर की परिभाषा से

मू का = मध्य {अ + अ' + ' (क + क' )}, या मू का = उप {अ + अ' + ' (क + क' )} इसलिये दो असंभव संख्याओं का योग जानने के लिये एक को पूर्व परिभाषा से मू आ से प्रकाश करो और इसके आ प्रान्त से दूसरी को आ का से प्रकाश करो जहाँ आ का दूसरी के मध्यस्थ के तुल्य है और मू या अक्ष से दूसरी के उपकरण के तुल्य कोण बनाता है तो मू का दोनों असंभवों के योग को प्रकाश करेगी । मू आ + आ का > मू का; इसलिये दोनों के मध्यस्थों का योग, योग रूप असंभव संख्या के मध्यस्थ से अधिक होता है ।

इसी प्रकार यदि तीसरी असंभव संख्या अ'' + 'क'' को मू ओ से प्रकाश करें और पहिली दो के योग मू का में मिलाना चाहो तो मू ओ के समानान्तर और तुल्य का वा खींचो और मू से वा

तक रेखा कर दो। तो ऊपर ही की युक्ति से मू आ, मू ओ' और मू औ असंभवों का योग मू खा के समान होगा यहां भी योग का मध्यस्थ मू खा के समान होगा और रेखागणित से मू का + काखा, मू खा से अधिक होगा। इस प्रकार आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि असंभव संख्याओं के मध्यस्थ के योग से उन असंभव संख्याओं के योग का मध्यस्थ छोटा होता है।

इसी प्रकार यदि मू का में मू ओ को घटाना हो तो मू का को जान कर का से विपरीत दिशा में मू ओ के समानान्तर और तुल्य का आ के बनाने से मू आ को कहेंगे कि दोनों का अन्तर है।

२४१। असंभवों का गुणन और भजन—

कल्पना करो कि

$$\text{गुण्य} = \text{अ} + \text{क} = \text{इ} \left( \text{को ज्या अ}_1 + \text{ज्या अ}_1 \right)$$

$$\text{गुणक} = \text{अ}' + \text{क}' = \text{अ} \left( \text{को ज्या अ}'_1 + \text{ज्या अ}'_1 \right)$$

डे माइवर (De Moivre) के सिद्धान्त से

$$(\text{अ} + \text{क}) (\text{अ}' + \text{क}') = \text{इ}^2 \{ \text{को ज्या} (\text{अ}_1 - \text{अ}'_1) + \text{ज्या} (\text{अ}_1 + \text{अ}'_1) \}$$

इससे सिद्ध होता है कि दो असंभवों का गुणन फल एक असंभव संख्या है जिसमें मध्यस्थ गुण्य गुणकों के मध्यस्थ के गुणन फल तुल्य और उपकरण दोनों के उपकरणों के योग तुल्य होता है।

इसी प्रकार

$$\frac{अ + क}{अ' + क'} = \frac{इ}{इ'} \left\{ क ज्या (अ_1 - अ'_1) + ज्या (अ_1 - अ'_1) \right\}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि दो असंभवों के मजन में लब्धि एक असंभव सख्या होती है जिसमें मध्यस्थ भाज्य के मध्यस्थ में भाजक के मध्यस्थ का भाग देने से जो लब्ध हो, वह होता है और उपकरण, भाज्य के उपकरण में भाजक के उपकरण को घटा देने से जो शेष बचता है वह होता है।

गुणन की क्रिया से स्पष्ट है कि  $(अ + क)^n$  यह एक प्रकार की  $अ + क$  ऐसी असंभव संख्या होगी जहाँ  $अ$  और  $क$  दोनों संभव संख्या हैं।

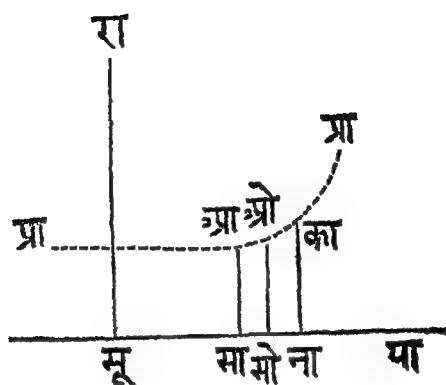
इसी प्रकार

$$अ_0 ल^n + अ_1 ल^{n-1} + अ_2 ल^{n-2} + \dots + अ_{n-1} ल + अ_n$$

इस बीजगणितीय बहुपदराशि में जहाँ  $ल$  के घातों के गुणक संभव वा असंभव संख्या हैं।  $ल$  के स्थान में  $अ + क$  का उत्थापन दें तो योग और गुणन की युक्ति से स्पष्ट है कि बहुपदराशि एक  $अ + क$  ऐसी असंभव सख्या होगी। इसमें यदि  $अ$  और  $क$  दोनों शून्य हों तो वह बहुपदराशि भी शून्य के समान होगी।

(१५ वां प्रक्रम देखो)

२४२—यदि  $श = फ(ल)$  ऐसा एक समीकरण हो और  $मू श$ , और  $मू रा$  परस्पर लम्बरूप अक्ष कल्पना कर  $मू$  से  $मू मा = अ$  बनावें और  $अ$  का उत्थापन  $फ(य)$  में  $(ल)$  के स्थान में देकर



फ (अ) को मा अ के तुल्य काट लें जो कि मू या पर लम्ब है तो कहेंगे कि जब ल=अ तो फ (ल)=आमा। इसी प्रकार जब ल=मू ना तो फ(ल)=ना का—इस प्रकार यदि ल की मू से या की ओर धन और इसके विरुद्ध दिशा की ओर ऋण गणना समझे और मू या के ऊपर रा की ओर धन गणना और इसके विरुद्ध ऋण गणना समझे तो ल के स्थान में— $\infty$  और  $+\infty$  के बीच सब संभव संख्याओं का उत्थापन देने से जो फ (ल)=श के भिन्न भिन्न धन वा ऋण मान होंगे ऊपर की युक्ति से या के अग्रों के ऊपर उन उन मानों के तुल्य लम्ब खड़ा करने से लम्बाओं में गत एक प्रा आ का गा वक्र रेखा होगी जिसे फ (ल) की वक्र रेखा कहते हैं। इसकेवलसे किसी ल के मान में फ (ल) का मान जान सकते हो। जैसे जब ल=मू मो=ख तब फ (ल) का मान जानना हा तो मू से धन गणना या की ओर ख संख्या के तुल्य मू मो काट लें से मो पर एक ओ मो लम्ब खड़ा करने से यह जहाँ वक्र के ओ बिन्दु पर लगा वहाँ से मो तक

ओ मो का नापने से प्रमाण हो वही न तुल्य ल के मान में फ(ल) अर्थात् फ (ख) का मान होगा।

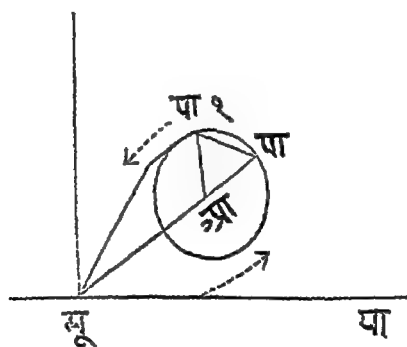
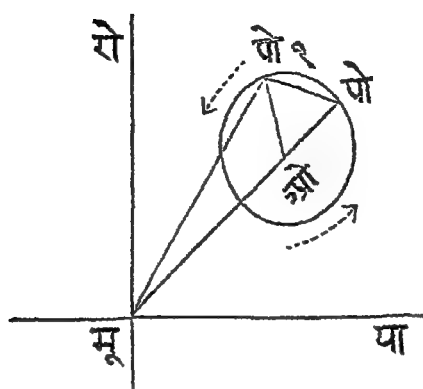
२४३। ऊपर के प्रक्रम से फ (ल) की वक्र रेखा तभी तयार हो सकती है जब  $l = -\infty$  और  $+\infty$  के बीच संभव संख्यात्मक हो और इससे अन्यथा स्थिति में अर्थात् सर्वत्र चाहे ल संभव वा असंभव हो ऊपर की युक्ति से फ (ल) की वक्र रेखा नहीं बन सकती। इसलिये सर्व साधारण के लिये अब युक्ति लिखते हैं। कल्पना करो कि

$$f(l) = a_0 \cdot l^n + a_1 \cdot l^{n-1} + a_2 \cdot l^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot l + a_n$$

जहाँ  $l = y - 1$  जहाँ  $y$  और  $1$  दोनों के मान में जहाँ तक संभव है सब संभाव्य संख्या का उत्पादन दे सकते हैं।  $y + 1 = l$  ऐसे  $l$  को जिसके मान में संभव और असंभव दोनों चल रहते हैं मिश्रचल कहते हैं। इसमें यदि  $n = 0$  और  $y$  के स्थान में  $-\infty$  और  $+\infty$  के बीच के मानों का उत्पादन दें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से  $l$  के संभव मान में फ (ल) की वक्र रेखा बनेगी; इसलिये मिश्रचल  $l$  के फल की जो वक्र रेखा होगी उसी का एक विशेष अर्थात् संभव  $l$  के मान में जो ऊपर के प्रक्रम से वक्र रेखा होगी वह एक रूढ़ है। इस लिये मिश्रचल के फल की जो वक्र रेखा होगी वह सर्व साधारण के लिये उपयोगी है।

कल्पना करो कि  $l = y + 1$  इसका कोई एक मान २३६ प्रक्रम से मू पा अर्थात् पा बिन्दु पर है और  $l$  के स्थान इस





मान का उत्थापन देने से जो फ़ (ल) का मान २४० प्रक्रम से आ + १ का हांगा उसका मान साफ साफ समझने के लिये अलग २३६ प्रक्रम से पो बिन्दु पर है अर्थात् मू' पो है। इसी प्रकार ल के दूसरे मान में अर्थात् य + १ के दूसरे मान में इसका प्रमाण प, को समझां और उसके वश से फ़ (ल) का मान जो असंभव होगा वह पो, है। इस प्रकार से प्रत्येक य + १ के भिन्न

भिन्न मान में भिन्न भिन्न प, प, इत्यादि बिन्दु से एक तीर के मुख दिशा की ओर घूमता हुआ बक्र बनेगा जिसे  $y + 1r$  का बक्र कहेंगे और इसके वर से एक फ्ल (ल) का पो पो, बक्र बनेगा जिसका घुमाव भी यहां पर तीर के मुख की ओर मान लिया है।

कल्पना करो कि ल के  $y + 1r$  मान का द्योतक प और  $y' + 1r'$  मान का द्योतक प, बिन्दु है तो

$ल-y + 1r = श्रु$  (कोज्जाष + 1ज्याष)  $ल' = y' + 1r'$   
 $= श्रु' (कोज्जाष' + 1ज्याष')$  सू प, सू प और प प, का यो।  
 है (२३६ प्रक्रम से)।

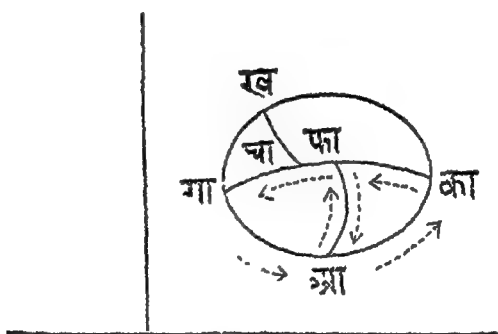
इसलिये पप, को ल की असंभव गति कहेंगे और यदि  $ल' = ल + च'$  जहां  $च = श्रु$ , (कोज्जाष, + 1ज्याष,) और  $च$  में  $श्रु, = प१'$  और  $ष$ ,  $च$  का उपकरण है अर्थात् सू या अक्ष से प१, रेखा जो कोण बनाती है, उसका मान है।

सू प, — सू प को ल के मध्यस्थ की गति कहने हैं जो कि  $श्रु' - श्रु$  के तुल्य है और  $ष' - ष$  वा ल के उपकरण की गति कहते हैं। और  $च$  को जिसे  $श्रु$ , (कोज्जाष, + 1ज्याष,) इसके तुल्य ऊपर मान लिया है, ल की गति कहते हैं।

कल्पना करो कि  $y, r$  के भिन्न भिन्न मान से प एक सीमित बक्र बनाता है। यदि घूमते घूमते प फिर अपने स्थान पर पहुँचेगा तो प के मध्यस्थ का मान फिर उसी प्रथम मान के तुल्य होगा और उपकरण भी वही होगा जो कि प्रथम में था। यदि सू बिन्दु बक्र के बाहर हो तो और यदि सू बक्र के

भीतर पड़ जायगा तो उपकरण का मान प्रथम मान से २<sup>०</sup> तुल्य बढ़ जायगा अर्थात् उपकरण की गति तब २<sup>०</sup> होगी ।

यदि मिश्रचल दो विरुद्ध दिशाओं में चल कर एक ही रेखा को चाहे वह वक्र वा सरल हो उत्पन्न करे तो एक ओर चलने में जितनी उपकरण की गति घन होगी उतनी ही विरुद्ध दिशा में चलने से शून्य होगी; इसलिये समग्र गति शून्य होगी । इस पर से नीचे का सिद्धान्त उत्पन्न होता है ।



कल्पना करो कि आ का ख गा क्षेत्र का का गा, आ का, घाख, इत्यादि रेखाओं से कई विभाग कर डाला तो आ स्थान से तीर की ओर से क्षेत्र की परिधि पर चलते हुए प बिन्दु की परिधि के पूरे भ्रमण से जो उपकरण की गति होगी वही सब क्षेत्र खण्डों की प्रत्येक सीमा पर उसी चाल से घूम आने पर भी उपकरण की गति होगी, क्योंकि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर क्षेत्र खण्डों की जितनी सीमायें हैं उन पर परस्पर विरुद्ध दिशा से दो बेर चलने से ऊपर की युक्ति से समग्र उपकरण की गति उतने

चलन में शून्य होगी। जैसे आ का फ क्षेत्र खण्ड की सीमा पर आ से तीरों की ओर चलने से जिस दिशा म प, फा विन्दु से चल कर आ पर आवेगा उससे विरुद्ध आ से फा की ओर आ फा गा क्षेत्र खण्ड की सीमा पर घूमने के लिये चलना पड़ेगा। इस प्रकार भीतर जितनी सीमायें हैं उन पर विरुद्ध दिशा से दो बेर चलने में तत्संबन्धी उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। केवल बाहर की सीमाओं पर एक बेर चलने से तत्संबन्धी समग्र गति वही होगी जो कि बड़े क्षेत्र की समग्र परिधि घूमने से उत्पन्न होती है। क्योंकि सब क्षेत्र खंडों की बाहर की सीमाओं का योग बड़े क्षेत्र की परिधि ही है।

२४४। कल्पना करो कि मिश्रचल ल, ल<sub>०</sub> मान से चलना आरम्भ किया और इसकी अल्पगति  $\chi = \text{श्रु}_1 (\text{कोज्य}_1 + \text{अपा}_1)$  है तो

$$\begin{aligned} \text{फ}(\text{ल}) &= \text{फ}(\text{ल} + \chi) = \text{फ}'(\text{ल}) + \text{फ}'(\text{ल}_0)\chi + \\ \text{फ}''(\text{ल}_0) \frac{\chi^2}{1.2} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{फ}(\text{ल}) \text{ की गति} = \text{फ}(\text{ल}_0 + \chi) - \text{फ}(\text{ल}_0)$$

$$= \text{फ}'(\text{ल}_0)\chi + \text{फ}''(\text{ल}_0) \frac{\chi^2}{1.2} + \text{फ}'''(\text{ल}_0) \frac{\chi^3}{3!} + \dots$$

इस में  $\chi$  के प्रत्येक घात के गुणक प्रसिद्ध असंभव संख्या हैं जिनके मध्यस्थ यदि अ, क, ग, ... मान लिए जायें तो २४१ प्रक्रम से, क्रम से पदों के मध्यस्थ अश्रु, कश्रु<sup>२</sup>, गश्रु<sup>३</sup>, ... होंगे और इन मध्यस्थों के योग से २४० वे प्रक्रम से इनके योग  $\text{फ}(\text{ल}_0 + \chi) - \text{फ}(\text{ल}_0)$  इसका अर्थात्  $\text{फ}(\text{ल})$  के गति का मध्यस्थ छोटा होगा; इसलिये श्रु<sub>१</sub> का ऐसा छोटा मान मान सकते

हैं जिससे उससे भी छोटा फ (ल) की गति का मध्यस्थ होने से फ (ल) की गति चाहे जिस निर्दिष्ट संख्या से छोटी हो सकती है। क्योंकि जैसा जैसा मध्यस्थ छोटा होता है असंभव संख्या का मान भी वैसा वैसा छोटा होता है ( १५ वां प्रक्रम देखो ) इस पर स कह सकते हो कि जैसा जैसा मिश्रचल, ल चलेगा वैसावैसा फ (ल) भी चलेगा अर्थात् मिश्रचल ल बढ़ता चलेगा तो फ (ल) भी बढ़ता जायगा और यदि ल घटता चलेगा तो फ (ल) भी घटता जायगा।

इसलिये यदि पा विन्दु घूम कर एक चक्र बनावेगा तो पो भी घूम कर उर्ली दिशा से एक चक्र बनावेगा और पा घूमते घूमते जब फिर अपने मूल स्थान पा पर पहुँचेगा तो उसी समय पो भी अपने चक्र में घूम कर फिर अपने मूल स्थान पो पर पहुँचेगा। ( २४३ वां प्रक्रम का क्षेत्र देखो )। अब प्रकृत में इस बात का विचार करना है कि यदि पा चल कर एक छोटा चक्र बनावे तो उतने समय में पो चल कर जो अपने चक्र की परिधि पर घूम कर अपने मूल स्थान पर आवेगा उस समय फ (ल) के उपकरण की क्या गति होगी।

कल्पना करो कि आ एक विन्दु है जिसका भुज=य, और कोटि र, है तो  $ल = य_० + १२$ , ( २४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो ) अब इस विचार में दो भेद हैं।

(१) जब  $य + १२$ , यह फ (ल)=० इसमें का कोई अव्यक्त-मान नहीं है अर्थात् ल के स्थान में  $य_० + १२ = ल_०$  के उत्थापन से फ (ल) का मान जब शून्य से भिन्न सू' श्रो है।

(२) जब फ (ल)=० इसका एक मूल  $य_० + १२$  है अर्थात् ल के स्थानमें  $य_० + १२ = ल_०$  इसके उत्थापन से जब फ (ल)=०।

(१) स्थिति में आ संबन्धी मान  $f(l_0)$  का ओ कल्पना करो (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) जहाँ  $m'$  ओ शून्य नहीं है। मान लो कि  $l = l_0 + v$  जहाँ  $v = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{c} \right)$  और कल्पना करो कि पा जो कि  $l$  का द्योतक है आ के चारों ओर एक बहुत ही छोटा वक्र बनाता है। पो जो कि  $f(l)$  का द्योतक है जब आ से चल कर पा बिन्दु पर पहुँचा अर्थात् जब  $l$  की गति का मध्यस्थ आ पा =  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{c} \right)$  हुआ उस समय ओ से चल कर पो, पर पहुँचा। इसलिये उस समय  $f(l)$  की गति ओ पो, से द्यातित होगी अर्थात्  $f(l)$  के गति का मध्यस्थ ओ पो, होगा जो कि इसी प्रक्रम के आदि में लिखी हुई युक्ति से  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{c} \right)$  के बहुत छोटा मानने से एक निर्दिष्ट संख्या  $m'$  ओ से सर्वदा छोटा होगा। इसलिये  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{c} \right)$  को ऐसा छोटा मान सकते हैं कि पा आ की चारों ओर एक बहुत छोटा वक्र बनावे जिसके वश  $f(l)$  का द्योतक पो जो ओ की चारों ओर घूम कर वक्र बनाता है उसके बाहर  $m'$  बिन्दु पड़े। इस पर से यह सिद्ध होता है कि पा जो ऐत वक्र में घूमा है जिसके अन्तर्गत कोई ऐसा  $l$  का मान नहीं है। इसके उत्थापन से  $f(l) = 0$  हो तो तत्सम्बन्धी  $f(l)$  का द्योतक पो जो वक्र बनावेगा उसके बाहर  $m'$  के पड़ जानेसे उस समय  $f(l)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी (२४३ प्रक्रम देखो)।

(२) स्थिति में मानों कि  $f(l) = 0$  इसका एक मान जो इसमें म बार आया है वह  $y_0 + \frac{1}{2}v_0 = l_0$  यह है तो

$$f(l) = (l - l_0)^2 \quad f(l) = v^2 f(l) \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{c} \right)^2 f(l)$$

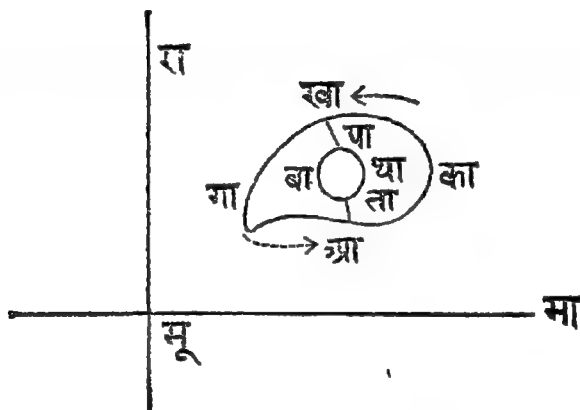
इस स्थिति में  $m \rightarrow 0$  इसलिये जब या एक सीमित वक्र आ की चारों ओर बनावेगा उतने ही में अपने मूल स्थान पर पहुँचेगा। इसलिये  $f(n)$  के उपकरण की गति सीमित वक्र के भीतर  $m'$  के पड़ जाने से २ का अवयव होगी जो कि ऊपर के समीकरण से

$v \cdot f(n) = (m, + \text{उप-का } (n))$  यह समीकरण २४१ प्रक्रम सं बनता है इस पर से विदित हो सकती है। क्योंकि  $f(n)$  के उपकरण की गति,  $=$  गति  $(m, ) + \text{का } (n)$  के उपकरण की गति, परन्तु  $f(n) = 0$  इसका कोई मान या के सीमित वक्र के अन्तर्गत है; इसलिये (१) स्थिति से  $f(n)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी और पा के एक बेर आ के चारों ओर भ्रमण करने स ओर श्रु, की प्रवृत्ति आ मूल बिन्दु ही के होने से  $v$ , की गति २ होगी। इसलिये इसे  $m$  से गुण देने से  $f(n)$  के उपकरण की गति २  $m$  हुई। इससे सिद्ध हुआ कि यदि पा बहुत छोटा एक सीमित वक्र बनावे जिससे अन्तर्गत  $f(n) = 0$  इस एक  $m$  मूल जो  $n$  म बार है,  $v$   $m$  हो तो  $f(n)$  के उपकरण की वृद्धि  $m$  होगी।

### २४५। काशी का सिद्धान्त (Cauchy's Theorem)

जब  $n$  दो विरुद्ध दिशा में चल कर एक ही रेखा को बनावेगा ( २४२ वां प्रक्रम देखो ); इसलिये  $f(n)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। जैसा कि उसी प्रक्रम में एक क्षेत्र के भीतर कई क्षेत्र खण्डों का बनाकर दिखलाया है। इस लिये समग्र क्षेत्र खण्डों की सीमा पर  $n$  के चलने से जो  $n$  के उपकरण की गति होगी वह पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमा पर

ल के घूमने से जो ल के उपकरण की गति होगी उसके तुल्य होगी, इसलिए क्षेत्र खण्डों के वश से जो फ (ल) अपने क्षेत्र के भीतर अनेक क्षेत्र खण्ड बनावेगा उनकी सब सीमाओं के वश से वही फ (ल) के उपकरण की गति होगी जो फ (ल) के पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमाओं पर चलने से उत्पन्न होती है।



कल्पना करो कि या रा के धरातल में एक कोई सीमित वक्र है। और पहिले मानो कि इसके भीतर ल के जो अनेक मान हैं किसी के वश से  $f(l) = 0$  यह ठीक नहीं होता तो २४२ प्रक्रम के (१) से कहेंगे कि चाहे वक्र के भीतर कितने ही क्षेत्रखण्ड किए जायँ और सभी की सब सीमाओं पर बा बड़े वक्र की परिधि पर ल चले परन्तु फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य ही होगी। दूसरी बार ऐसा मानो कि वक्र के भीतर एक ऐसा बिन्दु है जिसके वश से जो ल होगा वह  $f(l) = 0$  इसके एक मूल के, जो कि म बार आया है,



तुल्य है। वक्र के भीतर एक बहुत छोटे सीमित वक्र पा बा ता था को मान लो कि इस बिन्दु को चारों ओर से घेरे हुए है अर्थात् इसके भीतर में वह बिन्दु पड़ा है तो वक्र की आ का सा गा परिधि के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति होगी वह आ का सा पा था ता, खा गा आ ता बा पा, पा बा ता था के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की भिन्न भिन्न गति होंगी उनके योग के तुल्य होगी। परन्तु पहिले दो क्षेत्र खण्डों के बाहर उस बिन्दु के पड़ जाने से तत्सम्बन्धी गति शून्य होगी और तीसरे के भीतर उस बिन्दु के पड़ जाने से उसकी परिधि पर वा बड़े क्षेत्र की परिधि आ का सा गा पर ल के चलने से २४२ प्रक्रम के (२) स्थिति से फ (ल) के उपकरण की समग्र गति २ म ग होगी। इसी प्रकार यदि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर दूसरी तीसरी इत्यादि ऐसे बिन्दु हों जिनके वश से जो ल के मान भिन्न भिन्न होंगे वे क्रम से फ (ल) = ० इसके उन मूलों के समान हों जो क्रम से समीकरण में  $m, m', m''$  इत्यादि वार आये हों तो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति =  $२ ग (म + म' + म'' + \text{इत्यादि})$  यह होगी। इस पर से काशी ने यह सिद्धान्त निकाला—

यदि मिश्रचल ल एक सीमित वक्र के भीतर हो और उन ल के मानों के भीतर जानना हो कि फ (ल) = ० इसके कितने मूल पड़े हैं तो उस वक्र की परिधि पर ल के चलाने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति उत्पन्न हो उसमें २ ग के भाग देने से लब्धि निकालो। लब्धि की संख्या जो हो उतने ही कहेंगे कि क्षेत्र फल के भीतर के ल मानों के बीच फ (ल) = ० इसके मूल है।

२४६। कल्पना करो कि मिश्रचल ल का अकरणी गत धन

$$फ(ल) = अ_0 ल^n + अ_1 ल^{n-1} + अ_2 ल^{n-2} + \dots$$

$$+ अ_{n-1} ल + अ_n$$

यह एक फल न घात का है। इसमें यदि  $फ(ल) = 0$  तो जानना है कि संभव और असंभव मिल कर ल के कितने मान होंगे। कल्पना करो कि ल एक ऐसे बड़े वृत्त को बनाता है जिसके अन्तर्गत ही सब ल के मान पड़े हैं। उसके बाहर कोई भी ल का मान नहीं पड़ा है। यदि

$$फ(ल) = ल (अ_0 + अ_1 ल' + अ_2 ल'^2 + \dots + अ_n ल'^n)$$

$$= ल^n फा(ल'), \text{ जहां } ल' = \frac{ल}{ल}$$

ऐसा लिखें तो ल', जिसका मध्यस्थ ल के मध्यस्थ के हरात्मक मान के तुल्य है वह, जब ल एक बड़ा वृत्त बनावेगा, तब एक छोटा वृत्त बनावेगा। बड़ा वृत्त बड़े से बड़ा ऐसा बना सकते हैं जिसके वश से ल का मध्यस्थ बहुत बड़ा और ल' का ऐसा छोटा हो सकता है कि जिसके वश से ल' जो छोटा वृत्त बनावेगा उसके अन्तर्गत  $फा(ल') = 0$  इसका कोई मूल न हो तब  $फ(ल) = ल^n फा(ल')$  इससे

$फ(ल)$  के उपकरण की गति। परन्तु  $फा(ल') = 0$  इसका कोई मूल ल' के छोटे वृत्त के भीतर नहीं है; इसलिये  $फ(ल)$  के उपकरण की गति  $= ल^n$  के उपकरण की गति  $+ फा(ल)$  के उपकरण की गति  $= ल^n$  के उपकरण की गति।

परन्तु यदि  $ल = शु$  (को ज्या  $ष + ज्याष$ ) तो  $ल^n = शु^n$  (को ज्या  $न ष + ज्या न ष$ ) इसलिये  $ष$  की वृद्धि परिधि पर एक घेरे पूरा घूमने से  $२\pi$  होगी। इसलिये  $फ(ल)$  के उपकरण की

समग्र गति =  $n \times 2\pi$ , इसमें  $2\pi$  का भाग देने से फ़ (ल) = ०  
 इसमें ल मानों की संख्या न होगी। इस प्रकार काशी के  
 सिद्धान्त से सिद्ध हुआ कि किसी न घात समीकरण में अव्यक्त  
 का मान न विध्न होगा जो कि २४ वें प्रक्रम में अनुगम और  
 अनुमान से सिद्ध किया है।

ध्यान देकर देखो तो यह सिद्धान्त समीकरण मीमांसा में  
 सब सिद्धान्तों का मूल सिद्धान्त है। इसी पर से और और  
 सिद्धान्तों की सृष्टि हुई है। और इसी पर से यह भी सिद्ध  
 होता है कि प्रत्येक समीकरण में कुछ न कुछ अव्यक्त का मान  
 रहता है जिसके उत्थापन से वह समीकरण, फ़ (ल) = ०  
 ऐसा होगा।

२४७। (१) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग ४ संख्या  
 के तुल्य होता है? इस प्रश्न को साधारण बीजगणित की युक्ति  
 से ऐसे करते हैं। मान लो कि वह संख्या  $y$  है तो आलाप  
 से  $y^2 = ४$   $\therefore y^2 - ४ = ०$  तब गुण्य गुणक खण्ड वा वर्ग  
 समीकरण की युक्ति से  $y = \pm २$  अर्थात् कहोगे कि वह संख्या  
 धन वा ऋण २ है। इस तरह से उत्तर द्विविध हुआ।

(२) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग मूल  $\pm २$  है।

(३) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल  $+ २$  है।

(४) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल  $- २$  है।

बीजगणित की साधारण युक्ति से ऊपर के तीनों प्रश्नों के  
 उत्तर में लोग एक ही साधारण संख्या ४ कहते हैं। परन्तु  
 ध्यान देकर यदि सोचा तो तीनों के उत्तर में परस्पर भ्रम न  
 पड़े इसके लिये तीनों के स्त्रिये कुछ सङ्केत कल्पना करना चाहिए

अर्थात् जिस ४ के मूल से घन २ और ऋण २, दोनों का ग्रहण करते हैं उस ४ से भिन्न होने के लिये ४ में एक ऐसा सङ्केत करना चाहिये जिससे यह बोध हो कि ऋण मूल २ के वर्ग के समान यह है। जिसमें मूल लेने में ऋण २ ही का ग्रहण किया जाय। इसी प्रकार ४ में एक दूसरा सङ्केत भी ऐसा होना चाहिए जिससे समझा जाय कि यह +२ का वर्ग है और इस का मूल +२ ही अपेक्षित है। और जिस ४ में ये दोनों सङ्केत मिले हों उससे समझना चाहिए कि साधारण ४ प्रसिद्ध है। इसी प्रकार बीजगणित से वा इस ग्रंथ से प्रसिद्ध है कि ४ का घनमूल त्रिविध होगा; इसलिये अलग अलग इन तीनों के घन को समझने के लिये ४ में तीन सङ्केत कल्पना करनी चाहिए और जिस ४ में तीनों सङ्केत एकट्ठे देखे जाय उसे समझना चाहिए कि साधारण ४ है। इस प्रकार किसी साधारण संख्या आ का न घात मूल न विध होते हैं। उन न ओ के न घात को अलग अलग समझने के लिये आ में अलग अलग न सङ्केत करना चाहिए और जिस आ में न ओ सङ्केत एकट्ठा पाए जाय उससे समझना चाहिए कि साधारण प्रसिद्ध संख्या आ है।

२४८। आ साधारण संख्या के न घात मूल का एक मान जो पाटीगणित से आता है उसे अलग अलग के न घात मूलों से गुण देने से न गुणन फल आ के न विध न घात मूलों के मान होते हैं (८४ वां प्रक्रम देखो)।

कल्पना करो कि डिमाइवर के सिद्धान्त से १ के न घात मूल का एक मान,  $अ_१ =$  कोज्या  $\frac{२\pi}{n} +$  ज्या  $\frac{२\pi}{n}$  है (६३ वां प्रक्रमदेखो) तो ६३ वें प्रक्रमसे सब मान  $अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_n$

होंगे। इन्हें पाटीगणित से जो एक मान, आ के न घात मूल का आया है उससे गुण देने से क्रम से जो आ के न घात मूलों के मान आवेंगे उन्हें क्रम से पहिला, दूसरा, तीसरा, इत्यादि कहो। संख्या में इन्हें १, २, ३,.....न संस्क कहेंगे।

न १ २  
न आ ३  
६ ५ ४

इस सङ्केत से समझो कि वह आ है जिसके सब न घात मूल अपेक्षित हैं जो कि ऊपर की युक्ति से साधारण आ संख्या है। वृत्तमध्यगत आ के शिर से बाईं ओर आ का उपरिगत, वृत्तान्तर्गत न से समझो कि यह आ अपने न घात मूलों के न घातों से बना है। परिधि पर तुल्यान्तरित १, २, ३, न, से समझो कि आ के सब न घात मूल लिए गए हैं।



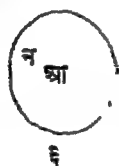
इससे समझो कि वह आ है जिसका पहिला, और दूसरा न घातमूल छोड़ और सब न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला, और दूसरा न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला और छठवां न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल छठवां न घातमूल अपेक्षित है।

इसी प्रकार संख्याओं के उत्थापन से



इससे समझना चाहिए कि ८ का पहिला जो घन-मूल है उसका घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल पहिला घनमूल अपेक्षित है।

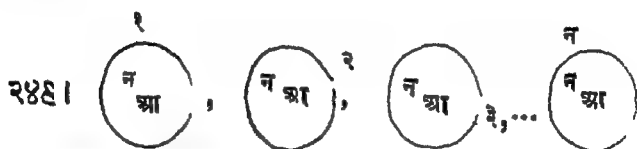


२

इससे समझना चाहिए कि ८ का दूसरा घनमूल जो होगा उसका यह घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल दूसरा घनमूल अपेक्षित है।



इससे समझना चाहिए कि यह वह ८ है जिसका तीनों घनमूल अपेक्षित हैं, इसलिये इसे कहेंगे कि यह प्रसिद्ध संख्या ८ है।



ये सब न घातमूल के बश साधारण आ संख्या के अङ्ग हैं। क्योंकि पहिले के ऊपर यथा क्रम दूसरे, तीसरे, .... न संख्यक अङ्गों को ऐसे रख दें जिसमें सब आ और परिधि के भीतर का न एकट्ठा हो जाय तो  $\left( \overset{१}{\underset{१}{\text{न आ}}} \right)^२$  पेसा हो जायगा जो कि साधारण आ संख्या के तुल्य है।

न के स्थान में १, २, ३, ... के उत्थापन से कह सकते हो कि १ घातमूल के वश साधारण आ संख्या में १ अङ्क, २ घातमूल के वश २ अङ्क, ३ घातमूल के वश ३ अङ्क, ४ घातमूल के वश ४ अङ्क, ... और न घातमूल के वश न अङ्क हैं। इसलिये

$$\begin{aligned} \text{साधारण आ संख्या} &= \overset{1}{\textcircled{1 \text{ आ}}} = \overset{2}{\textcircled{2 \text{ आ}}} \\ &= \overset{1}{\textcircled{1 \text{ आ}}} = \dots = \overset{n}{\textcircled{n \text{ आ}}} \end{aligned}$$

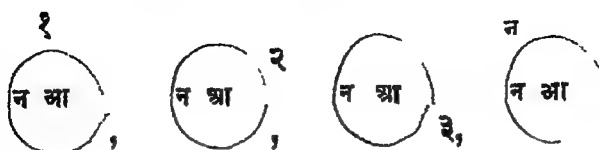
इस पर से कह सकते हैं कि न को अनन्त मानने से साधारण आ संख्या में अनन्त अङ्क बना सकते हैं।

साधारण आ संख्या को १ मान कहें तो २ घात के मूल के वश इसमें दो अङ्क होंगे इस लिये  $\overset{1}{\textcircled{2 \text{ आ}}}$  इसमें वा  $\textcircled{2 \text{ आ}}$  इसमें

एक ही अङ्क अर्थात् साधारण आ संख्या का आधा अङ्क रहने से कहेंगे कि ये दोनों  $\frac{1}{2}$  मान है।

इसी प्रकार न घात मूल के वश साधारण आ संख्या में न अङ्क रहने से उसको यदि १ मान कहें तो





इन सब में केवल एक एक अङ्ग रहने से सब को अलग अलग कहेंगे कि  $\frac{1}{n}$  मान हैं यदि  $n=\infty$  तो  $\frac{1}{n}=0$  और यदि  $n=m$  तो  $\frac{1}{n}=\frac{1}{m}$  होगा क्योंकि  $+m$  में जब आ को १ मान माना है तो  $m$  के विपरीत  $-m$  में १ मान से विपरीत  $-१$  मान होगा।

इसी प्रकार  $\frac{1}{n}$  आ  $\frac{1}{n}$  इसको कहेंगे कि

$\frac{1}{n}$  मान है।  $n-1$   $\frac{1}{n-1}$  आ  $\frac{1}{n-1}$  इसे कहेंगे कि

$\frac{1}{n-1}$  मान है। इसी प्रकार सर्वत्र समझना चाहिए।

२५०। कल्पना करो कि  $0 = \frac{p}{q}(y) = \frac{p}{q} y^m + \frac{p}{q} y^{m-1}$

$+ \frac{p}{q} y^{m-2} + \dots + \frac{p}{q} y^{m-n-1} + \frac{p}{q} y^{m-n}$  यह एक समीकरण है जिसमें  $y$  के घाताङ्क सब घनात्मक भिन्न संख्या हैं जिनमें सबसे बड़ा  $\frac{p}{q}$  है।  $m, m-1, \dots, m-n-1$  का लघुतमापवर्त्य का समझो। ला में  $m, m-1, \dots, m-n-1$  के भाग देने से लब्धि क्रम से  $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  समझो तो

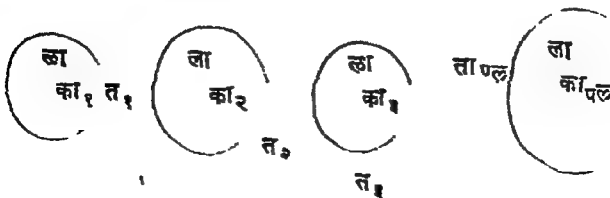
$$\begin{aligned} \text{फ (य)} &= \text{अ.} \frac{\text{प ल}}{\text{म ल}} + \text{अ.} \frac{\text{प, ल}_1}{\text{म}_1, 1} + \dots \\ &+ \text{अ}_{\text{न}-1} \frac{\text{प}_{\text{न}-1}}{\text{म}_{\text{न}-1}} \frac{\text{ल}_{\text{न}-1}}{\text{ल}_{\text{न}-1}} + \text{अ}_{\text{न}} = 0 \end{aligned}$$

इसमें यदि  $\frac{1}{\text{म ल}} = \frac{1}{\text{ला}}$   $= \text{र तो}$

$$\begin{aligned} \text{फ (य)} &= \text{फा (र)} = \text{अ.} \text{र}^{\text{प ल}} + \text{अ.} \text{र}^{\text{प}_1 \text{ ल}_1} + \dots \\ \text{अ}_{\text{न}-1} \text{र}^{\text{प}_{\text{न}-1} \text{ ल}_{\text{न}-1}} &= 0 \end{aligned}$$

अब यह र के अकरणी गत अभिन्न फल के रूप में समीकरण हुआ। जिससे काशी के सिद्धान्त से र का मान प ल विध आवेंगे। मान लो कि वे र के मान क्रम से  $k_1, k_2, k_3, \dots$  क ल हैं।

अब साधारण गणित की रीति से  $k_{\text{म ल}} = k_{\text{ला}} = k_1$ ,  $k_{\text{ला}} = k_2, k_{\text{ला}} = k_3, \dots, k_{\text{प ल}} = k_{\text{म ल}}$  कहें और साधारण  $k_1, k_2, \dots$  इत्यादि संख्याओं के ला घात मूलों के मानों में  $k_1, k_2, \dots$  को  $t_1, t_2, t_3, \dots$  संख्या कहें तो  $(\text{य} = \text{र ल} = \text{र प ल})$ , इसलिये २४६ प्रक्रम से



ये सब  $y$  के मान होंगे।  $का_1$ ,  $का_2$ ,  $का_{पल}$  साधारण संख्याओं को एक एक मान कहो तो २४७ प्रक्रम से  $\frac{1}{ला} = \frac{1}{मल}$

प्रत्येक मान होगा; इसलिये इनका योग  $= \frac{पल}{मल} = \frac{प}{म}$  इतने मान  $y$  के होंगे। इस पर से सिद्ध होता है कि समीकरण में अव्यक्त का सबसे बड़ा धन घात जो होता है वह चाहे अभिन्न वा भिन्न हो अव्यक्त के मानों की संख्या उसी के तुल्य होगी।

२५१। कल्पना करो कि  $n_1, n_2, n_t$  ये उत्तरोत्तर अधिक धनात्मक भिन्न वा अभिन्न संख्या हैं तो बीजगणित से  $-n_1, -n_2, -n_3, \dots, -n_t$  ये ऋण संख्या में उत्तरोत्तर अल्प होंगी जिनमें सबसे बड़ा  $-n_1$  है।

मानो कि  $f(y) = अ_1 y^{-n_1} + अ_2 y^{-n_2} + अ_3 y^{-n_3} + \dots + अ_t y^{-n_t} = 0$  इसमें जानना है कि  $y$  के कितने मान हैं।

मान लो कि  $y$  के  $r$  विध मान हैं तो  $f(y)$  को  $y^{n_t}$  इस से गुण देने से जो  $y^{n_t} f(y) = 0$  यह समीकरण नया होगा उसमें अब  $r+n$  इतने मान  $y$  के होंगे परन्तु

$$y^{n_t} f(y) = अ_1 y^{n_t - n_1} + अ_2 y^{n_t - n_2} + \dots + अ_t = 0$$

जहाँ धनात्मक भिन्न वा अभिन्न  $y$  का सब से बड़ा घात  $n_t - n_1$  यह होगा इसलिये २४८ प्रक्रम से इसमें  $n_t - n_1$  इतने  $y$  के मान होंगे; इसलिये

$$r + n_t = n_t - n_1, \therefore r = -n_1$$

$$\text{इसलिये } f(y) = a_1 y^{-n_1} + a_2 y^{-n_2} + a_3 y^{-n_3} + \dots$$

+  $a_n y^{-n_t} = 0$  इसमें  $y$  के सब से बड़े घात की संख्या जो  $-n_1$  है उतने  $y$  के मान होंगे यह सिद्ध हुआ। इसलिये अब साधारणतः यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि किसी समीकरण में अव्यक्त की सब से बड़ी जो घात संख्या होती है उतने ही विध उस समीकरण में अव्यक्त के मान आवेंगे चाहे वह घात संख्या अभिन्न वा भिन्न धनात्मक वा ऋणात्मक हो। जैसे

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots +$$

$$a_{n-1} y + a_n = 0$$

इस समीकरण में जहां  $n$  अभिन्न और धन है यदि  $y = \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} \text{तो नया समीकरण } & \frac{a_0}{r^n} + \frac{a_1}{r^{n-1}} + \frac{a_2}{r^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{r} + a_n \\ & = a_0 r^n + a_1 r^{(n-1)} + a_2 r^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} r^{-1} \\ & + a_n r^0 = 0 \end{aligned}$$

ऐसा हुआ, जहां बीजगणित की युक्ति से  $r$  का सब से बड़ा घात ० है। इसमें जितने  $r$  के मान आवेंगे उनकी संख्या  $n$  कहें तो इस समीकरण को  $r^n$  से गुण देने से जो दूसरा समीकरण बनेगा उसमें  $r$  के मान  $n+1$  विध होंगे परन्तु समीकरण को  $r^n$  से गुण देने से जो दूसरा समीकरण  $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0$

ऐसा बनेगा इसमें  $r$  के मान  $n$  विध आवेंगे इसलिये

$$n+1 = n, \therefore n = 0$$

इससे सिद्ध होता है कि किसी हरात्मक समीकरण में यदि छेद, समीकरण को  $r^n$  से गुण कर न उड़ाए जायँ तो उसमें शून्य विध्वज अव्यक्त का मान होगा। यह सब अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों को विशेष ध्यान देना उचित है। मेरा लिखना इस विषय पर कैसा है इसे भी ध्यान देकर विचारें।

२५१। यह दिखलाना है कि

$$\frac{a^2}{y-a} + \frac{k^2}{y-k} + \frac{x^2}{y-x} + \dots + \frac{a^2}{y-a} - 1 = 0$$

इसमें  $y$  का मान कोई असंभव संख्या नहीं है।

सम्भव हो तो मानो कि  $y = p + b\sqrt{-1}$  तो दूसरा मान भी  $y$  का एक  $p - b\sqrt{-1}$  होगा। इन दोनों मानों का समीकरण में उत्थापन देने से जो समीकरण के दो मूल होंगे उनमें प्रथम में दूसरे को घटा देने से

$$b \left\{ \frac{a^2}{(p-a)^2 + b^2} + \frac{k^2}{(p-k)^2 + b^2} + \frac{x^2}{(p-x)^2 + b^2} + \dots + \frac{a^2}{(p-a)^2 + b^2} \right\} = 0$$

अब जब तक  $b=0$  न मानोंगे तब तक यह समीकरण असंभव होगा। क्योंकि कोष्ठकान्तर्गत सब पद धन हैं। वे मिल कर शून्य नहीं हो सकते। इसलिये समीकरण की सत्यता में शून्य के समान  $b$  का मान होने से सिद्ध हुआ कि इसमें अव्यक्त का कोई मान असंभव संख्या नहीं है।

२५१।  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  ये न अव्यक्त हैं। इनके वश से नीचे जो न समीकरण लिखे हैं उनसे इनका मूल जानना है

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = 0$$

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n = 0$$

$$a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + a_3^2 y_3 + \dots + a_n^2 y_n = 0$$

$$a_1^3 y_1 + a_2^3 y_2 + a_3^3 y_3 + \dots + a_n^3 y_n = 0$$

.....

$$a_1^{n-2} y_1 + a_2^{n-2} y_2 + a_3^{n-2} y_3 + \dots + a_n^{n-2} y_n = 0$$

$$a_1^{n-1} y_1 + a_2^{n-1} y_2 + a_3^{n-1} y_3 + \dots + a_n^{n-1} y_n = k$$

इन समीकरणों को क्रम से  $x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1, 1$  से गुणा कर जोड़ देने से और ऐसी कल्पना करने से कि  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$  इत्यादि जो कि अभी अविदित हैं ऐसे हैं कि इनके वश से जोड़ने में  $y_2, y_3, \dots, y_n$  इनके अलग अलग गुणक सब शून्य हो जाते हैं तो

$$y_1 (a_1^{n-1} + x_1 a_1^{n-2} + x_2 a_1^{n-3} + \dots + x_{n-2} a_1 + x_{n-1}) = 0$$

$x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$  इत्यादि में ऐसा धर्म मानने से सिद्ध होता है कि

$$f(x) = x^{n-1} + x_1 x^{n-2} + x_2 x^{n-3} + \dots + x_{n-2} x + x_{n-1} = 0$$

इस समीकरण के  $a_2, a_3, \dots, a_n$  ये सब अव्यक्तमान हैं इसलिये  $f(x) = (x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)$  इसमें  $x$  के स्थान में  $a_1$  का उत्थापन देने से  $y_1$  का गुणक

$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)$  यह आवेगा; इसलिये

$$y_1 = \frac{k}{(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n)}$$

इसी प्रकार साजात्य धर्म रहने से  $y_2$ ,  $y_3$ , इत्यादि के मान आ जायेंगे।

२५२। य, र, ल इत्यादि न अव्यक्त हैं। उनके मान नीचे लिखे हुए न समीकरणों से निकालने हैं।

$$\frac{y}{a_1 - a} + \frac{r}{a_1 - k} + \frac{l}{a_1 - s} + \dots = 1$$

$$\frac{y}{a_2 - a} + \frac{r}{a_2 - k} + \frac{l}{a_2 - s} + \dots = 1$$

.....

$$\frac{y}{a_n - a} + \frac{r}{a_n - k} + \frac{l}{a_n - s} + \dots = 1$$

समीकरणों के रूप से कह सकते हैं कि  $a_1, a_2, a_3, \dots$

$$a_n \text{ ये } \frac{y}{a - a} + \frac{r}{a - k} + \frac{l}{a - s} + \dots = 1 \text{ इस न}$$

घात समीकरण में  $a$  के मान हैं। मान लो कि  $a = a - \tau$  तो इसके उत्थापन से और पक्षान्तरानयन से

$$1 + \frac{y}{\tau} + \frac{r}{\tau + k - a} + \frac{l}{\tau + s - a} + \dots = 0$$

छेदगम करने से इसका रूप

$$\tau^n + a_1 \tau^{n-1} + a_2 \tau^{n-2} + \dots + a_n = 0 \text{ ऐसा होगा जहां } a_n = y (k - a) (s - a)$$

परन्तु जब  $अ = अ - ट$  .  $ट = अ - ज$ ; इसलिये  $ट$  के मान सब  $अ - ज_1$ ,  $अ - ज_2$ ,  $अ - ज_3$ , .....  $अ - ज_n$  ये होंगे इसलिये २५ वें प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से

$$अ_n = (अ - ज_1) (अ - ज_2) (अ - ज_3) \dots = 0$$

$$(-1)^n य (क - अ) (ख - अ) \dots$$

$$\therefore य = \frac{(अ - ज_1) (अ - ज_2) (अ - ज_3) \dots}{(अ - क) (अ - ख) \dots}$$

इसी प्रकार  $अ = क - ट$ ,  $अ = ख - ट$ , इत्यादि मानने से,  $ज$  इत्यादि के मान आ जायेंगे।

२५५। सिद्ध करना है कि  $ख$ ,  $ख^2$ ,  $ख^3$ , .....  $ख^n$  ये  $n$  संख्यायें हैं।

इनमें से  $म$ ,  $म$  संख्यायें ले लेकर उनके गुणनफल निकालें तो सब गुणनफलों के योग को सिद्ध करना है कि

$$\frac{(ख^n - 1) (ख^{n-1} - 1) \dots (ख^{n-m+1} - 1)}{(ख - 1) (ख^2 - 1) \dots (ख^m - 1)} \cdot \frac{म(म+1)}{ख^2}$$

मान लो कि

$फ (य) = (य + ख) (य + ख^2) \dots (य + ख^n) = य^n + प_1 य^{n-1} + \dots + प_m य^{n-m} + \dots + प_n \dots (1)$  तो  $प_m$  का मान जानने के लिये २५ प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से (१)  $य$  के स्थान में  $\frac{य}{ख}$  का उत्थापन देने से और  $ख^n$  से गुणन देने से



$$(y + x^2)(y + x^3) \dots (y + x^{n+1}) = y^n + p_1 x y^{n-1} + \dots + p_{n-1} x^{n-1} y + p_n x^n \dots (2)$$

(१) और (२) से

$$(y + x^{n+1})(y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + y_n) \\ = (y + x)(y^n + p_1 x y^{n-1} + \dots + p_{n-1} x^{n-1} y + p_n x^n)$$

दोनों पक्षों के  $y^{n-m+1}$  के गुणकों को समान करने से

$$p_m + x^{n+1} p_{m-1} = p_m x^m + p_{m-1} x^m$$

$$\therefore p_m = \frac{x^m (x^{n-m+1} - 1)}{x^m - 1} p_{m-1} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{और } p_1 = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

(३) में  $m$  के स्थान में १, २, ३, इत्यादि के उत्थापन से  $p_m$  का मान वही होगा जो कि ऊपर लिख आए हैं।

२५६। फ (य) = ० इसमें मान लो कि अव्यक्त का एक मान अ है तो फ (य) = (य - अ) फा (य)

$$\therefore \frac{f(y)}{y} = \left(1 - \frac{a}{y}\right) f_a(y)$$

$$\text{और ला } \frac{f(y)}{y} = - \left( \frac{a}{y} + \frac{a^2}{y^2} + \dots \right) + \text{ला } f_a(y)$$

इसलिये यदि ला  $\frac{f(y)}{y}$  इसका मान  $y$  के शून्य और धन

घात रूप पदों की श्रेणी में निकले तो  $\frac{1}{y}$  का जो गुणक होगा

वह दूसरे पद के  $\frac{1}{y}$  के गुणक—अ के समान अवश्य होगा यदि ला फा (य) के मान में य के सब धन ही घात हों तो ।

इस पर से फ (य) = ० इसका सब से छोटा मूल निकलेगा तैसे मान लो कि फ (य) = ० में एक से एक बड़े य के अ, क, ख, ग इत्यादि मान हैं तो

$$फ (य) = अ_० (य - अ) (य - क) (य - ख)$$

$$\frac{फ (य)}{य} = अ_० \left( 1 - \frac{अ}{य} \right) (य - ख) (य - क) \dots$$

$$= का \left( 1 - \frac{अ}{य} \right) \left( 1 - \frac{य}{क} \right) \left( 1 - \frac{य}{ख} \right) \dots$$

$$जहाँ का = अ_० \times -क \times -ख \times \dots \dots \dots$$

$$तो ला \frac{फ (य)}{य} = ला क + ला \left( 1 - \frac{अ}{य} \right) + ला \left( 1 - \frac{य}{क} \right)$$

$$+ ला \left( 1 - \frac{य}{ख} \right) + \dots \text{अब यदि य, अ और क के बीच में हो तो}$$

$$ला \left( 1 - \frac{अ}{य} \right), ला \left( 1 - \frac{य}{क} \right), ला \left( 1 - \frac{य}{ख} \right),$$

इनसे जो श्रेढी होगी उसमें ऐसे पद होंगे जिनमें बहुतों में य के ऋण घात और बहुतों में य के धन घात रहेंगे ।

$$जैसे यदि फ (य) = य^n + ख य - क = ०$$

$$तो \frac{फ (य)}{य} = ख - \frac{क}{य} + य^{n-1} = ख \left( 1 - \frac{क}{ख य} + \frac{य^{n-1}}{ख} \right)$$

$$\text{इसलिये ला } \frac{फ(य)}{य} = \text{ला ख} + \text{ला } \left(1 - \frac{क}{खय} + \frac{य^{n-1}}{ख}\right) \\ = \text{ला ख} - \text{ल} - \frac{1}{2}\text{ल}^2 - \frac{1}{6}\text{ल}^3 \dots$$

$$\text{यदि ल} = \frac{क}{खय} + \frac{य^{n-1}}{ख} = \frac{क}{खय} \left(1 - \frac{य^n}{क}\right)$$

अब जिन जिन ल, ल<sup>n+1</sup>, ल<sup>2n+1</sup> इत्यादि पदों में  $\frac{1}{य}$  के गुणक

$$\text{हैं उनको अलगाने से लघुतम अव्यक्त मान} = \frac{क}{ख} - \frac{क^n}{ख^{n+1}} \\ + \frac{२ न क^{२n-1}}{२. ख^{२n+1}}$$

$$- \frac{३ न (३ न - १)}{३.३} \frac{क^{३n-२}}{ख^{३n+१}} + \dots$$

२५७। इसी प्रकार फ(य) = ० इसमें अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>म</sub> ये अव्यक्त मान एक से एक बड़े और अवशिष्ट मानों से अल्प हैं तो

$$फ(य) = (य - अ_१) (य - अ_२) (य - अ_३) \dots (य - अ_म) \\ \times फा(य)$$

$$\text{इसलिये } \frac{फ(य)}{य^म} = \left(1 - \frac{अ_१}{य}\right) \left(1 - \frac{अ_२}{य}\right) \dots \left(1 - \frac{अ_म}{य}\right) \\ \times फा(य)$$

यहां भी दोनों पदों का लघुरिकथ लेने से ला  $\frac{फ(य)}{य^n}$  इसके  $\frac{१}{य}$  के गुणक को कहेंगे कि  $-(अ_१ + अ_२ + अ_३ + \dots + अ_म)$  यही है।

यह ऊपर के दोनों सिद्धान्त मर्फी के समीकरण मीमांसा में लिखे हैं ( See Murphy's Theory of Equations, pages 77-83)

२५=। यदि  $f(x)$ ,  $n-1$  घात का वा उससे अल्प घात का फल हो और  $f'(x)$   $n$  घात का तो कल्पना करो कि

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{ax}{y-a} + \frac{bx}{y-b} + \frac{cx}{y-c} + \dots + \frac{jx}{y-j}$$

जहाँ  $f'(x) = 0$  इसके मूल  $a, b, c, \dots, j$ , हैं जो कोई आपस में समान नहीं है।

दोनों पक्षों को  $f'(x)$  से गुण देने से

$$f(x) = ax \frac{f'(x)}{y-a} + bx \frac{f'(x)}{y-b} + cx \frac{f'(x)}{y-c} + \dots + jx \frac{f'(x)}{y-j}$$

इसमें यदि  $y=a$  तो दहिने पक्ष में प्रथम पद छोड़ और सब पद उड़ जायेंगे और प्रथम पद ५२ वें प्रक्रम से

$$f(a) = a f'(a) \text{ ऐसा होगा; इसलिये } a = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

इसी प्रकार  $b = \frac{f(b)}{f'(b)}$ , इत्यादि आ जायेंगे।

यदि  $f(x)$ ,  $n$  घात से बड़े घात का फल हो तो  $f'(x)$  के भाग से लब्धि  $f''(x)$  और शेष  $f_1(x)$  जो  $n$  घात से

अल्प घात का होगा बनालो फिर ऊपर की युक्ति से  $\frac{फ(य)}{फ(य)}$  का मान खण्ड भिन्नो में बना लो ।

$$\text{यदि } फ(य) = प_0(य-अ)^0(य-क)^1(य-ख)^2 \dots (य-ज)$$

$$\text{तो } \frac{फ(य)}{फ(य)} = \frac{आ}{(य-अ)^0} + \frac{का}{(य-क)^1} + \frac{खा}{(य-ख)^2} + \dots + \frac{जा}{य-ज}$$

ऐसा रूप बनाकर ऊपर की युक्ति से आ, का, खा, .....के प्रमाण जान सकते हैं। इस विषय में और विशेष जानना हो तो चलनकलन और चलराशिकलन देखो। ऊपर के प्रकारों की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) सिद्ध करो कि

$$\frac{n}{(य+१)(य+२) \dots (य+n+१)} = \frac{१}{य+१} - \frac{n}{१} \frac{१}{य+२} + \frac{n(n-१)}{१ \cdot २} \frac{१}{य+३} - \dots + \frac{(n-१)n}{य+n+१}$$

$$\text{मान लो कि बायां पक्ष } \frac{आ_१}{य+१} + \frac{आ_२}{य+२} + \frac{आ_३}{य+३} + \dots + \frac{आ_{n+१}}{य+n+१}$$

$$\begin{aligned} n = & आ_१(य+२)(य+३) \dots + आ_२(य+३)(य+४) \\ & \dots + आ_३(य+४)(य+५) \dots \end{aligned}$$

य के स्थान में क्रम से  $-1, -2, -3, \dots$  के उत्थापन से

$$[n = \text{आ}_1 \text{ न } \therefore \text{आ}_1 = 1$$

$$[n = -\text{आ}_2 \text{ (न-1) } \therefore \text{आ}_2 = -n$$

$$n = \text{आ}_3 \text{ (2 (न-2) } \therefore \text{आ}_3 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

इस पर से ऊपर की सरूपता उत्पन्न हुई।

२। सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{y+1} - \frac{n}{(y+1)(y+2)} + \frac{n(n-1)}{(y+1)(y+2)(y+3)} \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n n}{(y+1) \dots (y+n+1)} = \frac{1}{y+n+1} \quad |$$

$$\text{मान लो कि बायां पक्ष } \frac{\text{आ}_1}{y+1} + \frac{\text{आ}_2}{y+2} + \frac{\text{आ}_3}{y+3}$$

$$+ \dots + \frac{\text{आ}_{n+1}}{y+n+1}$$

तो छोड़गम करने से और य के स्थान में  $-1, -2$ , इत्यादि के उत्थापन से

$$\text{अ}_1 = (1-1)^n = 0, \text{अ}_2 = n(1-n)^{n-1} = 0$$

$$\text{अ}_3 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (1-1)^{n-2} = 0$$

इस प्रकार से सब के मान शून्य होंगे केवल  $\text{आ}_{n+1} = 1$  ऐसा होगा; इसलिये ऊपर की सरूपता सिद्ध हुई।

इस प्रकार अनेक चमत्कृत सरूपता उत्पन्न होती हैं।

२५९ । य और र ऐसी दो राशि हैं कि

य + र + क = एक पूरा वर्ग, य - र + क = एक पूरा वर्ग,

$$\frac{र(य+१)}{२} = \text{एक पूरा घन, } य^२ + र^२ + ख = \text{एक पूरा वर्ग,}$$

य<sup>२</sup> - र<sup>२</sup> + ग एक पूरा वर्ग,

और इन पांचों के मूलों का योग = निर्दिष्ट संख्या तो उन दोनों राशिओं के कैसे मान कल्पित किए जायें जिसमें ऊपर के पांच आलाप आप स आप घट केवल अन्त के आलाप के लिये समीकरण किया जाय ।

भास्कराचार्य से भी पहिले भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का निकाला यह प्रश्न है क्योंकि भास्कराचार्य ने अपने बाजगणित में स्पष्ट लिखा है कि “कस्याप्युदाहरणम्” अर्थात् किसी का प्रश्न यह है । यहां क, ख और ग ये व्यक्त संख्या हैं ।

यहां यदि य + र + क = यो<sup>२</sup> तो य + र = यो<sup>२</sup> - क

और यदि य - र + क = वि<sup>२</sup> तो य - र = वि<sup>२</sup> - क

$$\text{इस पर से } य = \frac{\text{यो}^२ + \text{वि}^२ - २क}{२}, र = \frac{\text{यो}^२ - \text{वि}^२}{२}$$

अब वर्गान्तर का आलाप मिलाने के लिये

$$य^२ = \frac{\text{यो}^४ + २ \text{ यो}^२ \text{ वि}^२ - ४ क \text{ यो}^२ + \text{वि}^४ - ४ क \text{ वि}^२ + ४ क^२}}{४}$$

$$र^२ = \frac{\text{यो}^४ - २ \text{ यो}^२ \text{ वि}^२ + \text{वि}^४}}{४}$$

$$\text{और } y^2 - r^2 + g =$$

$$\frac{४ \text{ यो}^२ \text{ वि}^२ - ४ \text{ क यो}^२ - ४ \text{ क वि}^२ + ४ \text{ क}^२ + ४ \text{ ग}}{४}$$

$$= \text{यो}^२ \text{ वि}^२ - \text{क यो}^२ - \text{क वि}^२ + \text{क}^२ + \text{ग}$$

$$= \text{यो}^२ \text{ वि}^२ - २ \text{ यो वि क} + \text{क}^२$$

$$- (\text{क यो}^२ - २ \text{ यो वि क} + \text{क वि}^२) + \text{ग}$$

$$= (\text{यो वि} - \text{क})^२ + \text{ग} - \text{क} (\text{यो} - \text{वि})^२$$

इस लिये यदि  $\text{ग} = \text{क} (\text{यो} - \text{वि})^२$  तो

$$y^2 - r^2 + g = \text{एक पूरा वर्ग} = (\text{यो वि} - \text{क})^२$$

परन्तु जब  $\text{ग} = \text{क} (\text{यो} - \text{वि})^२$  तब

$$(\text{यो} - \text{वि})^२ = \frac{\text{ग}}{\text{क}} \therefore \text{यो} - \text{वि} = \sqrt{\frac{\text{ग}}{\text{क}}} \text{ और यो} = \text{वि} \sqrt{\frac{\text{ग}}{\text{क}}}$$

अर्थात् वर्गान्तर के क्षेप में राशियों के योग वियोग क्षेप से भाग देकर वर्गमूल जो हो उसे कल्पित वियोग मूल में जोड़ देने से योग मूल का प्रमाण होता है। फिर इनके उत्थापन से यो और वि के फल रूप में य और र आ जायेंगे जिन से फिर आगे क्रिया करनी चाहिए।

इस प्रकार से राशिकल्पना करने के लिये अपने बीजगणित में भास्कर ने यह सूत्र बनाया है।

सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियागमूलं प्रथमं प्रकल्प्य ।

योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यद्वर्गान्तरक्षेपकत पदं स्यात् ॥

तेनाधिकं तत्तु वियागमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ ।

स्वक्षेपकोनौ हि वियागयोगौ स्यातां तत संक्रमणेन राशी ॥



ऊपर जो इसकी उपपत्ति लिखी है वह कृष्णदैवज्ञ की बनाई है। (बीजगणित की टीका बीजाङ्कुरा देखो)

भास्कर के प्रकार में यदि  $\frac{ग}{क} = \frac{०}{०}$  ऐसा हो अर्थात् जिस प्रश्न में  $क = ० = ग$  ऐसा हो वहां पर लुप्तमान होने से यह पता न लगेगा कि  $\sqrt{\frac{ग}{क}}$  इसका ठीक ठीक क्या मान है; इस-लिये ऐसे स्थानों में भास्कर के प्रकार का व्यवहार होगा। इसके लिये मेरी ऐसी कल्पना है।

कल्पना करो कि  $प = \sqrt{\frac{ग}{क}}$  तो ऊपर लिखी हुई क्रिया से

$$यो = वि + प, य = \frac{यो^2 + वि^2 - २ क}{२} = \frac{२ वि^2 + २ विप + प^2 - २ क}{२}$$

$$२ = \frac{यो^2 - वि^2}{२} = \frac{२ वि प + प^2}{२}$$

$$य^2 = \frac{४ वि^४ + ८ वि^३ प + ४ वि^२ प^2 - ८ क वि^२ + ४ वि^२ प^2}{४}$$

$$+ \frac{४ वि प^३ - ८ क प वि + प^४ - ४ क प^२ + ४ क^२}{४}$$

$$२^२ = \frac{४ वि^२ प^२ + ४ वि प^३ + प^४}{४}$$

$$\text{और } य^२ + २^२ + ख = \frac{४ वि^४ + ८ प^३ वि^३ + १२ प^२ वि^२ - ८ क वि^२}{४}$$

$$+ \frac{८ प^३ वि - ८ क प वि + २ प^४ - ४ क प^२ + ४ क^२ + ४ ख}{४}$$

$$= वि^४ + २ प वि^३ + ३ प^२ वि^२ + २ प^३ वि + \frac{प^४}{२}$$

$$- २ क वि^२ - २ क प वि - क प^२ + क^२ + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + वि (२ प^३ - २ क प) + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + २ प वि (प^२ - क) + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि) + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि) + (प^२ - क)^२ - (प^२ - क)^२ + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= \{ (वि^२ + प वि) + (प^२ - क) \}^२ - (प^२ - क)^२ + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

बड़े कोष्ठ के बाहर के सब पद मिल कर यदि शून्य हो जायँ तो यह पूरा वर्ग हो जायगा इस लिये

$$० = \frac{प^४}{२} + क^२ - ग - (प^२ - क)^२ + ख = \frac{प^४}{२} + क^२ - ग$$

$$- प^२ + २ क प^२ - क^२ + ख$$

$$= २ क प^२ - \frac{प^४}{२} - ग + ख = २ ग - \frac{प^४}{२} - ग + ख = ग + ख - \frac{प^४}{२}$$

$$\therefore \frac{प^४}{२} = ग + ख \text{ और } प = \left\{ २(ग + ख) \right\}^{\frac{१}{४}}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि वर्गान्तर और वर्गयोग क्षेत्रों के दूने योग के मूल का मूल जो हो वही  $\sqrt{\frac{ग}{क}}$  इसका मान होता है। अब चाहे ग, और क शून्य हों वा संख्यात्मक हों मेरे प्रकार का कहीं भी व्यभिचार न होगा।

इसपर मेरा बनाया यह सूत्र है।

वर्गान्तरक्षेपकसंमितिर्युता क्षेपेण कृत्योर्युतिजेन वै ततः ।  
द्विघ्नात् पदं तत्पदयुग्वियोगजं मूलं युतेर्मूलमतस्तयोर्मिती ॥  
अब पाँचवाँ आलाप मिलाने के लिये यदि

$$\begin{aligned} \sqrt{य - र + क} &= \text{वि तो} \\ \sqrt{य + र + क} &= \text{यो} = \text{वि + प} \\ \sqrt{य^२ - र^२ + ख} &= \text{यो वि - क} = \text{वि}^२ + \text{प वि - क} \\ \sqrt{य^२ + र^२ + ख} &= \text{वि}^२ + \text{प वि - क} + \text{प}^२ \\ \left\{ \frac{२ (य + १)}{१} \right\}^{\frac{१}{४}} &= \text{वि} + \frac{१}{२} (ख + ग \frac{१}{२}) \end{aligned}$$

$$\text{क्योंकि } य + १ = \frac{२ \text{ वि}^२ + २ \text{ वि प} + \text{प}^२ - २ क + २}{२}$$

$$r = \frac{2 \text{ वि प} + \text{प}^2}{2}$$

$$\frac{4 \text{ प वि}^2 + 4 \text{ प}^2 \text{ वि}^2 + 4 \text{ प}^3 \text{ वि} - 4 \text{ क प वि} + 2 \text{ प वि}}{2 \text{ प}^2 \text{ वि}^2 + 2 \text{ प}^3 \text{ वि} + \text{प}^4 - 2 \text{ प}^2 \text{ क} + 2 \text{ प}^2}$$

$$\text{प} \{ 4 \text{ वि}^2 + 4 \text{ प वि}^2 + (4 \text{ प}^2 - 4 \text{ क} + 2) \text{ वि} \} + \text{प}^4 - 2 \text{ प}^2 \text{ क} + 2 \text{ प}^2$$

$$= \text{प} \{ 4 \text{ वि}^2 + 4 \text{ प वि}^2 + (4 \text{ प}^2 - 4 \text{ क} + 2) \text{ वि} \} + 2 \text{ ग} + 2 \text{ ल} - 2 \text{ ग} + 2 \text{ प}^2$$

इसलिये

$$\frac{r(\text{प} + 1)}{2}$$

$$= \text{प} \frac{\{ 4 \text{ वि}^2 + 4 \text{ प वि}^2 + (4 \text{ प}^2 - 4 \text{ क} + 2) \text{ वि} \} + 2 \text{ ल} + 2 \text{ प}^2}{2}$$

अब यदि यह पूरा घन होगा तो

३ (४प)<sup>३</sup> इससे ६ प<sup>३</sup> यह अवश्य निःशेष होगा और लब्धि का घन = २ ल + २ प<sup>२</sup> ऐसा होगा। कहपना करो कि लब्धि = ल तो १ ल (४प)<sup>३</sup> = ६ प<sup>३</sup> ∴ ल<sup>३</sup> (४प)<sup>३</sup> = ८प<sup>३</sup> अर्थात्

१६ प<sup>३</sup> ल<sup>३</sup> = ८प<sup>३</sup> ∴ ल<sup>३</sup> =  $\frac{\text{प}^3}{2}$ । परन्तु पहिले सिद्ध कर आए हैं

कि  $\frac{\text{प}^3}{2} = \text{ल} + \text{ग}$ , इसलिये

$ल^१ = \frac{प^४}{२} = ख + ग = २ख + २प^२ \therefore \frac{ग - ख}{२} = प^२$ ; इसलिये यदि

$\frac{ग - ख}{२} = प^२ = \frac{ग}{क}$  तो पांचो आलाप भास्कर की युक्ति से मिल सकते हैं।

जब  $\frac{ग - ख}{२} = \frac{ग}{क}$  तो छेदगम से

क ग - क ख = २ ग, वा क (ग - ख) = २ ग

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि वर्गान्तर क्षेप में वर्गयोग क्षेप को घटाने से जो शेष बचे उससे योगान्तर क्षेप को गुण दें, गुणनफल दूने वर्गान्तर क्षेप के तुल्य हो तो भास्कर की क्रिया से कहेंगे कि प्रश्न ठीक है, उत्तर निकल सकता है।

इसी प्रकार पांचवा आलाप ऐसा हो कि  $\frac{य र}{२} + २$  यह एक पूरा घन है तो यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से सब बातों का परामर्श कर सकते हो।

( प्रश्न के उत्तर के लिये भास्कर का बीजगणित देखो। )

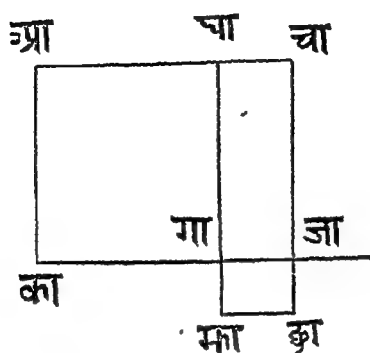
२६०। य र = अ य + क र + ख इसमें चाहते हैं कि य और र के अभिन्न घनात्मक मान निकालें।

इसके लिये भास्कर चार्य ने ऐसी कल्पना की है कि मान लो कि जिस आयत का एक भुज य और दूसरा र है उसका क्षेत्रफल य र है जो कि अ य + क र + ख के समान है।

	आ	अ	च	पा
प			का	क
				भा
का		जा		मा
			र	

२ भुज के समानान्तर भुज आ पा में यदि एक खण्ड आ च=अ का र लें तो य, अ भुजों से नये आयत च का का क्षेत्रफल=अ य होगा। और य भुज के समानान्तर पा मा में पा भा=क काट लें तो च भा का क्षेत्रफल=क (२-अ)=क र-अ क, इन दोनों को समग्र क्षेत्रफल य र में घटा देने से बा मा आयत का फल=य र-अ य-क र+अ क=अ य+क र+ख-अ य-क र+अ क=अ क+ख, इसलिए बा जा=भा मा का कोई अभिन्न मान मान उसका भाग अ क+ख व्यक्त संख्या में देनेसे बा भा=जा मा का मान होगा। इन दोनों में कम से आ च=क और काना=अ जोड़ देने से य और र के मान अभिन्न आ जायेंगे।

	का	र	का	र	भा
चा					का
		ओ			पा
		य			
जा	का	र	गा		



यदि अ और क ऋण होंगे तो छा जा - छा चा = छा जा - क = य, छा भा - अ = र होंगे जहाँ भा = अ, का = क, यदि अ > र और क > य से तो

क - छा जा = य

अ - छा भा = र

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि

य र = अ य + क र + ल इस समीकरण में दोनों अव्यक्तों के गुणन फल में व्यक्ताङ्क ल जोड़ कर इसमें ऐसे एक इष्ट = ६ का भाग दो जिसमें लब्धि = ल अभिन्न हों। फिर र + अ = र वा इ - अ = र और ल + क = य वा ल - क = य।

जैसे यदि य र = ४ य + ३ र + २ तो यहाँ ४ = अ, ३ = क और ल = २ इस लिये अ क + ल = ४ × ३ + २ = १४। इसमें इष्ट = ६ = २ का भाग देने से ल = ७। इन पर से य = ल + क = ७ + ३ = १० और र = इ + अ = २ + ४ = ६।

इष्ट के वश अनेक उत्तर होंगे।





=अ, व्यासार्द्ध से ऐसा का गा आ वृत्त बना जिससे दिए हुए वृत्त का समान दो भाग हो गया। का क प कोण का चापीय मान व मान लो तो

का प आ चाप=२ अ व=ध, का आ पूर्ण ज्या=२ अ ज्याष=जी  
प चा=श, चा गा=श, का गा आ चाप=ध, का प आ चाप क्षेत्र  
का फल

$$= \frac{अ(ध - जी) + श जी}{२}$$

$$\text{का गा आ चाप क्षेत्र का फल} = \frac{अ, (ध, - जी) + श, जी}{२}$$

$$\text{दोनों चाप क्षेत्रों का फल} = \text{आधा दिया हुआ वृत्त फल} \\ = \frac{\pi अ^२}{२}$$

$$= \frac{अ(ध - जी) + श जी + श, जी + अ, (ध, - जी)}{२}$$

$$= \frac{अ(ध - जी) + अ, जी + अ, (ध, - जी)}{२}$$

$$= \frac{अ(ध - जी) + अ, ध,}{२}$$

$$= \frac{अ(२ अ व - २ अ ज्याष) + २ अ ज्या ३ व ध,}{२}$$

$$= अ(अ व - अ ज्याष) + अ ज्याष ३ व २ अ ज्या ३ व (\pi - व)$$

$$= अ\{व - ज्याष + २ ज्या^२ ३ व (\pi - व)\}$$

$$= \sin^2 \{ \psi - \text{ज्या}\psi + (1 - \text{कोज्या}\psi) (\pi - \psi) \}$$

$$= \sin^2 \{ \psi - \text{ज्या}\psi + \pi - \pi \text{ कोज्या}\psi - \psi + \psi \text{ कोज्या}\psi \}$$

$$= \sin^2 \{ \pi + \psi \text{ कोज्या}\psi - \pi \text{ कोज्या}\psi - \text{ज्या}\psi \}$$

$$= \sin^2 \{ \pi - \text{कोज्या}\psi (\pi - \psi) - \text{ज्या}\psi \}$$

अ<sup>१</sup> से दोनों पक्षों में भाग देने से और  $\frac{\pi}{2}$  को घटा देने से

$$\frac{\pi}{2} - \{ \text{कोज्या}\psi (\pi - \psi) + \text{ज्या}\psi \} = f(\psi) = 0$$

१० वें प्रक्रम से ज्या  $(\pi - \psi) + \text{कोज्या}\psi - \text{कोज्या}\psi$   
 $= \text{ज्या}\psi (\pi - \psi) = f'(\psi)$  पहिले स्थूल मान मान लो कि  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$  तो

$$f(\psi_1) = \frac{\pi}{2} - 1 = 1.5707956326 - 1 = .5707956326 =$$

$$f'(\psi_1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = 1.5707956326 =$$

१४४ प्रक्रमस्थ न्यूटन की रीति से

$$\frac{f(\psi_1)}{f'(\psi_1)} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi} = \psi = .36328184$$

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \psi_2 = 1.20751379 = 68^\circ, 11', 12''$$

कोज्याष <sub>२</sub> = ३५५३१०६	ज्याष <sub>२</sub> = ६३४७४८१
$\pi - \varphi_2 = १.६३४००२६$	$= १.६३४०४०६०$
<hr/>	<hr/>
५८०२१३०	१७४०६२८६१
६६७०२१	५८०२१२८
६६७०२	७७३६१७
८०२	१३५३८३
१६३	७७३६
१७	१५४७
<hr/>	<hr/>
कोज्याष <sub>२</sub> ( $\pi - \varphi_2$ ) = ६८७१८६५	१६
ज्याष <sub>२</sub> = ६३४७४८१	$\kappa'(\varphi_2) = १.८०५८४२६१$
<hr/>	<hr/>
यों = १.१६२१६३४६	$\frac{\kappa(\varphi_2)}{\kappa'(\varphi_2)} = -०.०२४२४७० = \psi$
$\frac{\pi}{2} = १.५७०७९६३$	
<hr/>	
$\kappa(\varphi_2) = -०.०५११३८३$	
$\varphi_2 - \psi = \varphi_1 = १.२३५८३६८ = ७०^\circ, ४८', २६'', ३६'$	
कोज्याष <sub>१</sub> = ३२८७३०६	ज्याष <sub>१</sub> = ६४४४२३६
$\pi - \varphi_1 = १.६०५५५५६$	$= १.६०५७५५६$
६०.७८२३	६३२४४४६
<hr/>	<hr/>
५७ ७ ६७७	१७१५१८०३१
३८११५१२	७६२३०२४
१५२४६०४	७६२३०२
१३३४०३	७६२३०
५७१७	३८१२
१७१	५७२
<hr/>	<hr/>
	११४
कोज्याष <sub>१</sub> ( $\pi - \varphi_1$ ) = ६२६४८०८४	$१.७६६८४०८५ = \kappa'(\varphi_1)$

$$\begin{aligned}
 \text{ज्या } \varphi_1 &= '६४४४२३६ \\
 \frac{\text{यो}}{\pi} &= १.५७०६०४४४ \quad \frac{\text{फ}(\varphi_1)}{\text{फ}'(\varphi_1)} = -०.००००६०१ = \text{च} \\
 \frac{\pi}{२} &= १.५७०७९६३३ \\
 \text{फ}(\varphi_1) &= -०.०००१०८१४ \\
 \varphi_1 - \text{च} = \varphi_2 &= १.२३५६६६ = ७०^{\circ}, ४८', ४२'', २''',
 \end{aligned}$$

$$\text{कोज्या } \varphi_2 = '३२८६७४२ \quad \text{ज्या } \varphi_2 = '६४४४४३४$$

$$\pi - \varphi_2 = १.६०५६६५८$$

$$४४७६८२१$$

$$५७१७०८७४$$

$$३८११३६२$$

$$१५२५५५६$$

$$११४३४१$$

$$१३३३६$$

$$७६२$$

$$३८$$

$$\text{कोज्या } \varphi_2 (\pi - \varphi_2) = '६२६३५३०२$$

$$\text{ज्या } \varphi_2 = '६४४४४३४$$

$$\text{यो} = १.५७०७९६३३$$

$$\frac{\pi}{२} = १.५७०७९६३३$$

$$\text{फ}(\varphi_2) = -०.००००००१ = ० \text{ स्वल्पान्तर से}$$

इस पर से

$$\text{अ}_1 = २ \text{ अज्या } \frac{\pi}{२} = २ \text{ अ ज्या } (३५, २४', २१'', १''')$$

$$= २ \text{ अ} \times '५७६३६४२५$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{२३ \times ५७६३६४२५}{१००००००००} = \frac{२३ \times ११५८७२८५}{२०००००००} = \frac{२३ \times २३१७४५२}{४००००००} \\
 &= \frac{२३१७४५७३}{२००००००}
 \end{aligned}$$

यही मान टेलर के सिद्धान्त से भी आवेगा। चलनकलन का २५ प्र० देखो।

इसके लिये यह मेरा सूत्र है :—

नगशरवेदनगक्षारामकरैराहता त्रिभज्यास्वा।

प्रयुतद्वयेन भक्ता व्यासदलं स्यात् स्ववृत्तस्य ॥

२६२। ऊपर के प्रश्न में यदि  $\pi$  बिन्दु के का गा आ चाप से दिए हुए का  $\pi$  आ वृत्त का न भाग हो तो ऊपर ही की क्रिया से

$$\frac{\pi(n-1)}{n} - \left\{ \text{कोज्या}(\pi - \phi) + \text{ज्या}(\phi) \right\} = 0 \quad (\phi = 0)$$

ऐसा समीकरण होगा। इसमें पहिला  $\phi$  का स्थूल मान  $\frac{\pi}{n}$  इतना मान कर तब न्यूटन की रीति से असकृत् कर्म करना चाहिए।

यहां यदि त्रिकोणमिति से

$$\text{कोज्या}(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \quad \text{तो}$$

$$\text{कोज्या}(\pi - \phi) = \pi - \frac{\pi\phi^2}{2!} + \frac{\pi\phi^4}{4!} - \frac{\pi\phi^6}{6!} + \dots$$

$$- \psi + \frac{\psi^2}{2!} - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^4}{4!} - \dots \dots$$

$$\text{ज्यास} = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \frac{\psi^7}{7!} + \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्यास } (\pi - \psi) + \text{ज्यास} &= \pi - \frac{\pi\psi^2}{2!} + \frac{\pi\psi^4}{4!} - \frac{\pi\psi^6}{6!} + \dots \dots \dots \\ &+ \frac{\psi^3}{3} - \frac{\psi^5}{5 \cdot 3!} + \frac{\psi^7}{7 \cdot 5!} - \frac{\psi^9}{9 \cdot 7!} + \dots \dots \dots \\ &= \pi - \frac{\pi\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\pi\psi^4}{4!} - \frac{\psi^5}{5 \cdot 3!} - \frac{\pi\psi^6}{6!} + \frac{\psi^7}{7 \cdot 5!} \\ &+ \frac{\pi\psi^8}{8!} - \frac{\psi^9}{9 \cdot 7!} + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

इस पर से

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)\pi}{n} \left\{ \text{कोज्यास } (\pi - \psi) + \text{ज्यास} \right\} &= \text{फ}(\psi, = 0 \\ &= -\frac{\pi}{n} + \frac{\pi\psi^2}{2!} - \frac{\psi^3}{3} - \frac{\pi\psi^4}{4!} + \frac{\psi^5}{5 \cdot 3!} + \frac{\pi\psi^6}{6!} - \frac{\psi^7}{7 \cdot 5!} \\ &- \frac{\pi\psi^8}{8!} + \frac{\psi^9}{9 \cdot 7!} + \dots \dots \dots \\ &= \pi \left( -\frac{1}{n} + \frac{\psi^2}{2!} - \frac{\psi^4}{4!} + \frac{\psi^6}{6!} - \frac{\psi^8}{8!} + \dots \right) \\ &- \left( \frac{\psi^3}{3} - \frac{\psi^5}{5 \cdot 3!} + \frac{\psi^7}{7 \cdot 5!} - \frac{\psi^9}{9 \cdot 7!} + \dots \dots \right) \end{aligned}$$

ऐसा समीकरण को फौला सकते हो ।

## अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। २२१ प्रक्रम की परिभाषा से सिद्ध करो कि स (य'—य'र) इसके सब अवलम्बधों स के चलस्पद्धी होंगे यदि चल अर्थात् अव्यक्त संख्या  $\frac{य'}{र}$  मानी जाय ।

२। यदि  $आ_१, आ_२, आ_३ \dots \dots आ_n$  एक ही तद्रूप और भ्रुवशक्तिक फल सम्बन्धी  $\frac{फ(य)}{य-इ_१}, \frac{फ(य)}{य-इ_२}, \frac{फ(य)}{य-इ_३}, \dots \dots \frac{फ(य)}{य-इ_n}$  इनके अवलम्बधों हों जहां सोपान सो है और  $इ_१, इ_२, इ_३, \dots \dots इ_n$

$फ(य) = ०$  इसके मूल हैं तो सिद्ध करो कि

$\frac{त=१}{यौ आ_n(य-इ_n)}$  सो यह  $फ(य) = ०$  इसका चलस्पद्धी  $\frac{त=१}{त=१}$

होगा । सङ्केत के किये १६७ प्रक्रम का (२) उदाहरण देखो ।

३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें  $१ + ५\sqrt{-१}, ५ - \sqrt{-१}$  ये अव्यक्त के मान हों और समीकरण अकरणी-गत संभाव्य गुणक का हो ।

$$३० य^४ - १२य^३ + ७२य^२ - ११२य + ६७६ = ०$$

४।  $य^४ + २य^३ - ५य^२ + ६य + २ = ०$  इसमें अव्यक्त के मान बताओ । इतना जानते हैं कि एक मान  $-२ + \sqrt{३}$  है ।

५।  $y^3 + 2py^2 + 3p^2y^2 + 2p^3y - p^4 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ। उ० समीकरण का रूपान्तर  $(y^2 + py + p^2)^2 - p^2 - p^4 = 0$  ऐसा कर लो।

६।  $y^3 + py^2 + p^2y + p^3 = 0$  इसमें यदि  $y$  मान  $अ_1$ ,  $अ_2$  और  $अ_3$  हों तो  $(अ_2 + अ_3 - अ_1)^3 + (इ_3 + इ_1 - इ_2)^3 + (इ_1 + इ_2 - इ_3)^3$  इसका मान बताओ।

$$उ० २०प_3 - प_3^3$$

$$७। y^3 - \frac{5}{2}y^2 - \frac{10}{12}y + \frac{1}{108} = 0 \text{ इसको ऐसा बदलो}$$

जिसमें भिन्न न रहे। मान लो कि  $my = r \cdot y = \frac{r}{m}$  इसके उत्थापन से

$$\frac{r^3}{m^3} - \frac{5}{2} \frac{r^2}{m^2} - \frac{5}{3^2 \cdot 2} \frac{r}{m} + \frac{1}{3^3 \cdot 2^2} = 0$$

$m^3$  से गुण देने से

$$r^3 - \frac{5}{2}mr^2 - \frac{10}{3^2 \cdot 2}mr + \frac{m^3}{3^3 \cdot 2^2} = 0$$

इससे स्पष्ट है कि यदि  $m=6$  तो अभिन्न समीकरण

$$r^3 - 15r^2 - 18r + 2 = 0 \text{ ऐसा होगा।}$$

८। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान  $y^3 - 3y^2 + 6y^2 + 4y - 2 = 0$  इसके अव्यक्त मान के हरात्मक मान के तुल्य हों।

$$उ २२r^3 - ५२r^2 - ७२r + ३२ - १ = ०$$



६। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$y^2 - ४y^3 + ७y^2 - १७y + ११ = 0$  इसके अव्यक्त मान से संख्या में ४ अल्प हों।

$$उ. ४^2 + ११४^3 + ४३४^2 + ४४४ - ९ = 0$$

१०।  $y^2 - ४y^3 - १८y^2 - ३y + २ = 0$  इस पर से एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें तीसरा पद उड़ जाय।

$y=२-३$ , और  $y=२+३$  ऐसा मानने से तीसरा पद उड़ जायगा।

११। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$y^3 - y^2 + ८y - ६ = 0$  इसके अव्यक्तमान के वर्ग के समान हों।

$$उ. ४^3 + १४४^2 + ४२४ - ३६ = 0$$

१२। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$y^n + ८, y^{n-१} + ८, y^{n-२} + \dots + y + ८ = 0$  इसके अव्यक्त मान के घन के तुल्य हों।

ऊपर के समीकरण को

$$(y^n + y^{n-१}y^१ + y^{n-१}y^१ + \dots) + y(y^{n-१} + y^{n-१}y^१ + \dots) + y^2(y^{n-२} + y^{n-२}y^१ + y^{n-२}y^१ + \dots)$$

$$= पा + बा य + ता य^२, \text{ जहाँ पा, बा और ता } y^१ \text{ के फल हैं।}$$

अब समीकरण में अव्यक्त के मान यदि  $अ_१, अ_२, \dots, अ_n$  हों तो  $पा + बा य + ता य^२ = (य - अ_१)(य - अ_२) \dots$

$$(य - अ_n), \dots (१)$$

य के स्थान में घा य, घा<sup>२</sup> य के उत्थापन देने से जहां घा,  
घा<sup>२</sup> एक के घन मूल हैं

$$\text{पा} + \text{घा वा य} + \text{घा}^2 \text{ ता य}^2 \equiv (\text{घा य} - \text{अ}_1) (\text{घा य} - \text{अ}_2) \dots$$

$$(\text{घा य} - \text{अ}_n) \dots (2)$$

$$\text{पा} + \text{घा}^2 \text{ वा य} + \text{घा ता य}^2 \equiv (\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_1) (\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_2) \dots$$

$$(\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_n) \dots (3)$$

(१), (२) और (३) को परस्पर गुण देने से और  
 $\text{र} + \text{घा} + \text{घा}^2 = 0$  करने से

$$\text{पा}^3 + \text{वा}^3 \text{ य}^3 + \text{ता}^3 \text{ य}^3 - 3 \text{ पा वा ता य}^3 \equiv (\text{य}^3 - \text{अ}_1^3)$$

$$(\text{य}^3 - \text{अ}_2^3) \dots (\text{य}^3 - \text{अ}_n^3) \text{ इसमें यदि य}^3 = \text{र तो}$$

$$\text{पा}^3 + \text{वा}^3 \text{ र} + \text{ता}^3 \text{ र}^2 - 3 \text{ पा वा ता र}^3 \equiv (\text{र} - \text{अ}_1)$$

$$(\text{र} - \text{अ}_2) \dots (\text{र} - \text{अ}_n)$$

अब पा<sup>३</sup>, वा<sup>३</sup> और पा वा ता के मान में भी य<sup>३</sup> के स्थान  
में र के उत्थापन से अभीष्ट समीकरण बन जायगा।

१३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$$\text{य}^3 - \text{य}^3 + 2\text{य}^3 + 3\text{य} + 1 = 0 \text{ इसके अव्यक्त मान के घन}$$

$$\text{के समान हों। उ. र}^3 + 18\text{र}^2 + 50\text{र} + 1 = 0$$

१४। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$$\text{अ य}^3 + \text{क य}^2 + \text{ख य} + \text{ग} = 0 \text{ इसके अव्यक्त मान के घन}$$

$$\text{के समान हों।}$$

$$\text{उ. अ}^3 \text{ र}^3 + 3 (\text{अ}^3 \text{ ग} + 6 \text{ क}^3 - 6 \text{ अ क ख}) \text{ र}^2$$

$$+ 3 (\text{अ ग र}^2 + 6 \text{ ख}^3 - 6 \text{ क ख ग}) \text{ र} + \text{ग}^3 = 0$$

१५। एक ऐसा समीकरण बनाओ, जिसके अव्यक्त मान  
 $y^2 + ६y^2 + ६y + ४ = ०$  इसके दो दो अव्यक्तमानों के  
 अन्तरों के वर्ग के समान हों।

$$\text{उ. } y^4 - १८y^2 + ८१y = ०$$

१६। यदि  $अ_1 y^3 + ३ अ_1 y^2 + ३ अ_2 y + अ_3 = ०$  इसके  
 अव्यक्त मान  $इ_1, इ_2$  और  $इ_3$  हों तो एक ऐसा समीकरण  
 बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$$(इ_1 - इ_2) (इ_1 - इ_3), (इ_2 - इ_3) (इ_2 - इ_1), (इ_3 - इ_1) (इ_3 - इ_2)$$

$$\text{ये हों। उ० } २^3 + \frac{६ वा}{अ_0} २^2 - \frac{२७ (मा^२ + ४ वा^२)}{अ_0^२} = ०$$

ग और ग के लिये २२३ प्रकम का १ उदाहरण देखो।

१७।  $y^2 + म प y^2 + म^२ प_१ y^2 + म^२ प y + म^३ = ०$  इसमें  
 अव्यक्त के मानों को बनाओ। उ०  $म^२ y^2$  इससे भाग दे देने से

$$\left(\frac{प^२}{म^२} + \frac{म^२}{य^२}\right) + प \left(\frac{य}{म} + \frac{म}{य}\right) + प_१ = ० \text{ ऐसा एक हरात्मक}$$

समीकरण बन जायगा।

१८। यदि  $२ y^2 + y - ६ = फ (य)$  तों बताओ  $फ (य)$   
 कब महत्तम वा न्यूनतम होगा।

$$\text{उ. जब } y = -\frac{४६}{८} \text{ तब } फ (य) \text{ न्यूनतम।}$$

१९। यदि  $फ (य) = ३y^३ - १६ y^२ + ६ y_२ - ४८ y + ७$   
 तो कब इस फल का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा।

$$\text{उ } y = ५ \text{ तो } फ (य) \text{ न्यूनतम।}$$


२०।  $y^2 + 20y^3 + 30y^4 + 12y^5 - 7y + 6 = 0$  इसमें  
धन मान की प्रधान सीमा क्या होगी। उ.  $2\frac{1}{2}$

२१।  $y^2 + y^3 - 4y^4 - 3y^2 + 3y + 1 = 0$  इसमें एक  
अव्यक्तमान  $-1$  और  $0$  के बीच का आसन्नमाना नयन से  
ले आओ।

उ—२८४६३

२२।  $अ y^3 + 3 क y^2 + 3 ख y + ग = 0$  इसका रूप  
 $२^3 - ११ = 0$  ऐसा बनाना है। उ. मान लो कि  $२ = अ. + भ, य$   
 $+ य^२$  फिर २३४ प्रक्रम की क्रिया करो।

२३। असंभवों का गुणन, भजन कैसे करते हो।

२४। सिद्ध करो कि यदि  $n = \infty$  तो  $\frac{n}{n}$    $२$  इसका

कोई अङ्क  $1, \infty$  यह होगा। २४७ प्रक्रम देखो।

२५।  $y^{-2} - 2y^{-3} + 3y^{-4} + 4y^{-5} + 5y^{-6} + 6 = 0$   
बताओ इसमें  $y$  के कितने विध मान आधेगे उ.  $0$  विध।

२६। यदि अ, क, ख, ग, ... इत्यादि  $n$  संख्याएँ हों तो  
सिद्ध करो कि  $\frac{(य-क)(य-ख)}{(अ-क)(अ-ख)}$  इस तरह के जो  $n$  फल  
होंगे उनका योग एक के समान होगा।

यहाँ  $f(y) = (य-अ)(य-क)(य-ख) \dots$  मान  
लो और

$\frac{१}{फ(य)}$  इसका रूप खण्ड भिन्नों में लाकर फ ( य ) से गुण दो ।

२७। एक समीकरण का जिसमें सर और व्यत्यास दोनों हैं कैसे ऐसा रूपान्तर करें जिसमें सब सर ही हो और दूसरा कैसा रूपान्तर करें जिसमें सब व्यत्यास ही हो ।

( १ ) उ. धन प्रधान सीमा जान लो कि सी है तो फिर  $य = र + सी$  फिर ऐसा कल्पना कर समीकरण में उत्थापन दो तो र के फल स्वरूप में ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें र का कोई धन मान न आवेगा; इसलिये अब इसमें सर ही होंगे ।

( २ ) इसी प्रकार सब से छोटी धन प्रधान सीमा सी, हो तो  $य = र + सी$ , ऐसा मानने से र के रूप में जो समीकरण होगा उसमें र का कोई ऋण मान न होगा; इसलिये सब व्यत्यास ही होगा ।

२८। यदि न घात समीकरण का अन्त पद व्यक्ताङ्क  $प_n$  हो और न विषम संख्या और अव्यक्त मान सब गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त का एक मान  $न\sqrt{प_n}$  यह होगा

२९। सिद्ध करो कि  $य^{२n} - पय^{२n} + ब = ०$  इसमें चार भिन्न-

भिन्न संभाव्य अव्यक्त मान होंगे यदि  $\left(\frac{प_n}{न}\right)^n > \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{n-त}$

और यदि  $\left(\frac{त प}{न}\right)^n = \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{n-त}$  तो उन चारों में दो दो तुल्य

होंगे और यदि  $\left(\frac{t}{n}\right)^n < \left(\frac{t-b}{n-t}\right)^{n-t}$  तो कोई संभव मान न होगा। प और ब संभाव्य घन संख्या हैं। उ. समीकरण को फ (य) कहो तो फ' (य) =  $2n y^{2n-1} - t p y^{2n-1}$  इससे

यदि फ' (य) = 0 तो य = 0, वा +  $\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-t)}}$  = अ<sub>२</sub> वा

$$-\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-t)}} = \text{अ}_1$$

अब ७३ वें प्रक्रम से फ (य) में  $-\infty, -\text{अ}_1, 0, \text{अ}_1, +\infty$  के उत्थापन से

$$\text{फ}(-\infty) +, \text{फ}(0) = +, \text{फ}(+\infty) = +$$

$$\text{फ}(\text{अ}_1) = \text{फ}(\text{अ}_2) = \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} - p \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{t}{n-t}} + b$$

$$= \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} - \frac{n}{t} p \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} + b$$

$$= \left(\frac{t-n}{t}\right) \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} + b = b - \left(\frac{n-t}{t}\right) \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}}$$

इसलिये यदि

$$b < \left(\frac{n-t}{t}\right) \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}}$$

$$\text{वा } \left( \frac{त ब}{न-त} \right)^{न-त} < \left( \frac{त प}{न} \right)^{\frac{न}{न-त}} \text{ तो}$$

$$फ(अ_1) = फ(अ_2) = -तब$$

$$\begin{array}{ccccc} फ(-\infty), & फ(अ_1), & फ(0), & फ(अ_2), & फ(\infty) \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

इसलिये चार व्यत्यास होने से चार भिन्न भिन्न संभाव्य मान— $\infty$  और  $अ_1, अ_2$  और  $0, 0$  और  $अ_2$ , और  $अ_2$  और  $\infty$  के बीच में होंगे। और बातें प्रसिद्ध हैं।

३०।  $फ(y) = y^4 + प_2 y^2 + प_4 y + प_6 = 0$  इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान  $अ, \frac{म}{अ}, क, \frac{म}{क}$  इस चाल के हों।

३१। वर्गमूल निकालने की युक्ति से दिखलाओ कि  $y^4 + प_1 y^2 + प_2 y^2 + प_4 y + प_6 = 0$  इसको एक वर्गसमीकरण के रूप में ला सकते हैं यदि  $प_1^2 - ४ प_2 प_4 + प_4^2 = 0$  वा  $(प_1^2 - ४ प_2 प_4) प_6 + प_6^2 = 0$

३२। सिद्ध करो कि  $y^4 + \frac{१}{४} अ y^2 + क y + ख = 0$  इसमें सब संभाव्य मान कभी नहीं होंगे यदि  $अ^३ + क^३$  यह धन संख्या हो तो। (स्टर्म का सिद्धान्त लगाओ)

३३।  $y^4 + प_1 y^2 + प_2 y^2 + प_4 y + प_6 = 0$  इसमें यदि अव्यक्त मान  $अ, क, ख$  हों तो  $अ^२ क + क^२ ख + ख^२ अ$  इस अर्ध-तद्रूप फल का मान बताओ।

उ. यदि  $अ^2क + क^2अ + ख^2अ = सा$  तो

$$\frac{सा}{(अकल)^2} = \frac{सा}{प_3^2} = \frac{1}{ख^2क} + \frac{1}{क^2अ} + \frac{1}{अ^2ख} \text{ और १६२—}$$

१६३ वें प्रक्रम से

$$\frac{३प_३ - प_१प_२}{प_३^2} = \frac{1}{अ^2क} + \frac{1}{क^2अ} + \frac{1}{क^2ख}$$

$$\frac{1}{ख^2क} + \frac{1}{ख^2अ} + \frac{1}{अ^2ख}$$

दोनों के अन्तर से

$$\frac{(३प_३ - प_१प_२) - सा}{प_३^2} = \frac{1}{अ^2क} + \frac{1}{क^2ख} + \frac{1}{ख^2अ}$$

और  $सा = अ^2क + क^2ख + ख^2अ$

दोनों के गुणन से

$$\frac{(३प_३ - प_१प_२) सा - सा^2}{प_३^2} = ३ - \frac{अ^३ + क^३ + ख^३}{प_३}$$

$$-प_३ \left( \frac{1}{अ^३} + \frac{1}{क^३} + \frac{1}{ख^३} \right)$$

$$= \frac{६प_३^३ + ३प_३^२प_१ + ३प_३^२प_२ - ६प_१प_२प_३}{प_३^३} \text{ छेद को उड़ा देने से}$$

और पक्षान्तरानयन से

$$सा^३ - सा (३प_३ - प_१प_२) = ६प_१प_२प_३ - (६प_३^२ + ३प_३^२प_१ + ३प_३^२प_२) \text{ यह वर्गसमीकरण हो जायगा ।}$$



३४।  $y - ६$   $y^२ + ११$   $y^२ - ६ = ०$  इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क और ख हों तो  $अ^२ क + क^२ ख + ख^२ अ$  इस का मान बनाओ।

उ० २३ वा, २५।

३५। ऊपर के समीकरणों में सिद्ध करो कि यौ  $अ^२ क = ४८$

३६। सिद्ध करो कि  $फ (y)$  यह यदि  $y$  का अकरणीगत घन फल हो तो  $फ (y) = ०$ , और  $फ' (y) = ०$  इन दोनों में से एक समीकरणों में अवश्य एक अव्यक्त मान संभाव्य संख्या होगा।

उ० मान लो कि  $फ (y) = y^{n-१} + p, y + p^२ y + q$  तो यदि  $n$  विषम होगा तो २३ वें प्रक्रम से कम से कम  $फ (y) = ०$  इस में एक संभाव्य मान होगा और यदि  $फ (y)$  में  $n$  विषम  $n$  हो तो  $फ' (y)$  में  $n-१$  यह विषम होगा; इसलिये तब  $फ' (y) = ०$  में २३ वें प्रक्रम से एक संभाव्य मान होगा।

३७। यदि  $फ (y) = y^n - १$  और  $फ (y) = ०$  इसमें अव्यक्त मान अ, क, ख, ... हों तो दिखलाओ कि

$$\frac{n y^{n-१}}{y^n - १} = \frac{१}{y - अ} + \frac{१}{y - क} + \frac{१}{y - ख} + \dots$$

३८। उन दो राशियों को बताओ जिनके घात में छोटी राशि को जोड़ कर आधा करने से उसका पूरा पूरा घन मूल मिल जाता है। दोनों राशियों के योग और अन्तर में दो दो जोड़ दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल मिल जाता है। राशियों के वर्गान्तर में आठ जोड़ दें तो इस का भी पूरा वर्गमूल

मिलता है, राशियों के वर्गयोग का भी पूरा वर्गमूल मिलता है और इन पांचों मूलों का योग २५ होता है।

उ० ६ और ८

३६। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके योग और वियोग में तीन मिला दे तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल निकल आता है। दोनों के वर्ग योग में चार घटा दे तो उसका पूरा वर्गमूल मिल जाता है। दोनों के वर्गान्तर में बारह जोड़ दे तो उसका भी पूरा वर्गमूल मिलता है। दोनों के घात के आधे में छोटी राशि को मिला दे तो उसका पूरा घनमूल मिलता है और पांचो मूलों का योग २३ होता है।

उ० ६ और ७

४०। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके योग और अन्तर का पूरा पूरा वर्गमूल निकले, वर्गान्तर का भी पूरा वर्गमूल मिले, वर्ग योग का आठ मिलाने से पूरा वर्गमूल मिले, दोनों के घात में छोटी राशि को घटा कर आधा करें तो इसका घनमूल मिले और पांचों मूलों का योग १६ हो।

उ० ४ और ५

४१। वे दोनों अभिन्न राशि कौन हैं जिनके योग में उनके घात और वर्गयोग को मिला कर वर्गमूल लें उस में उन्हीं दोनों राशियों को मिला दे तो २३ हो।

उ० ७ और ५

४२। दश हाथ व्यासार्ध के वृत्तक्षेत्र की परिधि पर एक खूँटे में एक रस्सी से एक घोड़ा बंधा है और ठीक आधे खेत

को घास को चरता है । बताओ जिस रस्सी में घोड़ा बँधा है उसकी लम्बाई कितना हाथ है ।

उ० ११५८७-८५

४३ । ऊपर के प्रश्न में जिस खूँटे में घोड़ा बँधा है उस से छ राशि के अन्तर पर परिधि ही के ऊपर एक दूसरा खूँटा है जिसमें एक गाय रस्सी से बँधी है वह भी ठीक आधे खेत की घास चरती है । बताओ दोनों के चरने से कितना खेत बाकी बचा ।

उ. २५-४५५ वर्ग हस्त ।

यह बीज बीज विचारि जो उर धारि है धरि धीरता ।  
 वर वासना विधि वारि डारि निकावि अङ्कुर धीलता ॥  
 निज सुमन सों बहु सुमन पाय सो धीर यश धन धी लहै ।  
 राखत नरेश सुचाहि तेहि भाखत सुधाकर धीर है ॥  
 उनइस सै अरु चौवन संवत मास ।  
 सित शुचि दूइज गुरु दिन भयेउ प्रकास ॥  
 तेहि संवत सित कातिक दशमी गुरु दिन ।  
 पूरन कियेउ सुमिरि सिय-पति-पद जिन छिन ॥

इति श्रीकृपालुदत्तात्मजसुधाकरद्विवेदिकृता  
 समीकरण-मीमांसा सम्पूर्णा ।

# विषयानुक्रमशिका

## प्रथम भाग

### अध्याय १-

उपयोगी गणित	१
अव्यक्त राशि	"
फल	"
पूर्वफल, पूर्वसमीकरण	२
अकरणीगत अभिन्नफल	५
उत्पन्न फल	१०
र के अपचय घात क्रम से फ (य+र) का मान	१५
असम्भव संख्या और मध्यगुणक	१८
असम्भव का मूल	१६
च के परिवर्तन से फ (ग+च) के मान का परिवर्तन	२०
समीकरण का मूल	२२
एकवर्ण समीकरण के मूलों की संख्या अव्यक्त के सब से बड़े घात के तुल्य होती है	२७

### अध्याय २

समीकरणों के गुण	३१
समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भव मूल	"
तथा करणीगत मूल	३३
खण्डों की संख्या	३३

तुल्य मूल	३३
अव्यक्त के सब से बड़े घात की संख्या से मूल अधिक हों तो	
सब गुणक शून्य के तुल्य होता है	३४
समीकरण के एक मूल को जान उससे एक घात छोटे	
समीकरण का बनाना	३५
गुणकों और मूलों में परस्पर सम्बन्ध	३६
मूलों के वर्गों का योग	३८

### अध्याय ३

समीकरणों की रचना	४३
समीकरण के किसी एक पद का उड़ाना या हटाना	५०

### अध्याय ४

धनर्ण मूल	६३
क्रमिक पदयूथ	"
सर पद	"
व्यत्यास पद	"
डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति	६४

### अध्याय ५

तुल्यमूल	७८
$f(x)=0$ में जितने एक घात के खण्ड एक बार, दो बार	
... ..त बार आए हों उनके मूल जानना	८५

### अध्याय ६

समीकरण के मूलों की सीमा	८६
-------------------------	----

सीमा	६२
धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा	,,
कनिष्ठ सीमा	१०२
टाइलहटर साहेब की कनिष्ठ सीमा के मान में व्यर्थता	१०४
न्यूटन की रीति	१०५
अनुमान	११४
$f'(y) = 0$ इसके सम्भाव्य मूल का जानना $f(y) = 0$	
इसके सम्भाव्य मूल का जानना	११७
प्रत्येक व्यत्यास में $f(y) = 0$ इसका एक ही मूल होता है	११६

### अध्याय ७

समीकरणों का लघुकरण	१२८
समीकरण के दो मूलों में परस्पर सम्बन्ध जानकर अल्प घात का नया समीकरण बनाना	१२८

### अध्याय ८

हरात्मक समीकरण	१३६
हरात्मक समीकरण को समघात का समीकरण बनाना	१४१
हरात्मक समीकरण को छोटे घात का बनाना	१४२

### अध्याय ९

द्वियुक्पद सर्माकरण	१४८
$\sqrt[n]{\text{आ}} = \text{अ} \sqrt[n]{१}$	१४६

य<sup>म</sup>—१=०, य<sup>न</sup>—१=० इन दोनों सर्माकरणों में अव्यक्त का एक ही मान उभयनिष्ठ होता है जहां म और न परस्पर बृद्ध हैं

विशिष्ट मूल १५५

### अध्याय १०

परिच्छिन्न मूल १७१

### अध्याय ११

समीकरण के मूलों का आनयन १८६

घन समीकरण के मूलों का आनयन १८७

कार्डन की रीति १८८

घन समीकरण के मूलों पर विशेष विचार १८०

भास्कराचार्य का घन समीकरण २०७

चतुर्धात समीकरण २१०

ओलर की रीति २१०

फेररी वा सिम्पसन की रीति २२३

डेकार्टिस की रीति २२६

एस. एस. ग्रीथीड की कल्पना २३०

### अध्याय १२

समीकरणों के मूलों का पृथक्करण २४०

फोरिअर, (वा बुडन) का सिद्धान्त २४३

स्टर्म का सिद्धान्त २५३

स्टर्म के शेषों को सहज में निकालने के लिये ग्रन्थकर्त्ता की युक्ति २७२

### अध्याय १३

आसन्नमानानयन २८१

भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञों की रीति २८३

कमलाकर भट्ट की रीति २८३

न्यूटन की रीति २८६

फोरिअर की रीति	२८७
ला ग्रांज की रीति	२८३
लाग्रांज की रीति पर ग्रन्थकर्ता के विचार	३०३
हानर की युक्ति	३०४

### अध्याय १४

मानों के तद्रूपफल	३१६
न्ययन की रीति	३१६
श्रीश्रीशी का चलनसमीकरण	३३७

### अध्याय १५

कनिष्ठफल	३५५
लाप्लेस की युक्ति	३७६
कनिष्ठफलों का सङ्कलन	३८३
कनिष्ठफलों का गुणन	३६६
ओलर का सिद्धान्त	३६५
हरात्मक व उत्क्रम कनिष्ठफल	४०३
सम्बद्ध ध्रुव	४०५
तद्रूप कनिष्ठफल	४०६
विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल और विजातीय कनिष्ठफल	४०८

## दूसरा भाग

### अध्याय १६

लुप्तीकरण	४३५
तद्रूपफलों से लुप्तीकरण	४३६
प्रत्युत्पन्न के गुण	४३६
ओलर की रीति	४४२



सिलवेस्टर की युक्ति	४४३
बेज़ौट की क्रिया	४४५
एम. एम. लाबेटी और सारस की रीति	४६४

### अध्याय १७

चलस्पर्धी, अचलस्पर्धी	४८०
चतुर्धातु समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्धी	५११
जकोबी का चलस्पर्धी	५२१
टाशिन हौसेन (Tochinhausen) की विधि	४२५
मिस्टर सीरेट की कल्पना	५२६
सिलवेस्टर की कल्पना	५३०
डिमार्गन की कल्पना	५३१
काशी का सिद्धान्त	५४६

ग्रन्थकर्ता का सिद्धान्त कि किसी हरात्मक समीकरण में

यदि छेद, समीकरण को  $x^n$  से गुण कर न उड़ाए

जाय तो उसमें शून्य विध अन्वय का मान होगा ५६०

मर्फी के समीकरण-मीमांसा में लिखे हुए सिद्धान्त ५६४-५६६

भास्कर से पूर्व भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का

निकाला हुआ प्रश्न ५७०

भास्कर के प्रकार का व्यभिचार तथा ग्रन्थकर्ता की कल्पना ५७२

$y, r = अ.य + क.र + ख$  इसमें  $y$  और  $r$  के

अभिन्न धनात्मक मानों का निकालना ५७६

भास्कर की कल्पना

निर्दिष्ट वृत्त के परिधिस्थित किसी बिन्दु का केन्द्र मान

एक ऐसा वृत्त बनाना जिससे निर्दिष्ट वृत्त का दो

समान भाग हो जाय

५७६

## शब्द-सूची

अ

अव्यक्तराशि, Unknown quantity

अकरणीगत, Rational

अभिन्न, Integral

अकरणीगत अभिन्नफल, Rational integral function.

अपचय घात, Descending power

अंश, Numerator.

असंभव संख्या, Impossible or imaginary number

अन्तिमप, Last term

असंभव मूल, Imaginary root

अनन्त, Infinity

अधूरा समीकरण, Incomplete equation

असकृत्कर्म, Repeated process

असमान, Unequal

अटकल से, By trial

अपवर्तित-घन-समीकरण, Cubic equation by reduction

अनुमान, Corollary

अव्यवहित, Contiguous or adjacent

अव्यवहितोत्तर, Contiguous, different

अव्यवहित पूर्व और उत्तर  $y$  के मान. Former and later adjacent values of  $x$ .

अपवर्तन, Reduction

अङ्कपाश, Permutation

अनुगम, Deduction

अचल स्पर्धी Invariant

अक्ष, Axis

अपवर्त्य, Multiple

### आ

आसन्नमान, Aproximate value

आनयन, Solution

आयताकृति, Rectangular form

आयताकार, Rectangular

आयत, Rectangle

### इ

इष्टाङ्क, Arbitrary number

### उ

उत्पन्नफल, Derived function

उपचय, Ascending

उभयनिष्ठ, Common

उन्मिति, value

उपपत्ति, Proof

उत्थापन, substitution

ऊर्ध्वाधर, vertical

उपान्तिम, Last but one

ऊर्ध्वाधर पंक्ति, vertical line, column

उत्क्रम, Reciprocal

ऋ

ऋण, Negative

ए

एकवर्ण समीकरण, Equation with one variable

एकापचित, Decreasing by one

एकान्तर, alternate

क

करणी, Surds

करणीगत मूल, Irrational root

क्रमिक पदसूच, group of terms in order

कनिष्ठ सीमा, Inferior limit

कोष्ठक, Bracket

कोटिज्या वा कोज्य, cosine

कर्ण, Hypotenuse

कोटि, altitude

कनिष्ठफल, Determinants

कर्णगत, situated diagonally

केन्द्र, center

ख

खिल, Wrong

ग

गुणक, Multiplier, coefficient

गुण्य, Multiplicand

गुणन फल, Product

गुण्यगुणक रूप अवयव वा स्तरण्ड, Factors

गुणोत्तर श्रेढी, Geometrical progression

ग्राह्यमान, admissible value

### घ

घन, Cube

घन-समीकरण, Cubic equation

घात, Power

### च

चिन्ह, Sign

चिन्ह रीति, Rules of signs

चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation

चलनकलन, Differential Calculus

चलराशिकलन, Integral Calculus

चलन समीकरण, Differential equation

चक्रवाल, Cyclical

चलस्पर्धी, Covariant

चापीय, Spherical

चाप, Arc

### छ

छेदगम से, By multiplying both sides of an equation by the greatest denominator.

### ज

ज्या. sine

## त

तृतीयोत्पन्नफल, Third derived function

तुल्य मूल, Equal roots

तुल्यान्तरित, Equidistant

तद्वरूपफल, Symmetrical function

तष्ट करना, To divide numerator by a denominator  
and take the remainder only

तत्कालिक संबंध, Differential co-efficient

तिर्यक् पंक्ति, Rows, Horizontal line

तद्रूप, Symmetrical

तुल्यघात, Homogenous

त्रिकोणमिति, Trigonometry

## द

द्वितीयोत्पन्न फल, Second derived function

द्वियुक्पदसिद्धान्त, Binominal Theorem

द्वियुक्पद समीकरणे Binominal equation

दृढ़, Prime

दशमलव, Decimal

द्वितीयपदरहित चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation  
deprived of its second term

दीर्घवृत्तलक्षण, Ellipse

## ध

धन, Positive

धनार्ण, Positive and negative

ध्रुवशक्तिक, Having the sum of the exponents of  
each term equal .

ध्रुवशक्ति, Sum of the exponents

ध्रुवा, Constituents of the determinants

ध्रुवाङ्क, Constituent

ध्रुव, Constituents

ध्रुवक, Constituent

धरातल, Plane

## न

निर्दिष्ट, Given

न्यून, Less

निरवयव, Without remainder, perfect

निष्पत्ति, Ratio

निरक्ष, non-constituent

न्यूनतम, Minimum

## प

प्रक्रम, Article

पूर्ण-फल, Complete function

पूर्ण-समीकरण, Complete equation

प्रथमोत्पन्नफल, First derived function

पक्ष, side

पद, term

प्रधान सीमा, Superior limit

परिच्छिन्न मूल, Commensurable root

पाटीगणित, Arithmetic

पद उड़ाना, Removal of a term

प्रसिद्धार्थ, Postulate

पंक्ति, Line

प्रधान पद, First element ,

पूरक, Complementary

परम्परा, Continuous arrangement, regular series

प्रत्युत्पन्न, Derivative

परिमिति, Limit

प्रधान समीकरण, Final equation

प्रकार्णक, Miscellaneous Theorem

परिधि, Circumference

पूर्णज्या, Chord

फ

फल. Function, result

ब

बीजगणित, Algebra

भ

भाज्य, Dividend

भाजक, Divisor

भिन्न, fraction

भुज, Side or base of a triangle

म

मूल, Root

महत्तमापवर्त्तन, G C. M.



मूलचिह्नान्तर्गत, Under radical sign

मुख्य समीकरण, Original equation

मध्यस्थ, Medium

मिश्र-चल, Complex variable

महत्तम, Maximum

य

योगान्तर श्रेढी, Arithmetical progression

यूथ, Group

र

रूप, Unity

ल

लब्धि, Quotient

लघुत्तमापवर्त्य, L. C. M.

लघुकरण, Reduction

लघुरिक्त, Logarithm

लघुकनिष्ठफल, Partial or minor determinant

लुप्तीकरण, Elimination

लम्ब, Perpendicular

व

विषम, Odd

व्यत्यास, Change

बहुयुक्पद, Polynominal term

वर्गसमीकरण, Quadratic equation

वितत रूप, continued form

विततभिन्न, Continued fraction

व्यतिरेक, Converse  
 व्याप्ति, Inherence  
 व्यत्यय, Reverse  
 विरुद्ध, Opposite  
 वास्तवमान, Real value  
 वज्राभ्यास, Cross multiplication  
 वक्र, Curve  
 वृत्त, Circle

## श

शेष, Remainder  
 श्रेणी, Series  
 श्रेढी, Progression

## स

समीकरण मीमांसा Theory of Equations  
 सरूप समीकरण, Linear equation  
 संख्यात्मक गुणक, Numerical co-efficient  
 सिद्धान्त, Theorem  
 सम्भाव्य संख्या, Real number  
 सम्भव संख्या, Real quantity  
 समीकरण, Equation  
 स्वतन्त्र, Independent  
 सम घात Even power  
 सर, Continuation  
 संशयात्मक, Ambiguous  
 सीमा, Limit

समच्छेद, Equal denominators

समकोण, Right angle

स्वल्पान्तरसे, Roughly

समीकरण के मूलों का पृथक्करण, Separation of the roots  
of an equation

सम, Even, equal

संख्यात्मक मान, Numerical value

समशोधन सं, By equal subtraction

सोपान, The highest exponent

सङ्कलन, Addition

सजातीय, similar, Homogenous

सम्बद्ध, conjugate

समानान्तर, Parallel

सीमा, Boundary

इ

हर, denominator

हरात्मक समीकरण, Harmonical equation

क्ष

क्षेत्रफल, Area of a figure

क्षेत्र, Figure

क्षेत्र, Additive

त्र

त्रिघात समीकरण, Cubic equation

त्रिकोणमिति, Trigo-nometry

